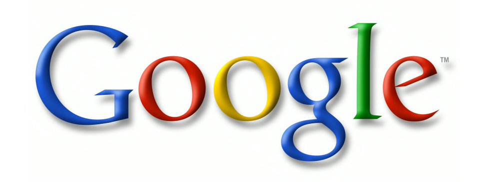



194 .C741S C.1
La synthÆese subjectiv
Stanford University Libraries
3 6105 046 748 336


LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY



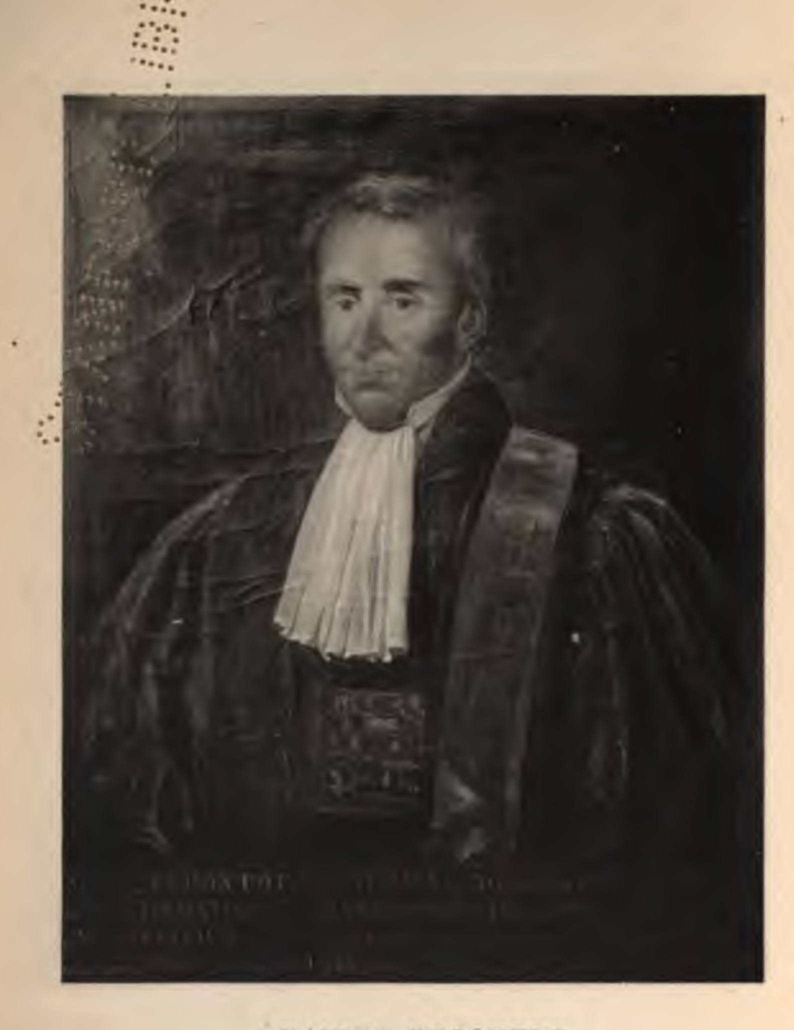
LA SYNTHÈSE SUBJECTIVE

D'AUGUSTE COMTE

TOME PREMIER (seul publié)

SYSTÈME DE LOGIQUE POSITIVE

Le Mans. — Typ. Ch. Monnoyer.



DANIEL ENCONTRE

1762 — 1818

LA
SYNTHÈSE SUBJECTIVE

D'AUGUSTE COMTE

OU

SYSTÈME UNIVERSEL DES CONCEPTIONS PROPRES A L'ÉTAT NORMAL DE L'HUMANITÉ

TOME PREMIER

(SEUL PUBLIÉ)

Système de Logique Positive ou Traité de Philosophie Mathématique

---

SECONDE ÉDITION

PARIS

FONDS TYPOGRAPHIQUE

DE L'EXÉCUTION TESTAMENTAIRE D'AUGUSTE COMTE

—

1900

Année CXII de la Révolution Française et XLVI de l'Ère normale.

AVERTISSEMENT

*Cette seconde édition du tome 1*er *de la* Synthèse Subjective *reproduit exactement, ligne pour ligne, l'édition originale publiée par notre Maître, en novembre 1856.*

Pour ne rien altérer dans la réimpression facsimilée d'un tel monument, nous y avons laissé trois erreurs indiquées par Auguste Comte lui-même, mais en reproduisant également les rectifications correspondantes. Deux de ces erreurs ont fait l'objet d'un errata *placé par l'Auteur entre la Dédicace et l'Introduction : on le trouvera à la même place. L'autre erreur, signalée après la publication du volume, avait conduit notre Maître à rédiger un* erratum, *qu'il se proposait de joindre à la Préface du tome deuxième de la* Synthèse Subjective. *Cette correction, ainsi que la lettre qu'il écrivit à ce sujet à Alfred Sabatier, ont été publiées dans la* Revue Occidentale (*n°* 4, 1880). *Nous reproduisons ci-après ces importants documents.*

Nous avons orné cette nouvelle édition d'un portrait de Daniel Encontre, le vénérable professeur mathématique d'Auguste Comte, à qui ce tome est dédié. Nous l'avons fait dans la conviction que notre Maître aurait approuvé cet hommage ajouté à sa dédicace.

LETTRE D'AUGUSTE COMTE A M. ALFRED SABATIER,

à Albano, Carino Poniatowski-Giorni, États romains,
par Marseille et Civita Vecchia (Italie)

Paris, 10, rue Monsieur-le-Prince,
le Mardi 20 César, 69 (1).

MON CHER DISCIPLE,

D'après votre lettre de mercredi dernier, arrivée hier, je me reproche les vains efforts que vous a récemment coûtés l'interprétation d'une loi rimique que j'avais mal formulée, faute d'une représentation assez déterminée d'une application qui ne me concernait pas. Je reconnus le vice de cette rédaction en la relisant, quant M. Lonchampt m'eut, le 14 Archimède, annoncé vos embarras et les siens à cet égard. Trois jours après je lui transmis, surtout à votre intention, une copie de l'*erratum* spécial que je venais ainsi d'arrêter, et que je reproduis à la fin de la présente réponse tel qu'il sera finalement publié dans la préface de mon prochain volume, en octobre 1858.

J'approuve, comme pleinement conforme au véritable esprit de mon nouveau système de composition, l'amendement que vous me soumettez, à l'occasion de votre opuscule pour la coordination des sections d'un même

(1) 12 avril 1857.

chapitre ou tiers de chapitre, en substituant à la succession alphabétique des initiales de section, celles des lettres d'un mot bien choisi. Mes tiers de chapitre ayant tous été caractérisés par un titre sommaire, quelquefois condensé dans un terme unique, je n'avais pas senti le besoin d'un tel perfectionnement, mon attention s'était surtout concentrée vers la construction de chaque section. Néanmoins, je reconnais la justesse de vos objections sur la succession toujours alphabétique des diverses sections, sauf pour l'introduction et la conclusion, qui directement relatives à l'ensemble du traité, ne peuvent guère admettre un mot spécial. Il est donc probable que, en commençant, le premier vendredi de février prochain, le second volume de ma *Synthèse subjective*, je pratiquerai votre amendement, afin de perfectionner la coordination spéciale de mes tiers de chapitre, mais sans m'y borner aux noms concrets, individuels ou même collectifs, et me réservant comme toujours la faculté d'employer aussi des termes abstraits, substantifs ou même verbes, qui seront quelquefois préférables. Les petites compositions, où les chapitres ne sont pas divisés en trois parties caractéristiques, sont les seules qui doivent exclusivement coordonner les sections par des mots concrets, ordinairement personnels. Ainsi conçu votre amendement mérite mon entière approbation, non seulement envers le cas qui vous l'a suggéré, mais pour l'ensemble de la méthode constructive, dont il perfectionne l'application normale, en même temps qu'il prévient de fastidieuses répétitions. Si les réflexions que j'aurai, naturellement, lieu de faire à cet égard, avant de reprendre ma grande construction finale, me conduisent, comme je le présume, à la consécration de cette

proposition, j'aurai plaisir, en l'annonçant dans la préface du volume où je l'appliquerai directement, à la rapporter à l'éminent disciple théorique qui l'a dignement imaginée.

Erratum pour le tome 1er de la *Synthèse subjective*. Il y faut ainsi rectifier l'avant-dernière phrase de la page 760 :

« Toujours le premier vers d'une stance rime avec le
« dernier de la précédente, dont les deux consonnances
« sont également répétées dans l'ensemble de trois
« strophes, où la consécutivité compense l'alternance :
« l'enchaînement embrasse toutes les sections d'un même
« chant. »

Paris, 10, rue Monsieur-le-Prince,
le Vendredi 16 Archimède, 69 (1).

AUGUSTE COMTE.

Auguste Comte ajoute ensuite le spécimen suivant :

Spécimen de la succession des rimes dans l'ensemble de trois stances

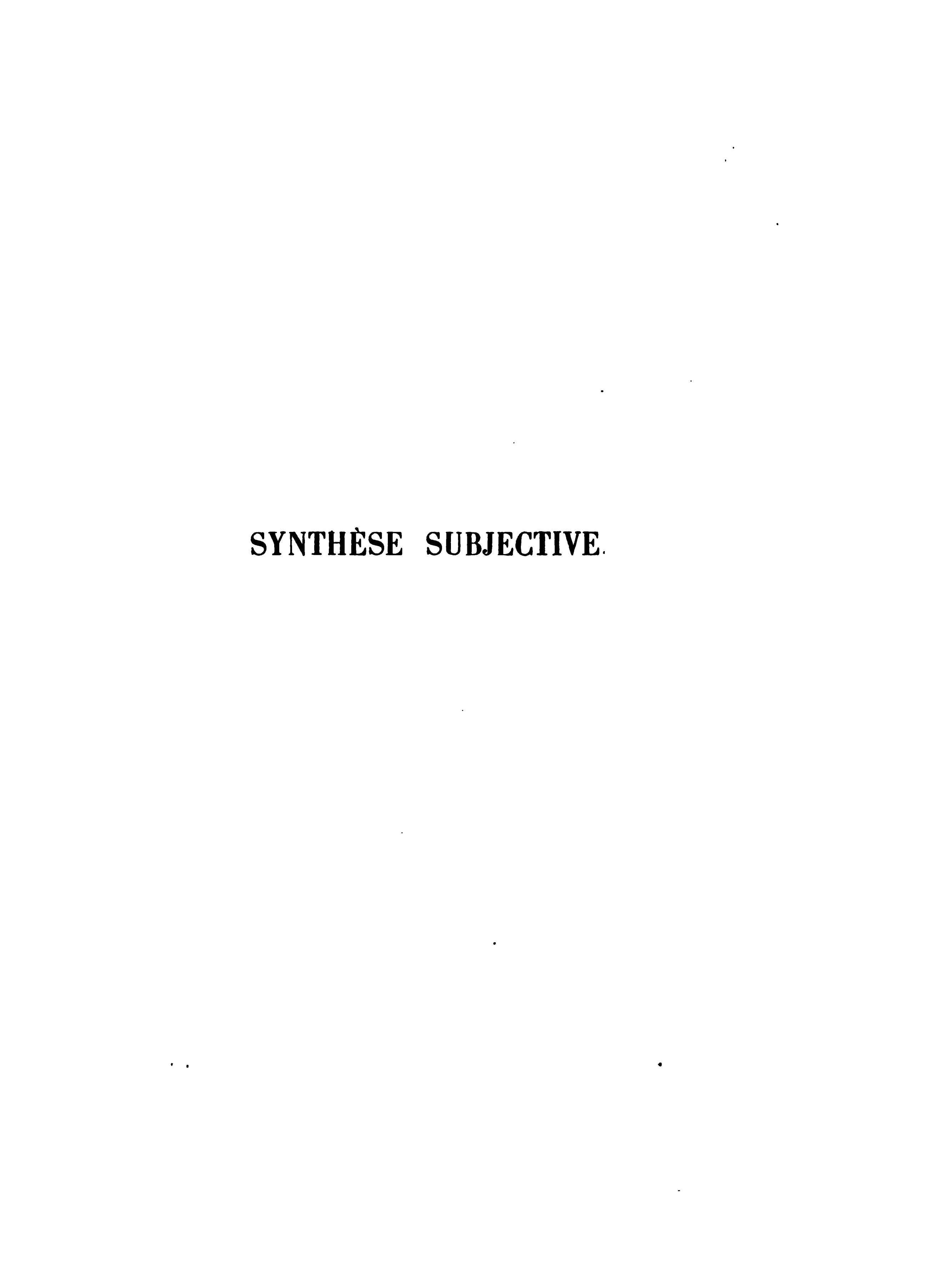
justice
charité
propice
fierté
novice
vérité
clarté.

bonté
courage
beauté
volage
pureté
servage
hommage.

(1) 10 mars 1857.

partage
douleur
nuage
bonheur
visage
pâleur
vainqueur.

valeur
sagesse
etc.



SYNTHÈSE SUBJECTIVE.

Paris.— Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

RELIGION DE L'HUMANITÉ.

L'Amour pour principe, et l'Ordre pour base ; le Progrès pour but.

SYNTHÈSE SUBJECTIVE,

OU

SYSTÈME UNIVERSEL DES CONCEPTIONS PROPRES
A L'ÉTAT NORMAL DE L'HUMANITÉ.

PAR AUGUSTE COMTE,

Auteur du *Système de philosophie positive*
et du *Système de politique positive.*

TOME PREMIER,

Contenant le SYSTÈME DE LOGIQUE POSITIVE ou TRAITÉ DE PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Induire pour déduire,
afin de construire.

Omnis ratio, et naturalis investigatio
fidem sequi debet, non præcedere, nec infringere.

L'Homme doit, de plus en plus,
se subordonner à l'Humanité.

Prix de ce volume : Neuf francs.

PARIS,

CHEZ L'AUTEUR, 10, RUE MONSIEUR-LE-PRINCE ;

ET CHEZ VICTOR DALMONT, LIBRAIRE, 49, QUAI DES AUGUSTINS.

—

Novembre 1856,

Soixante-huitième année de la grande crise

PRÉFACE.

Ce volume, commencé le 1er février 1856 et terminé le 9 septembre, constitue, sous son titre spécial de *Système de Logique positive*, le premier des trois éléments, théorique, moral, et pratique, de ma *Synthèse subjective*, qui sera composée de quatre tomes. Elle devient la suite naturelle et le complément nécessaire de ma *Politique positive*, comme celle-ci résulta de ma *Philosophie positive*. La seconde partie, dont le titre propre est *Système de Morale positive*, formera deux volumes, qui doivent respectivement instituer la morale théorique et la morale pratique, l'un en 1858, l'autre en 1859. La dernière partie, sous le titre spécial de *Système d'Industrie positive*, sera publiée en 1861, suivant l'annonce placée à la fin de mon principal ouvrage. Malgré leur connexité, les quatre volumes de ma construction finale seront toujours vendus séparément, parce que chacun d'eux constitue un traité distinct.

La destination propre à celui-ci consiste surtout à régénérer la première phase de l'éducation encyclopédique, sur laquelle mon principal ouvrage a systématiquement fondé l'ensemble du régime humain. Normalement instituée, l'initiation mathématique permet au sacerdoce positif de faire convenablement

sentir, aux jeunes disciples de l'Humanité, l'ébauche préliminaire de la hiérarchie théorique et de l'évolution mentale. Quoique le plus simple domaine encyclopédique fût nécessairement incapable de fournir cette double appréciation, naturellement réservée au plus éminent, il en comporte la vérification artificielle, d'après une saine comparaison générale de ses trois éléments normaux. Car, le calcul, la géométrie, et la mécanique forment dogmatiquement une série conforme au principe fondamental de généralité décroissante et complication croissante, qui sert de base au classement total des conceptions théoriques. Historiquement considéré, ce premier essor de la positivité rationnelle, antérieur à celui de toutes les religions provisoires, représente, dans l'ensemble de sa marche, les trois états nécessaires de l'esprit humain, d'après la prépondérance successive de chaque élément mathématique. A son début, la science fondamentale est purement numérique; elle devient essentiellement géométrique pendant la majeure partie de son élaboration ; la mécanique y prévaut pour sa constitution finale, qui la lie à toute l'encyclopédie abstraite. Or, ces trois états mathématiques sont, respectivement, en connexion naturelle avec le fétichisme, le théologisme, et le positivisme, dont la succession nécessaire constitue la principale loi de l'évolution humaine.

D'après une telle aptitude, statique et dynamique, le premier domaine encyclopédique doit normalement fournir l'ébauche décisive de la véritable logique. L'uniformité nécessaire de la méthode positive la rend naturellement appréciable dans son plus simple exercice, où l'attention, moins absorbée par l'objet, peut mieux sentir la marche du sujet. Quoique cette ébauche soit toujours insuffisante, elle est normalement indispensable pour constituer un type et des habitudes de rationalité graduellement applicables aux spéculations supérieures, seules

capables de leur procurer un essor complet. Si la clarté, la précision, et .a consistance doivent de plus en plus se développer dans toutes les phases encyclopédiques, en sorte que leur plénitude appartienne au domaine humain, elles ne peuvent théoriquement surgir que d'après l'initiation mathématique. Mais une étude jusqu'ici restée essentiellement scientifique ne pouvait aujourd'hui devenir principalement logique que par suite de sa régénération systématique sous l'impulsion sociale, comme début normal de la synthèse universelle : voilà le but propre à ce volume.

Suivant cette destination, ce tome est directement écrit pour des maîtres synthétiques dirigeant des élèves synthétiques dans les écoles positives normalement annexées aux temples de l'Humanité. Nos jeunes disciples n'étudient le premier des sept degrés propres à l'encyclopédie abstraite qu'après avoir dignement reçu la préparation affective et la culture esthétique accomplies au sein des familles. Avant d'aborder cette étude, le sacerdoce les y dispose par dix-neuf leçons initiales de philosophie première, qui devront systématiquement présider à l'ensemble de l'essor théorique. D'un autre côté, les professeurs, jamais spéciaux, doivent successivement enseigner toutes les parties de l'encyclopédie abstraite pendant les sept années normalement consacrées à l'instruction scientifique. Ces fonctions didactiques sont toujours inséparables de l'office sacerdotal, destiné surtout à régler l'ensemble de la vie humaine, morale, intellectuelle, et pratique, en y rapportant tout à l'Humanité. Tel est le point de vue où l'on doit se placer pour utiliser, et même comprendre, ce volume, qui ne peut donc être sainement apprécié qu'en le subordonnant à la régénération universelle irrévocablement instituée par mon principal ouvrage. Je ne saurais accorder aucune attention sérieuse aux jugements, même bienveillants, qui ne seraient point accomplis dans cette dispo-

sition, seule normalement convenable envers la vraie philosophie mathématique.

Ainsi jugée, cette composition très-condensée, où j'ai systématiquement exclu les figures et les lettres autant que les chiffres, deviendra suffisamment claire pour tous ceux qui, de cœur et d'esprit, seront assez préparés à l'étudier. Dans l'état normal, les traités didactiques doivent uniquement s'adresser aux maîtres, à travers lesquels doit toujours passer l'instruction finalement destinée aux élèves. Les lectures théoriques ne conviennent à ceux-ci que quand leur éducation est terminée : jusqu'alors, leur essor scientifique résulte d'une élaboration personnelle, spontanément subordonnée aux leçons orales, seules conformes à la dignité des professeurs. On ne pourrait autrement concevoir la condensation normale de tout le savoir humain dans les dix volumes indiqués au tome final de mon principal ouvrage. Il faut essentiellement attribuer à l'anarchie moderne l'habitude de destiner les livres aux élèves, ainsi disposés à dédaigner ou contrôler les maîtres, d'après le conflit continu de deux modes d'exposition naturellement incompatibles.

Pour que le lecteur puisse mieux apprécier le point de vue propre à ce traité, je dois ici caractériser l'artifice général qui préside à sa rédaction. Il consiste à supposer que j'écris dans l'année 1927, qui doit, à mes yeux, constituer la septante-troisième de l'état normal, d'après l'opinion établie par mon principal ouvrage sur la nature et la marche de la transition finale. Alors la réorganisation occidentale est assez accomplie pour avoir partout régénéré les âmes d'élite, de manière à nécessiter les livres qu'exige l'installation universelle de l'éducation encyclopédique. Ma vie objective aura depuis longtemps cessé, quand même elle durerait autant qu'il convient à la plénitude de mon office, d'abord philosophique, puis sacerdotal. Cette

supposition générale a beaucoup simplifié l'ensemble de mon exposition, en la purgeant des discussions relatives aux abus qui seront alors dissipés, et que j'ai toujours dû représenter comme éteints; l'introduction, et surtout la conclusion, les ont seules pris en considération.

Une telle hypothèse me fut naturellement inspirée par la disposition d'âme où me plaça, pour tout le reste de ma carrière, la composition du testament qui termina mon chômage de 1855. Je puis ici caractériser cette attitude en rapportant l'une des phrases finales de cet écrit exceptionnel, qui sera complètement publié, dans l'année 1864, avec le préambule biographique d'une sainte correspondance, suivant l'annonce placée à la fin de mon principal ouvrage. « Habitant une tombe anticipée, je « dois désormais tenir aux vivants un langage posthume, qui « sera mieux affranchi des divers préjugés, surtout théoriques, « dont nos descendants se trouveront préservés. »

Malgré mon attitude habituellement posthume, j'ai spécialement apprécié, dans la conclusion de ce volume, l'action qu'il comporte sur le public actuel. La régénération mathématique, naturellement repoussée par les géomètres officiels et les professeurs vulgaires, convient aux esprits qui, suffisamment initiés à la science fondamentale, furent assez préservés, d'après la vie pratique, de la dégradation propre à ces deux classes connexes. Ils sont partout nombreux aujourd'hui, surtout chez le peuple central, par suite de la propagation, d'abord spontanée, puis systématique, de l'instruction scientifique, graduellement liée à la plupart des professions, tant privées que publiques. Telle fut la principale utilité de l'école polytechnique, dont l'efficacité, théorique ou pratique, resta fort équivoque, tandis que ses inconvénients moraux et sociaux furent toujours incontestables. Quoique ce service soit gravement altéré par la dégénération ainsi développée dans les études mathématiques, on peut main-

tenant utiliser cette culture, qui, spontanément accomplie, eût été plus pure mais moins répandue.

Il faut aussi regarder ce volume comme devant spécialement agir sur le second élément du vrai public théorique, en intéressant les médecins assez susceptibles d'apprécier les conditions rationnelles de leurs études et l'avenir normal de leur profession. Ceux que leur âge et leur situation disposent à refaire leur éducation abstraite, prendront ce traité pour guide de leur initiation mathématique, sous la libre assistance d'amis spécialement instruits. Outre son influence directe sur le public mathématique et le public médical, ce volume tend à les combiner, surtout par l'entremise des médecins préalablement initiés à la science fondamentale. Ainsi doit bientôt surgir une double classe, jusqu'ici dépourvue d'organe et de guide, pour seconder le positivisme dans la régénération finale de l'esprit occidental. Quand ce public d'élite aura suffisamment pris l'attitude qui lui convient, la religion universelle pourra facilement éteindre, en invoquant la raison et la morale, la honteuse domination encore exercée par les brouillons métaphysiques, littéraires, et même scientifiques,

Toutefois, cette réaction normale ne saurait pleinement surgir si les deux éléments du public théorique n'étaient d'abord purifiés du matérialisme fatalement inhérent à l'ensemble de la philosophie naturelle, et surtout à ses deux extrémités. C'est pourquoi je me suis spécialement efforcé, dans toutes les parties de ce volume, de déraciner, à sa véritable source, le matérialisme théorique, que le positivisme pouvait seul juger et surmonter. J'ai successivement examiné les trois modes, algébrique, géométrique, et mécanique, naturellement propres au matérialisme mathématique, moins actif mais plus tenace que le matérialisme médical; le second est trop inconséquent pour troubler les esprits assez dégagés du premier. Malgré cette sol-

licitude spéciale et continue du seul philosophe qui pût normalement instituer la théorie et la réfutation du matérialisme, la malveillance et la déloyauté des déclamateurs métaphysiques me sont tellement connues que j'attends de nouvelles calomnies en retour de ce service. Un de leurs coryphées assista, pendant mon cours public de 1850 au Palais-Cardinal, à la leçon directement consacrée au jugement systématique du matérialisme; ce qui ne l'empêcha pas, quelques semaines après, de reproduire les diatribes convenues.

Dédaignant ces ignobles attaques, les vrais positivistes doivent habituellement prouver par leur conduite, privée et publique, que la sécheresse aveuglément attribuée à l'esprit scientifique est seulement propre à sa dégénération académique, où la spécialité dispersive entrave la culture esthétique et l'essor moral. En construisant le culte systématique de l'Humanité, j'ai suffisamment constaté que les habitudes abstraites de clarté, de précision, et de consistance, normalement contractées envers le domaine mathématique, sont profondément applicables aux institutions religieuses. On peut maintenant reconnaître combien elles secondent la régénération morale que je dus à l'angélique collègue subjective qui, suivant la poétique expression récemment émanée d'un de mes dignes disciples théoriques, renouvela la lumière de l'esprit par la flamme du cœur.

La science fondamentale est radicalement épuisée depuis un siècle; la construction de la mécanique céleste, alors devenue pleinement suffisante, marqua le terme naturel de son évolution normale. Sa culture ultérieure suscita deux sortes de travaux essentiellement stériles, quoiqu'ils aient souvent prouvé le génie théorique de penseurs encore dépourvus d'un digne but. D'une part, les tentatives empiriquement destinées à lui procurer de nouveaux domaines ont bientôt avorté, sans laisser d'autre résultat philosophique que la confirmation spontanée

de la restriction nécessaire de l'esprit mathématique aux études numériques, géométriques, et mécaniques. Quant aux efforts dirigés vers la systématisation partielle de la science fondamentale, ils pouvaient seulement préparer sa régénération finale : ils n'aboutirent à rien de durable, même dans les incomparables compositions du plus philosophe des grands géomètres. Ces deux tendances, également stériles, à perpétuer une évolution essentiellement terminée, sont simultanément éteintes par ce traité, qui procure à l'esprit mathématique une destination logique normalement liée à l'ensemble du régime humain. Elle ne pouvait se développer tant que l'essor scientifique prévalut ; car elle suppose à la fois la clôture et la systématisation, naturellement connexes, du domaine initial de la rationalité positive. Accomplie sous l'impulsion religieuse finalement émanée des besoins sociaux d'après une suffisante préparation théorique, la régénération normale des études mathématiques ramènera vers elles les grands esprits et les cœurs tendres, que l'empirisme analytique en devait spontanément détourner.

J'ai naturellement dédié cette systématisation à l'éminent professeur qui m'ouvrit le digne accès de la science fondamentale. De tous les théoriciens dont les leçons me furent jadis utiles, il est le seul que je puisse réellement qualifier de maître, comme ayant seul influé sur l'ensemble de ma carrière, d'après le caractère involontairement philosophique de son enseignement scientifique. Le juste hommage que je rends à sa vénérable mémoire peut aujourd'hui sembler tardif aux yeux de ceux qui ne sauraient assez sentir pourquoi je ne lui dédiai pas mon traité fondamental. Mais, quand j'abordai ma construction initiale, je n'avais point une autorité capable de faire convenablement apprécier une supériorité comprimée et méconnue. Il fallait, au contraire, placer mon début sous le précieux patronage des deux derniers grands esprits propres aux deux extrémités de

la philosophie naturelle, sur laquelle je devais alors fonder la philosophie sociale.

Outre sa destination privée, la dédicace actuelle comporte une réaction publique, en indiquant l'attitude normale du positivisme envers le protestantisme français, dont mon digne maître fournit l'un des meilleurs types. Devenu politiquement passif, par l'impossibilité d'acquérir, chez le peuple central, la domination qu'il obtint ailleurs, le parti protestant y fut empiriquement conduit à représenter la conciliation nécessaire entre l'ordre et le progrès. Cette disposition l'a jusqu'ici rendu, malgré sa libération religieuse, étranger au mouvement français, dont le caractère reste encore révolutionnaire. Un tel parti doit bientôt accueillir la doctrine où ses aspirations sociales sont systématiquement réalisées, et qui peut seul transformer son isolement exceptionnel en une activité normale. J'ai donc utilisé cette occasion de faire incidemment sentir une disposition qui, rapprochée de mes manifestations antérieures envers le catholicisme, indique la tendance du positivisme à traiter comme auxiliaires toutes les religions provisoires, même les moins consistantes. Si cette attitude avait pu surgir avant que la doctrine finale fût assez élaborée, elle en aurait peut-être entravé la construction, en inspirant des concessions énervantes. Mais, depuis que la religion universelle est irrévocablement instituée, son installation exige, pendant tout le cours de la transition organique, le caractère que j'ai récemment formulé par ce vers systématique :

Conciliant en fait, inflexible en principe.

Ayant assez indiqué la destination finale et l'influence prochaine de ce volume, je dois ici développer la continuité de mes préfaces normales, en accomplissant, dans celle-ci, les explications et rectifications naturellement suscitées par celle du

dernier tome de mon principal ouvrage. Il faut d'abord annoncer le système de composition qui consacre et complète les règles de rédaction que je m'étais alors imposées, et dont les médiocrités indisciplinables ont seules méconnu l'efficacité pour l'amélioration simultanée du discours et de la pensée. En rapprochant, autant que possible, le travail philosophique de la rigueur propre à l'élaboration poétique, j'ai profondément senti, dans tout le cours de ce volume, combien le perfectionnement de l'intelligence, comme celui du sentiment et de l'activité, repose sur une digne soumission. D'après cette épreuve décisive, ma conclusion a directement expliqué, suivant la promesse de mon principal ouvrage, mon nouveau système général de composition, également favorable aux trois modes logiques. Néanmoins, une expérience convenable, dont j'ai suffisamment indiqué les conditions essentielles, peut seule faire assez apprécier une telle institution, et surtout manifester son aptitude continue à développer la prépondérance normale du cœur sur l'esprit.

Ma préface de 1854 annonça, pour l'année suivante, un nouveau cours de philosophie de l'histoire, qui n'eut pas lieu, mais dont je joignis le programme systématique à mon *Appel aux conservateurs*, unique publication accomplie pendant mon chômage de 1855. Le refus indirect alors émané d'un pouvoir qui m'avait auparavant secondé m'a fait mieux apprécier la nouvelle situation publique où je me trouve irrévocablement placé depuis que mon principal ouvrage a définitivement institué la religion de l'Humanité. Je m'étais déjà félicité que l'instinct pratique de mes adhérents eût finalement prévenu l'altération à laquelle mon projet de publication trimestrielle aurait involontairement exposé ma dignité normale. Dans le refus relatif à mon cours, j'ai pareillement reconnu que les praticiens, plus rapprochés que les théoriciens de la réalité directe et spéciale,

ont spontanément senti l'incompatibilité de ma mission religieuse avec le professorat, surtout tel qu'il est aujourd'hui. Soit comme fondateur de la religion universelle, soit comme Grand-Prêtre de l'Humanité, c'est seulement au temple positiviste que je puis dignement développer un enseignement public désormais inséparable du culte, abstrait et concret, que j'ai pleinement systématisé. Tant que la dictature française n'aura pas fait au nouveau pouvoir spirituel la seule concession qu'il doive maintenant réclamer, le lieu privé de nos célébrations religieuses restera l'unique siège de ma parole publique. Quelque restreinte que soit une telle publicité, j'espère que son digne exercice fera bientôt surgir un mode plus conforme à la mission normale de la seule foi qui puisse aujourd'hui réorganiser les cinq populations avancées.

En terminant mon opuscule de 1856, j'ai directement représenté, comme appartenant au positivisme, un temple exceptionnel, solennellement destiné, chez le peuple central, au culte universel des grands hommes. Inutile au catholicisme qui l'usurpa, ce monument restera muet jusqu'à ce que l'office indiqué dans son inscription échoie à la seule doctrine capable de le remplir. Je dois donc utiliser toutes les occasions opportunes de réclamer une possession où je ne puis désormais avoir aucuns concurrents. La construction et l'usage du calendrier positiviste ont assez développé l'aptitude de la religion relative à systématiser des glorifications nécessairement incompatibles avec les religions absolues. C'est seulement au Panthéon que je ranimerai l'esprit et le sentiment historiques chez l'élite du public occidental, en consacrant, suivant les lois immuables de l'évolution humaine, l'ensemble des temps et des lieux. Quand ma réclamation systématique vaincra des résistances empiriques, j'inaugurerai le premier temple de l'Humanité par la digne glorification de l'humble vierge du cinquième siècle, qu'un noble

monument représentera préservant la population éternellement placée sous son saint patronage. Une telle installation convient au culte où les principaux types du catholicisme reçoivent une consécration toujours supérieure à leur apothéose théologique, outre qu'il peut seul réparer de graves lacunes.

Vu ma renonciation finale aux cours proprement dits, il faut mieux utiliser la pleine liberté que j'ai graduellement procurée à mes préfaces, ainsi devenues, avec mes circulaires annuelles, mes seules voies de communication publique pour les explications extérieures à mon élaboration normale. Je vais donc indiquer, sans transition, deux considérations générales, l'une intellectuelle, envers l'ensemble de ce volume, l'autre sociale, sur la situation actuelle des vrais positivistes.

Ce traité de philosophie mathématique doit naturellement rappeler celui qui forma, vingt-six ans auparavant, le tome premier de ma construction initiale. Leur comparaison fera spécialement sentir le développement intellectuel du positivisme, et sa liaison nécessaire avec son but social. Quand j'ébauchai la philosophie mathématique, à l'âge de trente-deux ans, je ne pouvais, ni ne devais, assez me dégager des habitudes scientifiques pour en juger et transformer l'ensemble. Alors la vénération, même aveugle, envers les doctrines et leurs organes, dut essentiellement dominer une appréciation surtout destinée à me faire graduellement parvenir au seul point de vue vraiment universel. Dès que j'y fus irrévocablement placé, par la fondation de la sociologie, je terminai ma construction initiale en annonçant la systématisation définitive qui remplace aujourd'hui mon élaboration provisoire de la première phase encyclopédique. Mais la philosophie issue de la science devait d'abord aboutir, sous l'impulsion du cœur, à la religion, source normale de toute régénération théorique, surtout envers le domaine le plus éloigné du vrai centre de l'unité. Voilà comment

le présent traité résulte de mon principal ouvrage, qui m'a seul permis d'y faire toujours prévaloir les aspirations synthétiques et les dispositions sympathiques, sans lesquelles la systématisation mathématique serait insuffisante et précaire.

La supériorité de ce volume sur le tome premier de ma construction initiale est surtout due à deux différences connexes, l'une générale, l'autre spéciale. D'une part, le point de vue scientifique s'y subordonne au point de vue philosophique, normalement dominé par le point de vue religieux, unique source de consécration et de discipline. En même temps, la science fondamentale, que j'avais jadis supposée, d'après les géomètres, essentiellement indéfinie, constitue un domaine irrévocablement circonscrit, dont l'élaboration spéciale est pleinement terminée, sauf la systématisation définitivement accomplie dans ce traité. Normalement érigée en premier terme de la progression encyclopédique, elle se décompose en calcul, géométrie, et mécanique; comme le second en astronomie, physique et chimie; et le dernier en biologie, sociologie, et morale. Son histoire générale est philosophiquement résumée, de même que celle des deux autres termes, par la prépondérance successive de ses trois éléments, dont la coordination suit une loi semblable à celle des trois groupes scientifiques. Mais, en vertu de sa plus grande simplicité, le premier domaine théorique offre une connexité plus intime entre ses trois parties, plus homogènes et mieux combinées que partout ailleurs, malgré leur diversité radicale. Voilà pourquoi le nombre total des degrés encyclopédiques, fondé sur l'indépendance scientifique et logique, reste généralement réduit à sept, au lieu des neuf que semble d'abord exiger la décomposition ternaire de la progression générale.

Fondateur de la religion universelle, j'ai définitivement pris, envers l'ensemble de mes prédécesseurs, une attitude de juge, déjà caractérisée par ma construction du calendrier historique,

et spécifiée, dans ce volume, en subordonnant aux vrais philosophes les savants quelconques, même les plus éminents géomètres. Cette rectification ne concerne que le passé, puisque de telles distinctions ne peuvent aucunement s'étendre à l'avenir, où le sacerdoce positif doit continuellement absorber tous les offices spéculatifs, tant esthétiques que théoriques, uniformément liés à sa destination morale et sociale. Mais la saine appréciation historique est éminemment propre à faire indirectement comprendre l'état normal, en indiquant comme concrète une subordination désormais abstraite. Je ne reconnais, chez les modernes, parmi beaucoup d'esprits vraiment philosophiques, que deux véritables philosophes, Descartes et Leibnitz, qui furent mes principaux précurseurs, comme Thalès et Pythagore ceux d'Aristote : la parité des intervalles chronologiques complète ce parallélisme. Les deux fondateurs de la philosophie positive que j'ai seulement complétée et systématisée, sous une suffisante impulsion sociale, avaient spontanément indiqué le vrai régime intellectuel, en ébauchant l'harmonie normale entre l'esprit de détail et le génie d'ensemble. Une discipline aussi prématurée fut bientôt méconnue, et la culture mathématique devint graduellement hostile à la source philosophique de ses principales institutions; en sorte qu'une impulsion, surtout destinée à pousser la positivité vers son terme, tendit à perpétuer son début. Il fallait finalement surmonter, d'après ce traité, l'insurrection des géomètres contre les philosophes, en montrant que les grandes conceptions théoriques ne furent jamais dues aux esprits spéciaux, et ne sont vraiment appréciables que du point de vue général qui les inspira.

Dans mon *Appel aux conservateurs*, j'ai suffisamment caractérisé l'installation décisive de la transition organique, directement destinée à terminer la révolution occidentale en faisant graduellement prévaloir la religion universelle. Cette apprécia-

tion indique l'attitude propre aux vrais positivistes jusqu'à ce que le gouvernement leur soit librement transféré, chez le peuple central, quand la dictature française aura bien reconnu qu'ils peuvent seuls surmonter les diverses tendances subversives, surtout envers la possession et l'emploi des richesses. Pendant la demi-génération qui doit maintenant préparer un tel avénement en élaborant l'opinion publique et formant des hommes d'État, tous les efforts essentiels doivent habituellement seconder l'installation directe du nouveau pouvoir spirituel, devenu non moins mûr qu'urgent. Tant praticiens que théoriciens, les vrais croyants sont alors agrégés au sacerdoce régénérateur, où leur assistance, quoique moins régulière et plus intense, s'exerce comme dans le régime final, suivant l'esprit général de la transition organique. Leur commune participation doit surtout résulter de l'efficacité que développera leur foi pour régénérer leur propre conduite journalière, personnelle, domestique, et civique. Il serait ici superflu de caractériser l'office spécial des théoriciens dans une coopération directement conforme à leur destination normale, soit sacerdotale, soit apostolique. Quant aux praticiens, outre que l'influence de l'exemple leur est principalement réservée, ils peuvent directement seconder la réorganisation spirituelle, non-seulement par des applications spéciales de la doctrine rénovatrice, mais aussi d'après de dignes actes de foi généraux.

Un type décisif de ce dernier concours, pleinement conforme au vrai caractère pratique, a déjà surgi dans un opuscule récemment publié sous ce titre : *Réflexions synthétiques, au point de vue positiviste, sur la philosophie, la morale, et la religion*. De telles manifestations, naturellement dispensées de toute coordination régulière, comportent une haute efficacité chez quiconque peut assez recommander cette adhésion solennelle par la maturité personnelle, la position sociale, et l'ensemble

des antécédents, privés ou publics. Les théoriciens sont aussi suspects en proclamant la nécessité d'un nouveau pouvoir spirituel que les riches en préconisant la propriété matérielle. Si celle-ci ne peut jamais être dignement défendue que par les pauvres, les praticiens doivent seuls accréditer un sacerdoce qu'ils subiront sans y participer. Quoique sa fondation soit nécessairement émanée d'un philosophe, les patriciens, les prolétaires, et les femmes sont exclusivement aptes à le faire convenablement prévaloir. En un temps où tout esprit un peu cultivé sait assez manier une plume, les littérateurs seront bientôt effacés par ceux qui, sans aucune prétention théorique, communiqueront au public des impressions directement conformes à l'objet continu des sollicitudes unanimes. Je suis peu surpris que le premier exemple d'une telle assistance émane du noble foyer hollandais qui, depuis dix ans, constitue, à tous égards, le meilleur appui pratique de la religion universelle.

Il faut maintenant compléter cette préface par les trois explications propres à son Appendice.

Suivant ma coutume normale, il doit d'abord reproduire les deux circulaires annuelles que j'ai successivement publiées depuis la terminaison de mon principal ouvrage. Quoique la sixième fût déjà jointe à mon opuscule de 1855, je devais aussi l'annexer à ce volume, afin d'incorporer à mes travaux essentiels une série de publications directement propres à caractériser l'attitude et la marche du nouveau pouvoir spirituel. Je suis ainsi conduit à signaler une réaction spéciale de la situation, de plus en plus normale, où je fus involontairement placé, quand, renonçant, à détruire ma personne, on tenta d'étouffer mon activité philosophique sous les préoccupations matérielles. En me privant des offices que j'avais empiriquement acceptés, on m'a naturellement procuré, non-seulement le meilleur emploi de mon temps et de mes forces, mais aussi le plein affran-

chissement des préjugés théoriques et des ménagements qu'ils suscitent. Depuis cinq ans que ma spoliation polytechnique est entièrement accomplie, je n'ai jamais arrêté mon esprit sur une pensée matémathique, jusqu'au début de ce volume, uniquement assisté par l'ensemble de mes impressions scientifiques pendant les quarante années antérieures. Ma digne élaboration de la philosophie mathématique ne pouvait mieux surgir qu'en succédant à ma construction définitive de la religion universelle, à laquelle j'ai normalement incorporé la science fondamentale d'après sa destination logique, plus qu'elle ne le fut au théologisme à travers l'astrologie. Loin que mes souvenirs spontanés se soient jamais trouvés insuffisants, je les ai souvent écartés pour ne pas altérer une systématisation qui pourtant consacre et discipline, au delà de ce qu'on pouvait d'abord espérer, toutes les méthodes et doctrines vraiment propres au début encyclopédique.

Mon traité fondamental avait promis, envers le prétendu calcul des chances, une réfutation philosophique dont je me suis finalement dispensé, d'après le progrès naturel de la raison publique sous l'impulsion sociale pendant les vingt années qui suivirent cette annonce. La situation occidentale est trop expressive, et le positivisme a trop grandi pour que je doive jamais m'arrêter à la discussion spéciale d'une aberration mathématique dont la profonde stérilité, malgré deux siècles de culture, peut assez constater l'inanité radicale. Tous les dignes lecteurs de ce volume sont spontanément aptes à sentir et dévoiler l'absurdité d'une conception directement contraire à l'universalité de l'ordre immuable, et seulement excusable, à son début, d'après l'espoir prématuré qu'elle suscita d'étendre la méthode positive jusqu'au domaine humain.

Je dois maintenant motiver la seconde partie de cet appendice, où je consacre deux précieuses manifestations, l'une phi-

losophique, l'autre poétique, de l'éminent disciple théorique que je perdis l'an dernier. Il naquit, à Dresde, en 1826, d'une grande famille polonaise, qui, fuyant l'oppression russe, s'est finalement nationalisée en Suisse, après que lui-même le fut en France, où toutes ses études s'accomplirent, de manière à l'ériger, de bonne heure, en digne professeur privé de mathématique à Paris. C'est là qu'il mourut, au milieu de sa trentième année, victime d'un zèle aveugle et de l'impéritie médicale qui méconnut une maladie probablement surmontable.

Également distingué de cœur et d'esprit, ce noble jeune homme aurait peut-être mérité que je lui conférasse l'office sacerdotal auquel il aspirait, quoique l'insuffisance de son caractère m'ait quelquefois inspiré des doutes sur son avenir social. Sa lettre, l'une des plus remarquables que j'aie jamais reçues, me le fit bientôt accueillir dans la Société Positiviste, que je fondai peu de temps après. Mais j'y retardai son admission de cinq mois, jusqu'à ce qu'il m'eut spontanément déclaré que son émancipation théologique était enfin complète. Les liaisons qu'il forma, pendant sept ans, dans cette association fraternelle, permirent à beaucoup de mes disciples d'apprécier, autant que moi, la perte que le positivisme fit en lui. Quand il eut assez constaté son talent d'exposition par quelques publications secondaires, il accepta, comme but littéraire, en 1852, la mission que je lui confiai pour faire convenablement juger mon avant-dernier précurseur, le grand Diderot, d'après un volume spécial, dont j'ai seulement vu la digne introduction.

Ce travail ayant été détruit par une famille fanatique, avec beaucoup d'autres témoignages positivistes, il ne restera, de mon éminent disciple, que les deux manifestations jointes à cette préface. Son expansion philosophique se trouve doublement adaptée au volume où je l'incorpore, en indiquant combien la jeunesse d'élite est aujourd'hui disposée à goûter la

systématisation mathématique, ainsi qu'à sentir la destination sociale du véritable esprit scientifique. Le naïf regret qu'il y témoigne envers la vicieuse direction des études ordinaires me fait spécialement espérer que quelques jeunes théoriciens seront bientôt entraînés à refaire leur éducation encyclopédique, d'après la base ici posée, afin d'être dignement associés au clergé régénérateur. Plus la science initiale développe des types et des habitudes de clarté, de précision, et de consistance, mieux on y sent que la vraie clarté, la vraie précision, et la vraie consistance, sont seulement propres à la science finale, comme le confirme la confusion, le vague, et l'incohérence des purs géomètres hors des détails spéciaux. Mon jeune disciple avait pleinement reconnu que le meilleur titre de l'esprit mathématique consiste à constituer le début nécessaire du véritable esprit philosophique, dont la principale destination concerne le domaine humain, aussi supérieur à tout autre en rationalité qu'en dignité.

La tentative poétique, que je promis, dans la cérémonie funèbre, de publier avec sa lettre, peut directement montrer combien les âmes d'élite sont aujourd'hui disposées à concilier la culture esthétique et les occupations scientifiques. Je pouvais d'autant mieux compter sur mon digne disciple, qu'il était déjà pourvu d'une suave affection pour une jeune personne qu'il n'a jamais vue, mais qu'il put assez apprécier comme sœur d'un de ses élèves. Élevée de la science à la poésie par la tendresse, son âme atteignit la situation pleinement religieuse qu'exige l'office auquel il aspirait. Moins d'un mois avant sa mort, au moment d'entrer dans sa prison domestique, sa touchante visite, qu'il était loin de croire la dernière, fut surtout consacrée à la confirmation spontanée de sa foi positiviste et de son dévouement social. Son zèle m'y parut même exiger le renouvellement spécial de mes recommandations habituelles sur les

ménagements dus au fanatisme exceptionnel de ses parents, d'après une situation où le catholicisme devient un symbole de nationalité. Chacun peut ainsi juger l'interprétation qu'on essaya de donner à l'excessive condescendance avec laquelle il supporta les importunités du prélat exclusivement admis auprès de lui pendant ses deux dernières semaines. Quoique son insuffisante énergie ne lui permît pas d'invoquer ses vrais frères contre la tyrannie domestique, l'ensemble des indications précédentes ne laisse aucun doute sur sa persistance dans une foi naturellement plus tenace que des croyances indémontrables.

D'après une telle perte, je suis spontanément conduit à rappeler celle que déplora ma préface de 1851, quant au jeune officier hollandais qui déjà secondait, par de sages publications, la vraie propagation du positivisme. Comme le noble noyau d'éminents disciples et dignes patrons dont il fut l'organe naturel, il avait d'avance consolidé sa conversion religieuse d'après l'initiation mathématique. Quand cette préparation est assez combinée avec l'existence pratique pour éviter l'état académique, elle fournit la meilleure garantie des conditions positivistes, si le cœur les a uffisamment inspirées ou sanctionnées.

On sera peu surpris que la dernière partie de l'appendice que j'explique concerne le noble Américain dont ma préface de 1853 déplora la perte, presque aussi précoce que les deux précédentes. Quelques années de plus permirent à mon éminen disciple et digne patron de faire mieux appr cier sa belle na ture, que j'osai directement assimiler à celle de l'illustre Jefferson, malgré la diversité de situation et l'inégalité de développement. La courte lettre que je rapporte en entier et dans l'original, afin que son caractère soit scrupuleusement conservé, montre la perspicacité synthétique du vrai praticien, que le milieu le plus anarchique n'empêcha pas de saisir la double base intellectuelle et le grand but social du positivisme. Sa dé-

claration fut cependant antérieure à mon principal ouvrage, et seulement fondée sur le discours préliminaire séparément publié trois ans auparavant. Dans sa visite finale, en décembre 1852, trois jours avant sa mort, il m'exprima, de la manière la plus touchante, la complète adhésion alors résultée de sa récente étude des deux premiers volumes de ma construction religieuse. Sa grande âme avait profondément apprécié la noble activité sociale que le positivisme substitue aux insuffisantes satisfactions personnelles qui furent naturellement propres au théologisme. Tous ceux qui concourront à fonder la vraie providence en préparant l'avenir normal, où nous pouvons ainsi vivre avant d'y revivre, seront aisément détournés aujourd'hui de regretter des illusions dont nos descendants n'auront jamais besoin pour aimer, agir, et penser dignement.

Auguste COMTE,
(10, rue Monsieur-le-Prince.)

Né, le 19 janvier 1798, à Montpellier.

Paris, le lundi 14 Shakespeare 68 (22 septembre 1855).

APPENDICE DE LA PRÉFACE.

1° Sixième circulaire annuelle,

Adressée par l'auteur du *Système de philosophie positive* et du *Système de politique positive* à chaque coopérateur du libre subside spontanément institué pour le sacerdoce de l'Humanité.

Paris, le lundi 15 Moïse 67 (15 janvier 1855).

MONSIEUR,

D'après le résumé numérique placé ci-dessous, l'année qui vient de finir n'a point réalisé les espérances indiquées, dans ma précédente circulaire, envers l'accroissement décisif du noble subside auquel vous coopérez. Cette institution n'a pu jusqu'à présent commencer à s'étendre au delà de sa destination initiale. Quoique le minimum normal qu'exige le but primititf ait encore été strictement atteint en 1854, ce résultat a nécessité le généreux renouvellement de quelques efforts exceptionnels, que j'avais cru bornés à 1853.

Le patronage collectif dont je suis l'objet ne sembla d'abord destiné qu'à réparer l'infâme spoliation accomplie envers moi. Mais, dès le début, on sentit que cette persécution était surtout dirigée contre une philosophie qui, complétant la préparation objective, faisait irrévocablement prévaloir la synthèse sur l'analyse, de manière à discréditer tous les théoriciens actuels. Ainsi surgit le caractère essentiellement social que manifesta de plus en plus un protectorat toujours émané de ceux qui s'intéressent à mes travaux, sans aucune participation du milieu spécialement renseigné sur l'iniquité commise. Sous cette digne tutelle, le coup frappé pour m'éteindre m'a finalement conduit à consacrer exclusivement mon temps et mes forces à ma mission exceptionnelle, dont l'essor décisif consolide le patronage qui l'a permis. Néanmoins, le subside positiviste ne

sera pleinement apprécié comme une institution sociale, destinée à fonder l'indépendance du sacerdoce régénérateur, que lorsqu'il aura notablement dépassé le taux qui me suffit personnellement.

Cet accroissement doit bientôt résulter de la construction religieuse que je viens d'achever, et dont l'ensemble ne pouvait être suffisamment compris avant la récente publication du tome final, qui seul institue directement la synthèse universelle. Après avoir expliqué le passé, le positivisme a déterminé l'avenir et régularisé le présent, de manière à satisfaire autant les besoins sociaux que les exigences intellectuelles. On peut ainsi juger son aptitude à terminer la révolution occidentale en ralliant et réglant les âmes d'élite par la seule foi susceptible d'universalité comme de perpétuité. La formation du sacerdoce positif, jusqu'ici réduit au fondateur de la Religion de l'Humanité, devient alors la première condition d'une génération non moins indispensable à l'ordre qu'au progrès. De plus en plus sentie, cette nécessité doit rapidement développer un subside sans lequel ne pourrait surgir la classe dignement contemplative qui, pure de toute ambition temporelle, inspirera partout une sage politique, toujours fondée sur l'ensemble des affaires humaines, passées, futures, et présentes.

Il ne faut point s'étonner, ni surtout s'inquiéter, de la lenteur qu'offre encore l'essor d'une telle garantie, qui, d'abord spontanée, ne pouvait devenir systématique avant l'entière terminaison de ma construction religieuse. L'aptitude du positivisme à dominer l'avenir, même prochain, lui suscite, dans le présent, de puissantes entraves. Car, depuis sa naissance, il lutte directement contre l'anarchie mentale et morale, sur laquelle, au contraire, s'appuyaient les aberrations éphémères dont le facile succès fit la honte du dix-neuvième siècle. A la vérité, le positivisme appelle ses dignes adeptes, théoriques ou pratiques, à la domination, spirituelle ou temporelle, qu'exige le développement de la régénération humaine. Mais leur ascendant nécessaire ne peut reposer que sur une vraie supériorité de cœur, d'esprit, et de caractère, supposant une préparation difficile, et prescrivant une conduite, personnelle, domestique, et civique, toujours conforme au type normal qu'ils proclament. Un tel empire ne peut encore inspirer beaucoup d'attrait à ceux qui le posséderont, tandis qu'il doit profondément choquer les hommes destinés à le subir. Quoique la réorganisation intellectuelle et morale soit généralement désirée, son essor décisif soulève d'actives antipathies parmi ceux qui se sentiraient ainsi forcés de régler leur conduite et d'abaisser leurs prétentions.

Telle est la principale source des entraves secrètes qu'éprouve, surtout en Angleterre, le développement complet du positivisme, chez la plupart des esprits qui d'abord accueillirent dignement sa base philosophique. Si, renonçant à la mission que mes opuscules fondamentaux avaient caractérisée, j'eusse dirigé mes travaux vers une destination purement intellectuelle, ces premières sympathies auraient bientôt acquis une grande extension, aussi favorable à ma sécurité qu'à ma célébrité. Car, sans imposer aux libres penseurs une reconstruction difficile et gênante, je leur aurais ainsi permis de prolonger le dix-

huitième siècle au milieu du dix-neuvième, en les dégageant du joug que la logique rétrograde faisait peser sur eux depuis que leur impuissance organique était constatée. Mais je ne pouvais oublier que l'ensemble du passé, surtout français, m'assignait une mission sociale, à laquelle ma philosophie devait seulement fournir une base systématique. Quand mon principal office, après avoir été suffisamment préparé, fut directement poursuivi, ces affinités se trouvèrent bientôt transformées en antipathies, chez ceux qui voudraient borner ma carrière à la phase que j'avais toujours représentée comme purement préliminaire. Je dois pourtant reconnaître qu'une disposition analogue peut quelquefois indiquer seulement l'insuffisance d'évolution, surtout quand le milieu fait peu sentir l'urgence sociale. Néanmoins, la plupart des prétendus positivistes qui se qualifient d'intellectuels n'aspirent qu'à perpétuer la situation révolutionnaire; aussi s'abstiennent-ils de coopérer à mon subside, quoiqu'un tel devoir se trouve assez motivé par les services qu'ils me reconnaissent.

Quelle que soit l'influence de ces divers obstacles, la lenteur des progrès du positivisme résulte surtout de la fatalité qui le força de naître dans le milieu le moins favorable à son développement. Dès mon début, je dus attaquer le principe révolutionnaire plus systématiquement que n'avait pu le faire aucun rétrograde. Néanmoins, je ne pouvais d'abord obtenir de succès que dans le camp correspondant, seul assez accessible aux innovations philosophiques et sociales. Par l'aveugle inertie des conservateurs empiriques, la doctrine qui concilie radicalement l'ordre et le progrès se trouve encore repoussée du milieu le plus propre à l'appliquer. Les conversions décisives que le positivisme a maintenant obtenues chez les meilleurs révolutionnaires concourent même à le rendre suspect dans l'autre camp, qui jusqu'ici ne sait point y voir une irrécusable épreuve de l'aptitude organique de la nouvelle synthèse.

On reconnaît ainsi que, pour hâter l'essor de la doctrine régénératrice, il faut aujourd'hui la transplanter parmi les conservateurs, qui seuls présentent les dispositions et les habitudes qu'exige son installation. Malgré leurs empiriques répugnances, ils ne peuvent, faute de dogmes qui leur soient propres, s'empêcher d'ouvrir leurs rangs à tout digne défenseur des institutions fondamentales de la société, non moins compromises par la rétrogradation que par l'anarchie. C'est à ce titre que les vrais positivistes y transplanteront bientôt leur foi, seule capable de procurer une consistance décisive à des résistances jusqu'ici restées radicalement insuffisantes.

Malgré leur origine révolutionnaire, tous ceux qui sont sincèrement convertis à la Religion de l'Humanité se trouvent aujourd'hui transformés en conservateurs systématiques, destinés à devenir les véritables chefs du parti de l'ordre, qu'ils vont dégager de ses inconséquences. Seuls ils sont aussi purifiés des tendances anarchiques que des inclinations rétrogrades, puisqu'ils conçoivent la régénération humaine comme consistant surtout à régler les forces graduellement surgies pendant la préparation spontanée que dirigea l'ancienne foi. Réalisant les vœux conciliables de tous les partis, et dissipant leurs prétentions incompatibles, le positivisme surmonte l'hypocrisie théologique, aussi dégra-

dante quand on l'exerce qu'oppressive lorsqu'on la subit, sans susciter l'hypocrisie métaphysique, plus nuisible et moins excusable. En appelant ses dignes adeptes à gouverner le monde, il proclame que leur avénement politique doit être aujourd'hui précédé, pendant douze ans, d'une influence purement philosophique, qui disposera les chefs actuels à leur transmettre sagement le pouvoir. Ainsi doit partout surgir une classe de véritables hommes d'État, qui manquent surtout au centre occidental, soit en vertu des difficultés propres à la mission française, soit d'après la marche de notre préparation. Le cours des événements fait de plus en plus ressortir l'intime connexité de toutes les populations humaines, de manière à manifester le danger de l'irrationnelle politique qui considère chaque peuple isolément. Or, le positivisme peut seul compléter et consolider cette régénération des vues sociales, en étendant à l'ensemble des temps la liaison ainsi sentie entre les divers lieux.

Faute de pouvoir embrasser l'ordre collectif, la théologie et la métaphysique ne surent jamais inspirer une politique vraiment rationnelle, dont l'institution était nécessairement réservée à l'esprit positif, principalement caractérisé par la construction de la sociologie. Établissant l'unité spirituelle, et dissipant toute aberration envers l'unité temporelle, la religion positive fera partout prévaloir l'ensemble des affaires humaines, sans altérer la spontanéité des impulsions spéciales. Transformant Paris en patrie adoptive des âmes d'élite, la foi nouvelle fonde l'ascendant intellectuel et moral de la métropole universelle sur sa digne renonciation à la domination matérielle, même dans le milieu français.

Pour terminer la révolution occidentale, il faut irrévocablement constituer la division fondamentale des deux puissances, prématurément ébauchée au moyen âge d'après une doctrine insuffisante. Le principe révolutionnaire consiste surtout dans l'absorption du pouvoir spirituel par les forces temporelles, qui ne reconnaissent d'autre autorité théorique que la raison individuelle, du moins envers les questions les plus importantes et les plus difficiles. Tous les partis actuels méritent ainsi d'être également qualifiés d'anarchiques et de rétrogrades, puisqu'ils s'accordent à demander aux lois les solutions réservées aux mœurs. Cette perturbation est devenue tellement universelle et profonde, que les meilleurs amis de la liberté n'hésitent jamais à recourir aux moyens matériels pour faire prévaloir leurs opinions quelconques. Voilà comment le pouvoir théorique se trouve forcé de surgir dans un milieu brutal, où la moindre dissidence l'expose toujours à subir un refus de subside, que l'ordre normal réserve aux chefs pratiques, et borne aux conflits exceptionnels.

Le sacerdoce positif doit donc surmonter des difficultés devenues presque autant morales que mentales, puisque le trouble des pensées a gravement altéré les sentiments. Sans doute, la révolution moderne est principalement intellectuelle, tandis que celle qui s'accomplit au moyen âge fut essentiellement sociale. Mais, pendant les cinq siècles de l'anarchie occidentale, et surtout depuis l'explosion de la grande crise qui doit la terminer, le désordre de l'esprit a de plus en plus affecté le cœur. C'est d'après celui-ci qu'il faut maintenant définir la maladie révolutionnaire, consistant dans une surexcitation continue de l'orgueil et

de la vanité, par suite d'une tendance, éminemment contagieuse, vers l'infaillibilité personnelle. Ainsi se trouve directement compromis le principal résultat de l'ensemble du régime théologique ; le développement de la vénération, seule base de la vraie discipline, et garantie nécessaire des deux autres instincts sympathiques. Il faut que le positivisme fonde ses meilleurs titres au gouvernement spirituel sur la reconstruction décisive de ce grand sentiment, plus essentiel et plus altéré qu'aucun autre. Un tel succès n'appartient qu'à la religion universelle, puisque toutes les croyances arriérées ont réellement aggravé ce désordre ; sans excepter le catholicisme, qui ne peut vénérer qu'un essor de dix siècles dans une seule moitié du monde romain.

Ainsi, la maladie occidentale exige un traitement plus effectif qu'intellectuel, depuis que l'esprit a rempli son principal office en construisant la philosophie positive d'après la fondation de la sociologie, appuyée sur l'ensemble des sciences préliminaires. Quoique les positivistes aient dû d'abord monter de la foi vers l'amour, ils doivent désormais préférer la marche, plus rapide et plus efficace, qui descend de l'amour à la foi. Le sentiment étant moins troublé que l'intelligence, c'est surtout de lui que dépendra le rétablissement de l'ordre occidental. Seul capable de compléter et de consolider les convictions émanées de l'esprit, le cœur peut même en dispenser à beaucoup d'égards, du moins envers l'assistance générale qu'exige toute grande construction. Je ne regarderai le subside positiviste comme ayant acquis assez de consistance que lorsqu'il reposera principalement sur des impulsions sympathiques, au lieu de dépendre d'adhésions intellectuelles, toujours flottantes au moindre choc.

Invoquant le cœur plutôt que l'esprit pour consolider et développer cette institution naissante, je dois en agrandir la base en y provoquant la participation de toutes les âmes qui, quelle que soit leur foi, sentent dignement le besoin d'une réorganisation spirituelle. Leur ralliement continu peut seul préserver les Occidentaux de la dégradation vers laquelle ils tendent de plus en plus en négligeant la culture morale pour développer le progrès matériel. Mais ce concours sympathique ne saurait être présidé par aucune des croyances théologiques, puisque leur nature absolue les rend directement inconciliables. Toutes peuvent, au contraire, se subordonner au positivisme, qui, toujours relatif, les consacre nécessairement, chacune dans son milieu, comme autant d'institutions provisoires que l'Humanité fit spontanément surgir afin de diriger son initiation. Sous leur inanité théorique, elles conservent, à divers degrés, une efficacité morale que la religion positive honore et développe, en reconnaissant que les plus imparfaites sont aujourd'hui devenues, quand elles rallient, préférables au scepticisme dispersif. Aucun fanatisme spécial ne disposant, de nos jours, à négliger le but pour les moyens, toutes les âmes vraiment religieuses peuvent se réunir contre les dangers universels de l'irréligion. En respectant avec sagesse la réserve provisoire de leurs solutions respectives, le positivisme peut utiliser leurs dispositions organiques en les faisant dignement concourir à surmonter les tendances révolutionnaires.

Je suis ainsi conduit à terminer cette circulaire en osant directement placer

le subside positiviste sous la sympathique assistance des théologistes sincères qui regardent l'avénement d'un pouvoir spirituel comme le premier besoin de notre temps. Après avoir assez rempli toutes les conditions intellectuelles qu'exige désormais une telle construction, j'en ai loyalement réalisé les conditions morales, tant privées que publiques. Une carrière vouée, dès son début, à la réorganisation spirituelle fut, en temps opportun, complétée par l'intime régénération résultée de l'influence féminine, d'après un type angélique, que la mort consolide et développe. Mon indépendance théorique se trouve pleinement garantie en vertu d'une irrévocable renonciation à toute existence officielle, à toute pension, et même aux profits matériels de mes travaux quelconques. L'aptitude décisive de ma doctrine à glorifier l'ensemble des temps et des lieux, déjà caractérisée d'après mon appréciation abstraite du passé, devient irrécusable depuis ma systématisation concrète de la commémoration occidentale.

Voilà comment je puis maintenant espérer que les âmes vraiment religieuses, disposées à la synthèse par la sympathie, sauront bientôt surmonter les discordances dogmatiques pour encourager le seul effort de notre siècle envers la religion universelle. Dès mon début, le célèbre écrivain qui défendait alors le catholicisme témoigna dignement cette affinité, qui ne cessa que lorsqu'il devint un déplorable auxiliaire des doctrines anarchiques. Le développement de ma carrière a fait spontanément surgir, au sein du protestantisme, d'équivalentes manifestations, dignement caractérisées par une noble coopération au subside positiviste. En même temps, j'ai directement constaté mon active sympathie envers les cultes utiles et sincères, d'après un engagement solennel d'alimenter le budget catholique, quand il sera seulement fondé sur de libres souscriptions. Ainsi, de tous côtés, ont déjà surgi les germes essentiels de la grande alliance que les principaux besoins du dix-neuvième siècle doivent bientôt développer entre les âmes religieuses contre les instincts irréligieux.

Une génération tout entière s'est maintenant écoulée depuis ma découverte fondamentale des lois sociologiques, en 1822, jusqu'à ma construction décisive de la religion positive, en 1854. Ce long enfantement a dû susciter, envers la synthèse universelle, des sympathies et des antipathies qui ne pouvaient être que provisoires. Devenu maintenant appréciable, son ensemble va partout déterminer les dispositions définitives auxquelles je subordonnerai l'avénement du sacerdoce de l'Humanité. Surmontant, par la vénération, toute divergence secondaire, les vrais positivistes, plaçant le cœur au-dessus de l'esprit, sauront activement développer les convergences fondamentales. Partout devenus les directeurs systématiques de l'ordre et du progrès, ils laisseront les dissidents retomber, plus que le vulgaire, dans un cours stérile d'oscillations empiriques entre l'anarchie et la rétrogradation. Le conflit de ces mouvements doit bientôt procurer à chaque élément du subside positiviste une persistance morale essentiellement équivalente à la fixité légale dignement instituée par le malheureux Wallace. Envers une coopération où les plus minimes cotisations sont admises, l'inconstance ne peut résulter que de l'instabilité des convictions, due surtout à l'insuffisance des sentiments.

D'après la préface de mon volume final, on sait que je consacrerai la présente année, soit au repos qu'exige ma construction religieuse, soit à la préparation des trois traités qui doivent la compléter, et dont le premier est annoncé pour 1856. Mais, outre le cours déjà promis, et qui peut-être sera toléré, je suspendrai ce chômage en publiant, vers le milieu de l'année actuelle, un opuscule exceptionnel (d'environ cent pages in-8°). Préparé par ma lettre au tzar, cet *Appel à tous les vrais conservateurs* doit directement développer les principales considérations que la présente circulaire ne pouvait qu'indirectement signaler.

Salut et Fraternité.

AUGUSTE COMTE,
(10, rue Monsieur-le-Prince),
Né à Montpellier, le 19 janvier 1798.

Résumé général des souscriptions pour le subside positiviste en 1854

	53 françaises	3,360 fr.	Minimum,	5 fr.
			Moyenne,	63
			Maximum,	300
	21 autres occidentales	2,48 fr.	Minimum,	10
			Moyenne,	118
			Maximum,	500
Plus	5 anonymes, de diverses nations	1,164 fr.		
Total....	79 souscriptions	7,004 fr.	Moyenne,	89

N. B. Fondé le 12 novembre 1848, le subside positiviste fournit 3,000 francs en 1849, 3,300 en 1850, 4,200 en 1851, 5,600 en 1852, et 7,400 en 1853.

2° Septième circulaire annuelle.

Adressée par l'auteur du *Système de philosophie positive* et du *Système de politique positive* à chaque coopérateur du libre subside spontanément institué pour le sacerdoce de l'Humanité.

Paris, le mardi 15 Moïse 68 (15 janvier 1856).

MONSIEUR,

L'insuffisance du subside positiviste, déjà signalée par ma précédente circulaire, s'est encore aggravée pendant l'année qui vient de finir. Quoique le minimum normal ait été strictement atteint, ce résultat, outre le noble renouvellement de quelques efforts exceptionnels, a surtout exigé le généreux patronage d'un de mes plus éminents disciples, qui, dès qu'il a su ma détresse, a quintuplé son large tribut habituel. Si le nombre total des coopérateurs a peu diminué, c'est parce que treize nouveaux souscripteurs ont presque compensé la retraite de dix-sept anciens.

Ma sixième circulaire avait prévu cette perte, comme propre à l'année exceptionnelle où la terminaison de ma construction religieuse devait naturellement éteindre une partie des adhésions surgies avant que le positivisme fût assez jugeable. Quoique la plupart des convictions antérieures aient supporté cette épreuve de manière à devenir maintenant définitives, elles n'ont pas suffisamment régénéré les habitudes, même chez ceux dont les sentiments sont vraiment modifiés. Les souscripteurs qui, pauvres ou riches, contribuent réellement en proportion de leurs moyens, forment à peine le quart du nombre total ; et les quatre cinquièmes au moins des divers adhérents au positivisme restent entièrement étrangers au protectorat volontaire.

Ce double contraste est surtout marqué dans la partie de l'Occident où la nouvelle synthèse a le plus retenti. L'ensemble du milieu britannique, tant américain qu'européen, fournit seulement neuf souscriptions, qui réunies n'équivalent pas à l'annuité posthume du noble Wallace. Dans cette coopération, on ne voit aucunement figurer les deux littérateurs dont la renommée fut surtout obtenue en initiant le public anglais à la philosophie positive. J'avais d'abord espéré que la torpeur britannique se trouverait essentiellement dissipée d'après le juste succès d'une incomparable traduction. Mais ce retentissement n'a point diminué l'apathie, malgré la noble conduite de ma puissante auxiliaire.

Suivant les explications de ma précédente circulaire, la lenteur générale de l'installation du positivisme doit être surtout attribuée à la fatalité qui le fit surgir dans le milieu le moins favorable à son essor. Une doctrine esssentiellement destinée à reconstruire l'ordre n'a pu jusqu'ici pénétrer que chez les partisans ex-

clusifs du progrès. Cette fausse position conduit à mal apprécier le subside positiviste, dont l'insuffisance est spécialement résultée de son imparfaite institution.

Fondé dans des vues trop étroites, quoique en un temps de larges aspirations, il fut d'abord représenté comme une garantie personnelle, et même temporaire, destinée à compenser une infâme persécution. Il est encore envisagé sous ce seul aspect par la plupart des coopérateurs, sans excepter ceux qui l'érigent en devoir social. Ce motif devait d'abord sembler suffisant, vu l'iniquité de ma spoliation, le mérite des services, spéciaux et généraux, que j'avais déjà rendus, et l'importance de ceux qu'on pouvait encore attendre de moi. Mais l'expérience a manifesté la faiblesse d'un tel sentiment, en un temps où la dissolution radicale de la morale publique laisse partout prévaloir l'individualisme, surtout dans le milieu systématiquement dégradé qui pouvait le mieux apprécier ce cas. Les plus nobles infortunes ne peuvent maintenant inspirer une sollicitude durable qu'en se liant aux besoins généraux de la situation occidentale.

Voilà pourquoi je me suis toujours efforcé, dès ma première circulaire, de représenter le subside positiviste comme ayant surtout une destination sociale, à titre de garantie permanente pour l'indépendance nécessaire au sacerdoce dont l'avénement peut seul terminer la révolution moderne. Mais ces efforts n'ont pu jusqu'à présent faire assez prévaloir une telle appréciaton, parce que, l'institution du positivisme restant insuffisante, il ne pouvait trouver d'accès que chez le parti qu'il doit surmonter ou transformer, et dont les chefs lui sont nécessairement hostiles. Quoique la nouvelle doctrine ait bientôt été regardée comme l'organe le plus avancé du progrès humain, elle ne pouvait susciter que de rares ou faibles sympathies parmi les progressistes actuels. Car ils bornent le perfectionnement à dissoudre l'ancienne discipline, tandis qu'elle le fait consister à régler toutes les forces suivant leurs lois naturelles. Néanmoins, si les intentions de nos révolutionnaires eussent, en général, été plus pures, ils auraient vivement accueilli la doctrine qui pouvait seule ranimer et consolider l'esprit d'émancipation en le dégageant du joug rétrograde que notre situation impose aux sceptiques. Une telle affinité n'a pu surmonter la répugnance qu'inspire l'avénement d'une règle universelle, qui ne pourra jamais être éludée parce qu'elle restera toujours démontrable. Les honteux succès momentanément obtenus par deux sectes également immorales, l'une plus corruptrice, l'autre plus dégradante, ont achevé de prouver que l'activité révolutionnaire émane aujourd'hui des impulsions égoïstes, du moins chez les meneurs.

En France, la situation disposait les lettrés à sentir que ma *Philosophie positive*, sous une apparence purement intellectuelle, tendait à fonder un nouveau pouvoir spirituel, dont mes opuscules primitifs leur avaient directement annoncé l'avénement nécessaire. C'est pourquoi, dès le début, leur silence, autant concerté que spontané, tenta d'étouffer une doctrine radicalement incompatible avec le crédit usurpé que leur procurait, depuis un siècle, l'interrègne théorique. Des conditions encyclopédiques qu'ils ne pouvaient pas plus éluder que remplir devaient aggraver leur antipathie, en leur ôtant tout espoir de s'incorporer au nouveau sacerdoce. Moins stimulés, moins clairvoyants, et moins avertis, les

lettrés britanniques se laissèrent aller à la séduction que le positivisme offrit aux âmes émancipées en les dégageant de l'oppression anglicane. Leur accueil brisa, même en France, la conspiration du silence, avant qu'ils fussent assez éveillés sur la destination sociale d'une philosophie encore plus hostile à toute métaphysique qu'à toute théologie. Ils ne se tournèrent contre elle que quand le début décisif de ma seconde élaboration vint leur apprendre que mes travaux avaient toujours eu pour but de terminer la révolution occidentale par la reconstruction de la discipline spirituelle. Afin d'échapper à la contradiction résultée de leur première approbation, ils introduisirent le sophisme qui consiste à représenter le développement de ma carrière comme une déviation.

Quelque grossière que soit cette tactique, elle a jusqu'à présent réussi dans un milieu trop peu sollicité par les aspirations sociales : les âmes mêmes qu'elles préoccupent le plus ignorent encore l'existence de ma *Politique positive*. La seconde conspiration du silence est mieux ourdie que la première, parce que les lettrés britanniques, surtout européens, restant étrangers aux rivalités politiques de leurs collègues français, concertent davantage les intérêts communs à toute la classe littéraire. Sous leur esprit d'émancipation, on peut toujours reconnaître leur tendance prépondérante à prolonger indéfiniment un interrègne spirituel qui favorise leurs prétentions sans gêner leurs goûts, sauf leur adhésion, au moins passive, à l'hypocrisie anglicane. Cette disposition se trouve nettement caractérisée dans le scandaleux mensonge solennellement formulé par le plus intelligent et le plus hardi de mes prôneurs britanniques.

Malgré leur aversion pour le théologisme, les métaphysiciens seconderont, aux Etats-Unis comme en Angleterre, sa résistance au positivisme, jusqu'à ce que les besoins sociaux aient partout poussé vers la seule doctrine capable de surmonter l'anarchie moderne. Tel est, sans doute, le motif qui fit récemment cesser le noble concours fourni, pendant trois ans, au subside positiviste, par deux de mes adversaires américains ; les antipathies de secte ont finalement dominé l'élévation personnelle.

On peut cependant assurer que la seconde conspiration du silence aura moins de succès et de durée que la première, puisque les meneurs de la double presse britannique ne sauraient longtemps empêcher leur public de connaître la seule doctrine vraiment conforme a ses vœux sociaux. Les lettrés français purent, pendant une demi-génération, détourner les lecteurs d'une philosophie qui semblait d'abord amortir l'élan rénovateur, en représentant la grande crise comme plus spirituelle que temporelle. Mais leurs collègues britanniques s'efforceront vainement de cacher l'application sociale d'un système qu'ils ont intellectuellement propagé. Pour surmonter leur habile tactique, il suffira peut-être de la traduction anglaise du *Catéchisme positiviste*, actuellement élaborée par l'un de mes meilleurs disciples. J'ose, du moins, affirmer que ces ténébreux efforts ne résisteraient point à la digne réalisation du projet, déjà formé, de traduire séparément le tome troisième de ma *Politique positive*, sous son titre propre de *Philosophie de l'histoire*. Une telle publication peut seule rectifier l'opinion officielle qui représente la révolution anglicane de 1688 comme devant préserver

l'Angleterre de la crise d'aujourd'hui commune à tout l'Occident. En expliquant l'avortement de la vraie révolution anglaise, la saine théorie historique fera partout sentir que son prolongement nécessaire consiste dans la révolution française, destinée à réaliser la régénération prématurément tentée sous le grand Cromwell.

C'est ainsi que doit bientôt cesser l'anomalie qui rend le plus hostile au positivisme social le pays où le positivisme intellectuel fut le mieux accueilli. Quoique cette contradiction soit conforme au régime le plus contraire à la séparation des deux puissances, les vrais théoriciens britanniques ne tarderont pas à développer des aspirations religieuses, secondées par un sexe secrètement lassé de la sécheresse protestante. Le peuple où le matérialisme, scientifique, esthétique, et politique, s'est le plus développé doit davantage apprécier la seule religion qui le surmonte dans son principe théorique. Même avant que les prolétaires britanniques se soient dégagés de la torpeur anglicane, le positivisme complet pénétrera chez les lecteurs anglais déjà familiarisés avec sa base philosophique. Toutefois, il ne pourra vraiment s'installer en Angleterre qu'en s'étendant au delà du public théorique, quand les dignes praticiens, éveillés par les sollicitudes sociales, invoqueront son aptitude organique. Pour sentir la supériorité des adhésions pratiques, il suffit d'opposer, à l'exiguïté du contingent britannique, la noble munificence des sept souscripteurs hollandais, qui seuls fournissent le sixième de mon subside habituel, outre leur coopération prépondérante aux suppléments exceptionnels. Indépendamment du mérite personnel, ce zèle et cette persévérance, dans un milieu mal disposé, résultent d'une situation qui pousse à juger les doctrines philosophiques d'après leur efficacité sociale et détourne des prétentions incompatibles avec la subordination spirituelle.

Ayant obtenu, malgré les influences protestantes, des succès qui manifestent son aptitude organique, le positivisme, désormais purifié de son origine révolutionnaire, doit trouver un accueil plus décisif chez les populations catholiques. Outre qu'il a seul apprécié l'ensemble des services du catholicisme, il en fait aujourd'hui sentir l'importance habituelle, soit pour résister aux dispositions subversives, soit pour entretenir une culture morale dont l'imperfection est toujours préférable à sa désuétude. Sous ce double aspect, le positivisme doit bientôt devenir le défenseur systématique des habitudes catholiques contre les impulsions protestantes, dont la réaction, théorique ou pratique, a déjà cessé d'offrir aucune compensation de leur inconséquence mentale et de leur danger moral. Dans ce milieu plus normal, où le sentiment de l'unité ne s'est jamais perdu, les positivistes, développant la construction ébauchée au moyen âge, feront aisément reconnaître que la révolution occidentale ne peut se terminer que par l'établissement de la religion universelle. Ils se trouveront là dispensés de réfuter les thèses, protestantes ou déistes, sur l'avénement d'une religion sans culte et sans sacerdoce ; comme si la sociologie ne répugnait pas, davantage que la biologie, aux fonctions sans organes. Tandis que le protestantisme accorde au dogme une vicieuse prépondérance, le catholicisme tend à faire spontanément prévaloir le culte, auquel il s'est presque réduit chez les Méridionaux. Le positivisme ayant systématisé cette préférence empirique, où l'instinct moral surmonta la pensée

théologique, il doit bientôt susciter d'actives sympathies au sein des populations dont il rétablit la préséance occidentale.

Il faut donc regarder l'influence acquise au nom du progrès comme un prélude nécessaire, pour la doctrine universelle, à sa destination envers l'ordre, qu'elle peut seule protéger à la fois contre la rétrogradation et l'anarchie. Elle dut obtenir le premier résultat quand elle se trouvait à l'état purement philosophique, tandis qu'elle ne peut réaliser le second office que depuis qu'elle est devenue pleinement religieuse. Ce mode final doit désormais diriger la propagation du positivisme, qu'une suffisante élaboration rend capable de satisfaire notre principal besoin, la reconstruction systématique de l'ordre spirituel, pendant que les gouvernements maintiennent empiriquement l'ordre matériel. Au début de ma construction religieuse, je représentai les serviteurs de l'Humanité comme venant dignement saisir la direction, évidemment vacante, de l'ensemble des affaires terrestres. L'assentiment tacite de tous les partis a, depuis quatre ans, ratifié cette proclamation décisive, ébauchée dans mes opuscules primitifs, et justifiée par l'institution complète de l'unité positive. On doit peu s'étonner que les défenseurs du catholicisme gardent, à cet égard, le respectueux silence que leur inspire l'attitude toujours organique de la nouvelle synthèse. Mais il faut noter que les métaphysiciens, seuls ennemis réels de la religion universelle, n'ont pas protesté contre la proclamation positiviste, même dans leur ignoble attaque de janvier 1855.

Une telle déclaration avait besoin d'être complétée d'après mon récent *Appel aux conservateurs*, où l'attitude actuelle des vrais positivistes se trouve directement fixée, en décomposant leur avénement social en deux phases nécessaires, l'une spirituelle, l'autre temporelle. Leur intervention purement consultative dans l'inauguration de la transition organique doit faciliter leur ascendant décisif au centre de l'Occident, en dissipant toute rivalité politique envers la nouvelle religion. Si, pour régler une existence indivisible, on ne peut méconnaître la nécessité de subordonner les vues de détail aux conceptions d'ensemble, on ne saurait davantage contester le privilège actuel du positivisme quant à l'unité réelle. D'après une telle supériorité, quand les vrais croyants seront au niveau de leur mission, ils auront bientôt obtenu la confiance et le respect des gouvernés et des gouvernants, également dépourvus de véritables principes de conduite. Cette lacune s'est récemment spécifiée en dirigeant l'expédition occidentale vers un démembrement aussi vicieux que celui qu'elle dut empêcher, et par la puérile exhibition destinée à développer les préoccupations matérielles dans un milieu qui souffre de leur prépondérance. Malgré des intentions irréprochables, les deux cas n'ont pu même compenser les déviations politiques ou morales en resserrant les liens occidentaux, puisque ces événements ont aggravé la funeste tendance du centre occidental à préférer le Nord au Midi. Tous les mouvements de notre époque, soit qu'ils émanent des populations ou des gouvernements, font spécialement sentir qu'un tel milieu ne peut éviter les fautes qu'en s'abstenant d'agir, jusqu'à ce que l'interrègne spirituel ait dignement cessé.

Pour développer une discipline qui ne peut rien régler sans tout embrasser, il

faut, depuis que la religion positive est suffisamment instituée, que le sacerdoce de l'Humanité ne se réduise plus à moi seul. Or les nouveaux prêtres ne sauraient obtenir assez d'indépendance et de dignité que d'après leur exclusive consécration à des fonctions qui, d'ailleurs, vont bientôt absorber leur temps et surtout leurs forces. Cette condition exige que l'accroissement du subside positiviste permette au Grand-Prêtre de l'Humanité d'assurer la subsistance de ceux qui, comme moi, se trouvent entièrement dépourvus de fortune personnelle, suivant le cas le plus ordinaire, principalement aujourd'hui.

Tant que le positivisme resta purement philosophique, je pus, sans inconséquence ni dégradation, pourvoir à mon existence matérielle, en exerçant, dans l'économie actuelle, des fonctions secondaires, soit pratiques, soit même théoriques. Cette possibilité cessa quand ma doctrine, irrévocablement devenue religieuse, tendit directement à régler la vie humaine, en instituant un pouvoir apte à discipliner les volontés au lieu d'imposer les actes, suivant le but assigné, dès l'origine, à l'ensemble de ma carrière. Alors tout office pratique m'aurait nécessairement mis en contradiction permanente avec le principe fondamental du régime positif sur la séparation normale des deux puissances. L'opposition, quoique moins sensible, eût été plus profonde, en acceptant, par des fonctions théoriques, une incorporation subalterne au triple pouvoir spirituel, théologique, méthaphysique, et scientifique, auquel nous sommes officiellement soumis, et dont je viens délivrer l'Occident. Sans me dégager d'un tel joug, l'enseignement privé devait y joindre une double dégradation, en m'assujettissant aux caprices individuels pour vendre des services dont j'ai systématiquement proclamé la gratuité normale. On peut ainsi mesurer la justice et la sincérité de ceux qui, vivant au milieu des souscriptions, repoussent mon subside au nom d'une dignité qu'ils ne sauraient comprendre puisqu'ils la confondent avec l'orgueil. Une équivalente appréciation convient au prétexte qui prévaut en France, où, suivant l'habitude nationale, on attend que le gouvernement me fournisse un appui contraire à ma destination, sans que les auteurs de ces vœux concourent à me faire provisoirement vivre.

Mes spoliateurs n'ont donc abouti qu'à me pousser par nécessité, mieux que je ne l'eusse fait par choix, vers le mode d'existence le plus conforme, d'abord à la construction, puis à l'installation de la religion rationnelle et sociale. Dans le même temps, une autre conséquence de ma pauvreté m'a bientôt conduit à compléter mon attitude personnelle en instituant le meilleur mode de publication de mes écrits. Il tend à me dégager, autant que possible, de l'ignoble régime que la vénalité révolutionnaire a graduellement introduit, surtout en France, envers la prétendue propriété littéraire. Pour cela, je me suis trouvé conduit, dès le début de ma construction religieuse, par l'impossibilité d'avoir un éditeur, soit privé, soit public, à renoncer aux profits personnels de mes écrits quelconques, en consacrant leur vente au payement des frais typographiques. Une scrupuleuse pratique a toujours confirmé l'engagement systématique que je pris, à cet égard, en 1850, afin de me rapprocher des mœurs normales autant que me le permet la transition actuelle. C'est ainsi que j'ai graduellement fondé mon crédit typogra-

phique auprès d'un honorable chef (M. Thunot), de manière à surmonter le dernier vœu d'une infâme persécution, qui, n'ayant pu détruire ma personne, espérait, du moins, éteindre ma voix. Bornée d'abord à chaque volume séparément vendu, cette garantie devint bientôt mutuelle entre les divers tomes d'un même ouvrage, et je l'ai finalement rendue réciproque envers mes productions quelconques, y compris celles qui précédèrent cette institution.

Le subside positiviste et le fonds typographique, telles sont les deux bases, profondément connexes, de mon existence normale, à la fois privée et publique. Pour en avoir assez compris l'économie, il faut étendre chacune de ces conditions à l'ensemble de mes dignes auxiliaires permanents. D'après la marche générale des destinées humaines, je dus exceptionnellement réunir deux offices, mal distingués jusqu'ici : l'un, principal mais temporaire, comme fondateur de la religion universelle ; l'autre, accessoire mais continu, comme Grand-Prêtre de l'Humanité. Si j'obtiens la longévité de Fontenelle, ou seulement celle de Hobbes, ou du moins celle de Voltaire, je rendrai cette distinction pleinement sensible, par un long exercice du second office quand j'aurai, dans sept ans, accompli le premier, C'est uniquement envers le second que je puis et dois avoir un successeur, qui se trouvera, j'espère, parmi les dignes théoriciens que je pourrai directement vouer au sacerdoce universel : le premier ne comporte que des adjoints, passagers comme lui, mais actuellement nécessaires.

Quoique ma construction religieuse exige le complément synthétique que je vais commencer, elle est assez développée pour devenir pleinement applicable, dans une situation tellement urgente que, dès le début de mon principal ouvrage, mon travail de fondateur fut quelquefois suspendu par mes fonctions de pontife. Souvent invoquées désormais, ces fonctions ont déjà besoin d'organes spéciaux, qui puissent, sous ma direction, non-seulement enseigner et prêcher, mais principalement consacrer et discipliner, au nom de l'Humanité. Comme fondateur, il me faut aussi des auxiliaires dignement soumis, capables de seconder l'installation spontanée de ma doctrine par des cours et des livres, soit généraux, soit surtout spéciaux, dont je leur indiquerais le but et le plan. De tels apôtres, esthétiques ou théoriques, peuvent beaucoup faciliter la régénération occidentale, sans être pourtant incorporés au sacerdoce positif, faute d'en pouvoir assez remplir les conditions encyclopédiques. Ils représenteront aujourd'hui les pensionnaires propres à l'état normal, avec cette double différence que leur office aura maintenant plus d'importance et leur mérite plus de valeur, leurs lacunes scientifiques étant ordinairement dues à leur situation davantage qu'à leur nature.

C'est ainsi que le subside positiviste et le fonds typographique doivent maintenant m'assurer deux sortes d'auxiliaires permanents, dignement voués à seconder, les uns le fondateur de la religion universelle, les autres le Grand-Prêtre de l'Humanité. Le positivisme ne pouvant pas, avant la fin du siècle actuel, convertir au delà d'un millième des chefs de famille, ce qui lui suffit pour reconstruire l'occidentalité, la corporation régénératrice doit seulement comprendre, dans le même temps, cinquante philosophes, tant apôtres que prêtres. Quelque petit que semble ce nombre, sa proportion à celui des vrais croyants excède le double du

taux normal, comme l'exige maintenant un service plus difficile et moins aidé. Si je vis suffisamment, j'empêcherai que le clergé positif ne dépasse une telle extension, afin que tous ses membres, indirects ou directs, outre les préparations convenables, soient, de cœur, d'esprit, et même de caractère, au niveau de la mission que je leur assigne au nom du Grand-Être. On peut ainsi déterminer le développement que doit acquérir le subside positiviste, jusqu'à ce qu'il se transforme en budget central du sacerdoce universel, quand les gouvernants et les gouvernés seront assez convertis à la vraie religion.

Envers le fonds typographique, il suffit de compléter son institution en étendant à tous les auteurs régénérés la mutualité que j'ai maintenant poussée jusqu'à mes divers écrits. Quoique un tel complément ne dépende pas immédiatement de moi, j'espère bientôt l'établir, d'après les avantages évidents qu'il procurera, dès son début, à la communauté littéraire, où j'apporterai fort au delà de ce que j'en retirerai d'abord. Ainsi dégagés de la librairie et du journalisme, les auteurs positivistes, outre la dignité due à leur renonciation à la vénalité révolutionnaire obtiendront une indépendance actuellement incompatible avec d'ignobles marchés, qui toujours empêchent la vraie police des publications. Puisque le fonds typographique suffit maintenant à sa destination, il doit naturellement continuer d'y suffire à mesure qu'elle s'agrandira ; car les ressources y croîtront suivant une progression nécessairement supérieure à celle des besoins, plus qu'en tout autre cas de vraie réciprocité. Destiné, comme le subside positiviste, à la transition organique, il est autant susceptible de préparer l'état normal, en faisant graduellement surgir, sous forme de livres, le trésor du pontife universel pour toutes les dignes publications.

Je puis ici faire directement sentir, envers ces deux institutions connexes, que le zèle de mon public est maintenant inférieur aux services que pourraient déjà rendre mes vrais auxiliaires, s'ils étaient assez soutenus. L'apostolat, et même le sacerdoce, sont actuellement susceptibles d'une ébauche décisive, puisque j'ai trouvé, pour chaque classe, un fonctionnaire aujourd'hui digne d'être entretenu, sous ma responsabilité, par le subside positiviste. Il m'est également permis d'assurer que plusieurs écrits, déjà projetés d'après mes inspirations, pourraient utilement seconder la régénération occidentale, si leurs auteurs avaient la faculté de les élaborer et publier convenablement. Envers la formation la plus difficile et la plus importante, j'ose annoncer, d'après l'état où je vois mes meilleurs théoriciens, que, dans quelques années, j'y trouverai sept dignes membres du sacerdoce universel, de manière à pouvoir instituer un premier collége positiviste, sauf les vicaires. Un second groupe encyclopédique aurait même pu déjà commencer, si je n'eusse pas perdu récemment, au milieu de sa trentième année, un éminent disciple, dont le talent, plus poétique que philosophique, émanait d'un noble cœur, malgré l'insuffisante énergie de son caractère.

Sous de telles impulsions, j'ai jugé maintenant opportun d'instituer le système d'épreuves philosophiques qui devra toujours garantir, au pontife comme au public, l'aptitude théorique des aspirants au sacerdoce positif, quand leur valeur morale sera suffisamment constatée. Il consiste en sept thèses imprimées, ma-

thématique, astronomique, physique, chimique, biologique, sociologique, et morale, successivement présentées, à des intervalles d'un à trois mois, et publiquement suivies chacune, sept jours après son admission, d'un examen oral sur la science correspondante. Les difficultés propres à la transition actuelle pourront exceptionnellement exiger, pour ne pas écarter d'éminentes natures, surtout morales, que je dispense, sous ma responsabilité, de quelques thèses cosmologiques, sans que je croie pouvoir jamais dispenser des trois thèses extrêmes. J'espère vivre assez pour faire ainsi surgir enfin de véritables philosophes, capables de terminer la progression, de plus en plus révolutionnaire, qui devait, en Occident, séparer, pendant trente siècles, la théocratie initiale et la sociocratie finale. Tant qu'elle resta sacerdotale, la philosophie fut directement appliquée à la destination pratique que son nom rappelle, et dont elle tendit graduellement à s'écarter pendant sa préparation spéculative, nécessairement indisciplinée. Elle doit maintenant reprendre ce grand office, avec une efficacité supérieure, en réglant la vie humaine, dont les lois sont assez appréciables depuis qu'on a suffisamment dévoilé, d'abord celles du Monde, puis celles de l'Humanité, qui dominent toujours l'existence individuelle. Mais un tel office exige des prêtres capables de surmonter le matérialisme théorique, en procurant aux études les plus nobles leur prépondérance normale, à la fois logique et scientifique, dans un milieu préoccupé des spéculations les plus grossières.

Il faut maintenant compléter cette circulaire en indiquant les divers progrès de l'avénement positiviste pendant une année exceptionnelle. Elle est devenue, comme pour moi-même, un temps de recueillement, mais non d'inertie, chez mon public, qui, s'y trouvant privé de l'impulsion annuelle jusqu'alors résultée d'un nouveau tome, a dû pareillement s'occuper d'appréciation et de préparation. Cette suspension a permis de saisir l'ensemble de ma construction religieuse, dont chaque partie avait successivement inspiré des réflexions trop exclusives. Tous les positivistes ont ainsi senti, comme leur chef, la confiance que suscite la plénitude et l'homogénéité d'une doctrine enfin parvenue à présenter, sur toutes les questions essentielles, des solutions décisives, toujours d'accord entre elles. La puissance que comporte une telle supériorité, dans un milieu profondément divisé, devint alors, chez mes meilleurs disciples, pleinement conciliable avec les ménagements qu'exige l'état, anarchique et rétrograde, des Occidentaux. Ainsi se prépare le digne ascendant des âmes d'élite, qui doit bientôt réaliser, épurés et combinés, l'empire universel que Mahomet promit aux vrais croyants, et le règne général que Cromwell annonçait aux saints. Gênée, dans l'antiquité, par l'hérédité sacerdotale et militaire, la domination normale des natures supérieures fut ébauchée sous la chevalerie et la papauté ; le positivisme l'institue, suivant les pressentiments du jésuitisme et du jacobinisme, en liguant et guidant les véritables chefs.

Une telle coalition a réellement commencé quand le subside positiviste a fait assez surgir de dignes dévouements, en leur assignant une destination directe, précise et continue. Au prix de quelques souffrances, j'ai pu, suivant la naïve remarque de ma fille adoptive, mieux juger les âmes destinées à prévaloir, et

même les attirer davantage, que si la position de Buffon, de Cavendish, ou de Lavoisier, m'eût entouré de flatteurs. Sept ans d'épreuves continues m'ont ainsi permis de constater que la religion universelle a déjà rallié des âmes d'élite, dont la fraternité mutuelle et la commune vénération n'exigent, pour obtenir un irrésistible essor, que les contacts résultés d'un même dévouement.

La postérité regardera l'état normal de l'Humanité comme ayant spirituellement commencé pendant l'année qui vient de finir, puisque la religion positive, pleinement instituée l'année précédente, s'est alors appliquée à l'installation politique de la transition finale. Quoique mon *Appel aux conservateurs* n'ait encore profité qu'aux positivistes, quelques adhésions décisives m'ont déjà permis d'espérer qu'il atteindra bientôt ses lecteurs spéciaux, sans attendre que la doctrine régénératrice soit directement invoquée au secours de l'ordre. Il manifeste l'avénement du pouvoir occidental, éclairant les gouvernements nationaux sur la marche propre à surmonter à la fois les rétrogrades et les révolutionnaires, en utilisant chaque parti selon sa nature. J'y réduis l'appréciation directe de la régénération positive à ce fait général, indépendant de toute controverse : « *En rapportant tout à l'Humanité, l'unité devient plus complète et plus stable qu'en s'efforçant de tout rattacher à Dieu.* » Mais il témoigne aussi la vénération que l'ancienne synthèse inspire au philosophe qui pourrait borner sa bibliothèque au poëme de l'*Imitation*, complété par les épopées de Dante et d'Homère, en condensant la progression occidentale dans sa principale représentation. Cet opuscule fait profondément sentir ma constante disposition à respecter le gouvernement, en quelque main qu'il réside, quoique je ne doive jamais cesser de lui conseiller une meilleure conduite, consistant surtout à ne point sortir de sa mission actuelle. Elle se borne à résister sans pousser, jusqu'à ce que la réorganisation spirituelle ait assez rectifié les aspirations subversives et guidé les inspirations organiques.

Ce respect continu pour le pouvoir temporel devient une obligation spéciale chez la puissance spirituelle qui, venant instituer l'occidentalité, doit aujourd'hui se regarder comme implicitement associée à tous les gouvernements occidentaux, et surtout à celui du peuple central. Elle ne peut dignement régler la vie humaine sans offrir, dans sa propre conduite, un type anticipé des mœurs normales au monde profondément troublé qu'elle veut régénérer. Sous un aspect plus spécial, le clergé positif doit aujourd'hui sentir que toute commotion politique entrave la réorganisation religieuse, en faisant toujours prévaloir d'abord l'anarchie, puis la rétrogradation, jusqu'à ce que le retour du calme ait rétabli le cours des préparations suspendues. D'après leurs missions respectives, les deux pouvoirs se trouvent d'ailleurs animés d'une commune antipathie, spontanée ou systématique, envers la classe radicalement subversive où l'on commence sa carrière par s'ériger en juge universel. Avec une entière liberté d'exposition et de discussion, le sacerdoce le plus favorable à l'essor intellectuel aurait bientôt délivré l'Occident d'un fléau que la compression matérielle perpétue et développe depuis quarante ans.

Outre ce pas général et direct vers l'avénement de la saine politique, le positivisme a récemment fait de précieux progrès dans l'application et la propagation

de la vraie religion. Trois mois se sont à peine écoulés depuis que j'ai consacré, pour la première fois, entre deux nobles prolétaires, le chaste préambule par lequel je venais de compléter le mariage positiviste, dont il fournit un caractère aussi décisif et plus fréquent que le veuvage correspondant. Chacun peut ainsi sentir combien le positivisme a déjà touché les deux éléments nécessaires de l'immense milieu sur lequel il doit surtout s'appuyer; quoique le journalisme et la littérature entravent des contacts contraires à leur anarchique influence. Rien ne pourra bientôt empêcher le peuple de sentir que le positivisme assure, mieux que le communisme, le bonheur et la dignité des travailleurs, tout en développant la prépondérance des entrepreneurs. Il sera pareillement impossible de cacher aux femmes l'avénement décisif de la seule religion qui, sans les retirer du sanctuaire domestique, consacre leur juste ascendant et réalise toutes leurs dignes aspirations, tant esthétiques que morales. A mesure que les contacts s'établiront, elles reconnaîtront que le positivisme systématise la double culture du sentiment, de manière à la faire toujours prévaloir, surtout chez le peuple, où résidera le meilleur type féminin. Les prolétaires des deux sexes doivent, de cœur et même d'esprit, mieux sentir que les lettrés la vraie philosophie de l'histoire, en appréciant la transition affective qui, sous le catholicisme et la féodalité, combinés dans la chevalerie, fit pleinement surgir les deux principaux éléments de la sociabilité finale.

En même temps que le positivisme perfectionnait son culte domestique au sein de la métropole universelle, son efficacité religieuse commençait à se manifester parmi les plus anarchiques de tous les Occidentaux. D'après une délégation spéciale, j'ai pu récemment conférer, à travers l'Atlantique, le premier sacrement social à la nouvelle fille qu'un couple régénéré vient de donner à l'Humanité. Grâce au zèle continu d'un éminent apôtre, notre naissante église américaine a déjà pris une attitude décisive, surtout depuis qu'elle s'est enrichie d'un noble prolétaire, au centre des divagations protestantes et de l'agitation mercantile.

Pendant que le positivisme manifestait, sur une échelle restreinte mais décisive, son aptitude normale à régler la vie humaine, tant privée que publique, parmi les deux principaux éléments de l'ordre final, il témoignait aussi sa puissance envers les classes transitoires. Sans m'arrêter à celles qui doivent radicalement s'éteindre, il me suffit ici de considérer la mieux disposée de celles que la régénération occidentale oblige seulement à se transformer en s'élevant. Depuis sa naissance, la systématisation positive a toujours trouvé des sympathies croissantes, d'abord passives, puis actives, parmi les médecins, surtout en France, où leur défaut de discipline collective facilite l'évolution individuelle. Cette affinité s'est surtout développée chez les purs praticiens, mieux susceptibles que les prétendus théoriciens de sentir la nature et les conditions de la synthèse médicale, normalement inséparable de la reconstruction universelle. Il n'appartient qu'à ceux-là d'apprécier assez les perturbations cérébrales et les rapports continus entre le physique et le moral pour reconnaître combien le positivisme ennoblit leur office en rendant l'homme toujours inséparable de la société. Renonçant à des positions académiques ordinairement échues à des fortunes dégradantes, les vrais méde-

cins, surtout français, sont éminemment susceptibles de seconder la régénération occidentale, et même de fournir quelques dignes prêtres de l'Humanité. J'ai vu récemment accomplir la noble transformation d'un officier de marine en médecin positiviste, capable de concourir, avec d'autres déjà surgis, à constituer, en médecine, une école synthétique, que plusieurs dignes préparations tendent à consolider bientôt.

Mon année exceptionnelle a confirmé l'ensemble des progrès du positivisme, en manifestant, dans la vente de mon principal ouvrage, un accroissement propre à rassurer envers le subside protecteur. Le coupable silence de la presse anglaise et française n'a point empêché la *Politique positive* d'acquérir au moins cinq cents lecteurs, d'autant plus sérieux que cette tactique m'a naturellement préservé des attentions frivoles ou malveillantes. Quand leurs convictions seront formées et leurs sympathies suffisamment stimulées, on doit présumer que la moitié d'entre eux concourra régulièrement au subside positiviste, dès lors devenu bientôt capable de soutenir le clergé régénérateur. Une fois que les rénovateurs sont parvenus à ne plus rencontrer que des difficultés pécuniaires, elles ne tardent point à se dissiper, surtout en un temps où la situation universelle fait continuellement ressortir le besoin d'une doctrine et l'aptitude du système surgi. Si mes embarras excitent moins de dévouement que ceux de mes prédécesseurs, dont la vie et la liberté restaient habituellement menacées, ils demandent, chez mes patrons, une moindre abnégation, et comportent, de leur part, un plus vaste concours.

Rassuré par une telle conviction, je vais commencer, avec une parfaite sérénité, le complément de ma carrière intellectuelle, après laquelle je me livrerai, sans écrire, à mon office social, où je dois jusqu'alors me borner à guider le clergé naissant. Ma *Synthèse subjective*, ou *Système universel des conceptions propres à l'état normal de l'Humanité*, va continuer ma *Politique positive*, comme celle-ci prolongea ma *Philosophie positive*, début nécessaire de ma grande trilogie. Si, dans la progression normale que forment ces trois termes d'égale grandeur, quelques sophistes ont nié la continuité du second, j'ose assurer que personne ne contestera celle du troisième. De ses trois éléments nécessaires, théorique, moral et pratique, dont le second aura seul deux tomes, je vais aborder le premier, mon *Système de logique positive*, ou *Traité de philosophie mathématique*, que j'espère publier en octobre. Ce travail sera suivi d'une nouvelle année de repos, essentiellement consacrée à la préparation spéciale de la seconde et principale partie du complément synthétique de ma construction religieuse.

Vu l'approche de cette dernière moitié de ma seconde vie théorique, j'ai dû terminer l'année exceptionnelle par le Testament dont j'ai posé les bases générales à la fin de ma *Politique positive*. Le digne accomplissement d'un tel devoir a retrempé mes forces et consolidé mes espérances, même envers la longévité convenable à ma mission, en perfectionnant mon unité, d'après une meilleure appréciation, privée et publique, de ma subjectivité finale. Quoique je n'aie pu, malgré mes efforts et mes illusions, y remplir la principale destination d'un tel

acte en instituant un successeur qui n'est pas trouvé, j'ai pourtant satisfait à toutes ses autres conditions, comme le prouvera sa publicité définitive. Mes treize exécuteurs testamentaires sont tellement choisis que leurs dignes remontrances me permettront d'y réaliser les principales améliorations que pourrait y susciter un contrôle plus étendu mais moins profond et moins pur. Cette opération me procure une nouvelle attitude ainsi définie : « Habitant une tombe anti- » cipée, je dois désormais tenir aux vivants un langage posthume, qui sera » mieux affranchi des divers préjugés, surtout théoriques, dont nos descendants » se trouveront préservés. » Ayant dû jusqu'ici parler au nom du passé, quoique en aspirant toujours à l'avenir, c'est de l'état futur, irrévocablement déduit de l'ensemble des divers modes antérieures, que je dois maintenant occuper le public occidental, afin de discipliner en consacrant. Sans cesser de vivre avec nos meilleures ancêtres, je vais surtout vivre avec nos descendants, jusqu'à ce que je revive dans eux et par eux, après avoir assez vécu pour eux.

Salut et Fraternité,

AUGUSTE COMTE,
(10, rue Monsieur-le-Prince),
Né le 19 janvier 1798, à Montpellier.

Résumé général des souscriptions pour le subside positiviste en 1855.

54 françaises	3,796 fr.	Minimun,	5 fr.
		Moyenne,	70
		Maximun,	400
18 autres occidentales	2,740 fr.	Minimum,	5 fr.
		Moyenne,	152
		Maximun,	1,087
Plus 3 anonymes	520 fr.		
Total.... 75 souscripteurs	7,056 fr.	Moyenne, =	94

N. B. Fondé le 12 novembre 1848, le subside positiviste fournit 3,000 francs en 1849, 3,300 en 1850, 4,200 en 1851, 5,600 en 1852, 7,400 en 1853, et 7,004 en 1854.

3° Lettre philosophique au fondateur du positivisme.

Paris, le 1er février 1848.

Monsieur,

Je n'ai pas l'honneur d'être connu de vous ; je suis un des plus sincères quoique des plus obscurs admirateurs de votre philosophie ; c'est à ce titre que je prends la liberté de vous adresser ces lignes, et c'est à ce titre que j'ose espérer un favorable accueil de votre part.

J'ai aujourd'hui vingt-deux ans, et il y en a trois qu'un heureux hasard m'a mis entre les mains votre *Cours de philosophie positive*, dans un moment où par la nature de mon esprit et la suite de mes études, je commençais à sentir vivement le besoin de conceptions générales propres à relier les fragments de science dont on compose nos éducations. Je m'essayais parfois à me faire à moi-même une philosophie, sentant instinctivement que les divagations métaphysiques que l'on décore de ce nom ne sont maintenant propres qu'à entraver tout essor vraiment philosophique. Ce fut dans ces dispositions que je commençai la lecture de votre traité. Je n'ai cessé de le méditer depuis, tout en suivant le cours de mes études, et cependant je suis bien loin de me flatter d'avoir tout compris et tout gardé dans une exposition si serrée et si profonde. Je lus d'abord deux fois de suite la philosophie mathématique, et j'en rédigeai un résumé. J'étais ravi d'y découvrir cette vue générale de l'ensemble, ce lumineux enchaînement des parties, si nécessaires pour l'intelligence exacte de la science, et tellement négligées dans l'enseignement ordinaire que le plus souvent, après avoir, pendant de longues années, étudié les *mathématiques*, avoir acquis une certaine habitude de langage algébrique, une certaine connaissance des théories géométriques, on est hors d'état de se rendre compte de ce que c'est proprement que l'algèbre, l'analyse transcendante, et la science mathématique en général. En réfléchissant sur les idées exposées dans votre livre, je me disais que si on me les eût présentées dans l'enseignement, bien des difficultés se seraient aplanies d'elles-mêmes, et qu'il était fort étrange que, en le surchargeant de tant de détails au moins inutiles, on y omît justement ce qui devait le rendre à la fois plus facile et plus solide. Plus tard, je compris, d'après votre appréciation sociologique, que le déplorable esprit de spécialisation dispersive qui domine notre situation mentale actuelle constitue tout à la fois le plus grave obstacle à la régénération spirituelle qui doit sortir de la grande crise métaphysique où nous nous trouvons, et le plus grand défaut des expositions scientifiques conçues dans cet esprit, tandis qu'elles ne devraient jamais être séparées de ces conceptions générales, de ces vues d'ensemble par où commencent et finissent toutes les études vraiment rationnelles.

La lecture successive des diverses parties de votre traité fut pour moi comme une suite de révélations ; elle me montra sous un jour tout nouveau les sciences que j'avais étudiées telles qu'on les enseigne aujourd'hui, c'est-à-dire comme un singulier mélange d'admirables résultats obtenus par les méthodes positives et de vagues notions métaphysiques qui conservent encore une étrange faveur même auprès des meilleurs esprits. En physique, j'étais très sincèrement attaché à la théorie des ondulations de la lumière, et je fus même un peu choqué, au premier abord, de voir que vous en faisiez si bon marché. Il me fallut quelque temps pour me familiariser avec vos explications, et pour reconnaître combien cette conception des éthers imaginaires est radicalement opposée au véritable esprit de la saine philosophie naturelle, qui dédaigne toute vaine enquête sur la cause propre des phénomènes pour ne se préoccuper que du jeu naturel et régulier des agents qui lui donnent naissance.

Tant que je restais dans le domaine de ce qu'on appelle aujourd'hui, par une idée au fond bien irrationnelle selon moi, les sciences exactes (comme s'il y avait des sciences qui, définitivement instituées, puissent être *inexactes*), je ne voyais dans votre élaboration qu'une suite d'explications très lumineuses attestant autant de pénétration générale que de savoir sur les diverses sciences particulières. Je ne compris la portée philosophique de votre travail que lorsque j'arrivai à la science sociale. Alors seulement j'aperçus ce que c'était réellement qu'une philosophie, une conception générale de l'ensemble des choses. Immédiatement je vis quelle était la seule vraie philosophie, et j'ajouterai la seule possible aujourd'hui : celle qui, ne s'appuyant que sur la réalité, ne procédant que par démonstrations, ne s'imposant que par l'évidence, peut seule amener enfin une convergence réelle des esprits, et produire de véritables convictions au milieu de l'effroyable chaos d'opinions et d'idées qu'ont fait naître la chute des anciennes croyances et l'action négative et dissolvante de la métaphysique du dernier siècle. Je vis que votre grande opération philosophique consistait essentiellement dans la complète généralisation du procédé d'investigation propre jusqu'ici aux sciences du monde inorganique et à peine introduit dans le domaine biologique. Par cette opération capitale, la grande division instituée, par Aristote et Platon, entre la philosophie naturelle et la philosophie morale, se trouvait désormais effacée : toute philosophie devenait naturelle ; toute conception des faits reposait sur les propriétés des agents ; au lieu des chimériques influences bouleversant à leur gré l'ordre régulier des phénomènes, il n'y avait plus que des lois immuables et nécessaires qui sont les conditions d'existence des choses, et dont la découverte est l'invariable objet de toutes les spéculations humaines. Voilà comment j'ai cru comprendre votre pensée philosophique, et je répète que cela ne m'a été possible qu'après avoir pris connaissance de la science sociale qui, d'une part, complète le cercle de nos conceptions positives en y faisant enfin entrer les phénomènes les plus compliqués, les plus variables, et aussi les plus importants, et qui, de l'autre part, constitue désormais un point de vue vraiment universel pour l'appréciation de toutes nos idées générales.

Je crois donc très-sincèrement que votre philosophie renferme l'avenir intellec-

tuel des sociétés modernes, de même qu'elle en résume le passé progressif. Je crois qu'elle n'est autre chose que la systématisation de l'ensemble des forces qui concoururent à l'évolution humaine ; et à ce compte, Monsieur, vous n'avez pas inventé la philosophie positive, du moins pas dans le sens de ces faiseurs de systèmes métaphysiques que nous voyons tous les jours se vanter, avec une puérile, et même à leur point de vue bien irrationnelle, affectation, d'avoir créé une philosophie nouvelle. Ils l'ont bien créée, en effet, puisqu'elle n'existe que dans les rêveries de leurs cerveaux, et qu'elle ne durera pas plus qu'eux-mêmes, souvent moins ; car il n'est pas rare de les voir, subitement ralliés à quelque nouveau système, démentir leurs opinions de la veille avec autant d'ardeur qu'ils en mettaient d'abord à les défendre. La philosophie positive n'est l'œuvre d'aucun homme isolé ; tout ce que l'humanité a jamais possédé de penseurs généreux et d'esprits d'élite vint successivement porter des pierres à cet édifice, souvent même sans comprendre la portée de la coopération. A vous, Monsieur, appartient l'insigne honneur d'avoir, avec une pleine conscience, tracé le plan général du monument, en même temps que vous en avez seul posé le couronnement définitif, sans lequel il était impossible d'en pénétrer la pensée. Voilà la justice que vous devra une postérité impartiale, et que vous avez bien raison de ne pas attendre de vos contemporains. Semblable à ces illustres génies qui devancèrent leur siècle, et n'en reçurent que persécution et dédain en retour des vérités qu'ils lui apportaient, vous, Monsieur, vous êtes presque ignoré et entièrement méconnu au milieu d'une société qui prodigue ses bruyants hommages à des médiocrités dont la génération suivante ignorera même les noms. Il y a deux siècles (mais votre entreprise était heureusement impossible alors), on vous eût fait partager le cachot de Galilée : aujourd'hui on affecte de vous infliger un oubli qui ressemble là celui de l'Académie française envers Molière. C'est au point que, quant à moi, je n'ai pu encore rencontrer aucune personne, même parmi des hommes très-instruits, qui eût une connaissance réelle de vos travaux, et qui fût en état de porter sur eux un jugement vraiment sérieux.

Pourtant, ainsi que vous le dites vous-même, les temps sont mûrs pour la régénération spirituelle à laquelle doit présider la philosophie positive. Au milieu des divagations métaphysiques et politiques qui se produisent tous les jours avec tant de bruit, et souvent avec un incontestable éclat, à toutes les tribunes, à toutes les chaires, et par les nombreux organes d'une publicité retentissante, bien des fois je surprends comme un vague sentiment, ordinairement instinctif, et toujours incomplet, des vérités que résume votre doctrine. Rien ne m'a plus frappé, à cet égard, que les paroles suivantes, que j'entendais dernièrement prononcer au Collége de France : « Le vainqueur, dans la grande lutte à laquelle nous » assistons encore, c'est le principe de l'examen : le vaincu, c'est le principe de » l'autorité. Ainsi, le gouvernement de l'avenir sera le gouvernement de l'examen. » Je ne dis pas que ce soit un bien, j'en reconnais tous les inconvénients, mais » je le constate comme un fait. » Etrange gouvernement que celui de l'examen ! Etrange situation mentale et sociale que celle qui consiste à examiner toujours, puis à examiner encore ! Etranges esprits qui se décernent mutuellement, ou qui

s'attribuent eux-mêmes, les titres de philosophes ou de penseurs, et dont la vue est à ce point bornée qu'ils prennent le moyen pour le but, qu'ils regardent comme le résultat de la crise ce qui n'est que la crise elle-même, qu'ils méconnaissent enfin l'idée radicale de l'évolution humaine et du progrès nécessaire d'un ordre de choses nettement caractérisé sur celui qui l'a précédé.

Monsieur, j'aurais pu me faire recommander à vous par quelques personnes qui ont l'honneur de vous connaître : j'ai préféré me présenter directement, sans autre recommandation que mon admiration et ma sympathie philosophiques. Je me persuade qu'une supériorité comme la vôtre doit avoir quelque chose de cette indulgence et de cette libéralité qui conviennent si bien aux grandes richesses : c'est ce qui m'enhardit dans ma démarche.

S'il vous plaît de répondre à mon vœu, vous aurez la bonté de me faire savoir, par quelques lignes, le jour et l'heure où vous voudriez bien me faire l'honneur de me recevoir.

Veuillez, Monsieur, agréer l'assurance de ma profonde considération, et me croire

Votre sympathique et dévoué admirateur,

Charles JUNDZILL,
61, rue d'Amsterdam, Paris.

4° Ébauche poétique sur le fondateur du positivisme.

Paris, le jeudi 22 Descartes 64 (28 octobre 1852).

Très-honoré maître,

Je me suis porté, depuis peu de temps, à tenter quelques essais poétiques, et je prends la liberté de vous adresser les strophes suivantes. Je suis trop convaincu qu'elles ne peuvent avoir de mérite à vos yeux que par le sentiment qui les a dictées, pour réclamer une indulgence spéciale en faveur des imperfections de fond et de forme que j'y reconnais moi-même ou de celles qui m'échappent. Assurément, vous serez loué plus dignement. La poésie, à laquelle, comme je le sens maintenant profondément, le positivisme ouvre une si riche carrière, aura pour vous de justes hommages. Celui que je me permets de vous offrir aujourd'hui ne se recommande que par sa spontanéité. A l'exception de la première, qui est, je crois, la plus faible, ces strophes ont été composées ces deux derniers jours dans les intervalles de loisir que me laissaient mes

occupations, et elles n'ont subi presqu'aucune correction. Si vous jugez que cela en vaille la peine, je pourrai vous soumettre différents autres essais, où l'influence positiviste est, je crois, reconnaissable, et qui, à ce titre, peuvent témoigner comme symptôme bien plutôt que comme résultat.

Veuillez, très-honoré maître, agréer l'expression de mon respectueux dévouement,

Charles Jundzill,
20, rue de Madame.

A AUGUSTE COMTE.

Quand de toutes parts le sol tremble,
Sous les débris amoncelés,
Quand le jour fuit, et que tout semble
Périr sous des coups redoublés ;
Effrayé notre esprit s'arrête,
Et, reportant sa vue inquiète
Sur ce monde près de finir,
Il cherche, en ce vaste naufrage,
Quelle espérance après l'orage,
Reste encore pour l'avenir.

Ainsi notre siècle en délire
S'avançait au gré du hasard,
Comme on voit un léger navire
Battu des vents dès le départ.
Issu du mouvement immense
Qui dévorait toute croyance
Et menaçait toute vertu,
Il brisait sa dernière idole,
Et, dans le vide, sans boussole,
Il s'élançait vers l'inconnu.

Mais, du milieu de la ruine,
Doit naître un symbole nouveau ;
Une clarté nous illumine
Qui nous promet un jour plus beau.
Arrière les sombres présages,
Dont on épouvantait nos âges ;
L'Humanité ne peut périr :
En vain l'on croit qu'elle chancelle,
Erreur ! elle se renouvelle,
Pour un glorieux avenir.

A toi, Comte, l'honneur insigne,
D'avoir, au sein des jours obscurs,
Deviné la source plus digne
De la foi des âges futurs.
En vain autour de toi le monde,
Égaré dans la nuit profonde,
De l'erreur écoutait la voix;
Déjà ton pénétrant génie
D'une plus durable harmonie
Traçait les immuables lois.

Et, tandis que partout le doute
Ébranle les convictions,
Du temps interrogeant la route
Tu saisis ses mutations.
Et, dans le flot toujours mobile
Que déroule l'essor fragile
De toutes les opinions,
Tu sais voir d'une vue sûre
Les éléments et la mesure
De nouvelles constructions.

La science reste maîtresse
Dans le naufrage de la foi.
Elle grandit quand tout s'abaisse
Par une inexorable loi.
Elle fournit le sol propice
Et les bases de l'édifice
Où règne la vraie union :
Par elle ton œuvre commence
Et tu couronnes la science
Pour en tirer la religion.

Elle avait exploré le monde
Et surpris ses vastes secrets ;
Elle savait la loi féconde
Que suit la vie en ses progrès.
Mais, dans ce merveilleux système,
Manquait la science suprême
Qui marquerait le but certain :
Toujours revenait le problème
Que l'Humanité d'elle-même
Dresse devant l'esprit humain.

De cette sublime existence
Il fallait lire les secrets :

Il fallait de cet être immense
Embrasser les nombreux aspects.
Il fallait, et ce fut ta gloire,
Deviner le plan de l'histoire;
Pour nous permettre de saisir
Comment, le temps pressant sa course,
Ainsi qu'un fleuve dès sa source,
Le passé produit l'avenir.

Alors la science achevée
Peut embrasser tous les rapports.
Sur cette base, la pensée
Peut reposer tous ses efforts.
Et désormais pour nous le monde
Dans son immensité profonde,
Se manifeste à nos regards
Comme une vaste économie
Dont la suffisante harmonie
Prévient les capricieux hasards.

L'Humanité devient le centre
De toutes spéculations :
C'est vers elle que se concentre
Le cours de nos affections.
C'est l'idéal toujours propice
Que pressentait l'essor novice
De ses peuples encor enfants.
C'est elle que tout homme adore,
Et c'est son règne qui doit clore
Les orages de notre temps.

Tel était ton vaste problème :
Tu fus égal à ce destin.
COMTE, ton ascendant suprême
A du doute marqué la fin.
Que le vulgaire de nos âges,
Égarant au loin ses hommages,
Te refuse ses vains respects :
Les siècles où tu as su lire
Seront désormais ton empire
Et ton nom vivra pour jamais.

Charles JUNDZILL.

Paris, le 22 Descartes 64.

5° Déclaration caractéristique au fondateur du positivisme.

Philadelphia, 23 June 1851.

DEAR M. COMTE,

When I saw you in Paris, a few weeks since, I mentioned to you my intention of sending you, yearly, the sum of five hundred francs. I have the pleasure to remit to you, inclosed in this letter, a bill of exchange upon MM. de Rothschild and brothers in Paris, for three hundred and seventy-five francs; which together with one hundred and twenty-five francs delivered to you in Paris, makes the sum of five hundred francs for the present year.

I pray you accept this small subsidy, as a slight tribute of acknowledgement for the advantages derived from the perusal of the *Cours de philosophie positive*.

In establishing the law of the three methods of philosophizing, and the law of the hierarchy of the sciences, and in defining the separation between the temporal and spiritual powers, I think you have made more valuable contributions to truth than any one in this age. I desire to recognize the obligation that is due to you, though it is not in my power to discharge it.

I regret that my engagements at the present moment prevent my writing you a longer letter, and offering you some remarks upon the publications you were good enough to give me when I saw you. I shall take an early opportunity to express some opinions to you upon the application of the Positive Philosophy to the present crisis in France.

In the meantime, if you have no better employment of your leisure, I should be happy to hear from you upon some of the topics which formed the subjects of our conversations, especially the religious aspects of the new philosophy.

I beg you, my dear M. Comte, to receive the assurance of my highest respect, and most friendly regard.

H. B. WALLACE.

FIN DE LA PRÉFACE.

DÉDICACE.

A LA VÉNÉRABLE MÉMOIRE

DE MON MEILLEUR MAÎTRE MATHÉMATIQUE,

DANIEL ENCONTRE,

Né, dans l'année 1762, à Nîmes,

Mort, le 16 septembre 1818, à Montpellier;

PROFESSEUR DE DOGME ET DOYEN A LA FACULTÉ DE THÉOLOGIE PROTESTANTE DE MONTAUBAN.

Paris, le dimanche 6 Shakespeare 68 (14 septembre 1856).

MON VÉNÉRÉ MAÎTRE,

Le développement spontané de l'anarchie intellectuelle et morale a tellement altéré le culte ordinaire des meilleurs souvenirs, tant privés que publics, que j'ai, pendant plus d'un an, fait de vaines démarches pour obtenir les simples renseignements personnels qui commencent cette dédicace. Je les avais pourtant demandés à la ville que vous avez longtemps servie, et dans laquelle vous fûtes généralement honoré. Si le zèle re-

ligieux n'eût pas été plus actif que la gratitude civique et les sentiments domestiques, je manquerais des documents indispensables à la précision de mon tardif hommage.

C'est à vous que je dois normalement consacrer le dernier de mes volumes philosophiques qui soit spécialement relatif à la science fondamentale, dont vos éminentes leçons m'ouvrirent l'accès décisif, pendant les années 1812, 1813, et 1814, au Lycée de Montpellier. Vous avez seulement été mon professeur, parce que la mort m'a fatalement privé de votre intimité mentale et morale longtemps avant que je l'eusse assez méritée. Mais la Postérité me permettra de vous qualifier de maître, puisque la tendance philosophique de votre enseignement scientifique fit spontanément surgir le premier éveil de ma vocation intellectuelle et même sociale.

Vu la culture pleinement encyclopédique que vous aviez librement procurée à votre esprit, également apte à goûter l'art et la science, vos leçons mathématiques eurent une puissance que vos moindres élèves n'ont jamais oubliée. J'ose aujourd'hui proclamer, d'après une expérience décisive, que vous fûtes, à votre insu, le premier professeur de votre temps, quoique votre noble modestie vous ait toujours laissé sur un théâtre trop obscur. Quand je vous quittai, je vins directement recevoir, à Paris, dans une fameuse école, avant qu'elle fût en décadence, les dernières leçons du plus extrême représentant de l'évolution mathématique. Malgré l'attrait qu'elles m'offrirent et le souvenir qu'elles m'ont toujours laissé, l'insuffisance philosophique d'un esprit plus fin que grand ne me permet point de les élever au niveau des vôtres, qui seules ont réellement affecté l'ensemble de ma carrière. Si l'antériorité de celles-ci dut naturellement augmenter leur prépondérance, toutes les comparaisons que j'ai souvent faites, même envers d'autres sciences, confirment que la principale source de votre efficacité didac-

tique consistait dans vos habitudes normalement encyclopédiques.

Quoique j'aie dignement apprécié les leçons du grand biologiste auquel je dédiai mon traité fondamental, elles ne m'ont jamais dissimulé la supériorité philosophique de votre enseignement. Leur principal attrait résultait, pour moi, de ce que j'y voyais, non un but d'exposition, mais un effort de construction, envers la théorie générale de l'organisme et de la vie. Vos leçons concernant un domaine essentiellement épuisé, j'y pouvais directement sentir le mérite logique, indépendamment de l'intérêt scientifique.

Malgré la diversité des carrières et des résultats, la conformité de nature et de culture m'a toujours conduit à vous rapprocher du principal géomètre du dix-neuvième siècle, d'après la noble intimité dont il m'honora pendant ses dernières années. Sans avoir, comme vous, professé les belles-lettres avant d'enseigner les sciences, il savait profondément goûter la poésie et le plus affectueux des arts spéciaux : l'aménité de ses mœurs et l'élévation de ses sentiments confirmaient, à mes yeux, une telle ressemblance. Quoiqu'il eût plus développé le talent théorique que l'aptitude didactique, sa disposition encyclopédique eût toujours rendu ses leçons pleinement comparables aux vôtres, si sa carrière avait spontanément suscité des études plus complètes et mieux subordonné l'analyse à la synthèse.

D'après l'heureuse universalité de votre culture, je puis aussi rapprocher du vôtre le souvenir du plus grand penseur que j'aie personnellement connu. Malgré sa juste immortalité, comparée à votre obscurité provisoire, l'éminent fondateur de la philosophie pathologique vous fut surtout supérieur par l'admirable énergie qui le rendit complétement apte à sa vocation normale. Si vous aviez, à temps, osé prendre cette direction, vous l'auriez peut-être devancé dans son incomparable tentative

pour rattacher la théorie de la maladie à celle de la santé.

Tous les noms qui précèdent sont irrévocablement incorporés au calendrier occidental, au moins à titre d'adjoints. Je dois encore vous rapprocher d'un cinquième contemporain qui, comme vous, restera toujours privé d'un tel honneur, faute d'avoir su recevoir ou prendre une suffisante destination. Plus qu'aucun autre théoricien que j'aie personnellement connu, ce noble esprit avait dignement apprécié la connexité du milieu de la philosophie naturelle avec chacune de ses extrémités. Si sa culture eût été, comme la vôtre, complètement encyclopédique, ou si vous aviez eu sa situation, la position de la science préparatoire entre la science fondamentale et la science finale serait mieux ébauchée, d'après une meilleure institution des études physico-chimiques.

A ces éminents souvenirs, votre mémoire joint l'incomparable filiation que j'ai toujours proclamée envers le vrai philosophe qui, quoique fatalement ravi, par la tempête révolutionnaire, quelques années avant ma naissance, fut réellement mon père spirituel. Seul lien direct avec l'ensemble de mes prédécesseurs normaux, il subordonna, comme vous et moi, la culture encyclopédique à l'initiation mathématique. Vous auriez peut-être tenté, non moins que lui, de fonder la politique sur l'histoire, si vous aviez autant subi l'impulsion sociale, ou si l'avortement de son propre effort ne vous eût assez indiqué la précocité d'une telle construction.

La relation spéciale entre mon meilleur initiateur et mon précurseur immédiat achève de caractériser l'aptitude spontanément résultée de votre comparaison aux cinq éminents théoriciens qui surent, à leur manière, sentir et seconder ma mission naissante. Un tel résumé doit ici suffire pour que la Postérité reconnaisse combien j'apprécie votre valeur intellectuelle. Sans que ces sept noms puissent jamais devenir également illustres,

j'espère qu'ils seront pareillement liés à la gratitude que ma carrière aura finalement méritée.

Je dois maintenant compléter cette indication en l'étendant à votre valeur morale, autant que d'insuffisants contacts m'ont permis de constater combien était fondée l'estime universelle que ma ville natale accordait autant à vos vertus, privées et publiques, qu'à vos divers talents. Une modestie sincèrement poussée jusqu'à l'humilité, dans un siècle spontanément dominé par l'orgueil et la vanité, suffirait à tout vrai connaisseur pour sentir que votre cœur était pleinement digne de votre esprit. Il me sera toujours impossible d'oublier que, pendant votre avant-dernière excursion à Paris, vous n'osâtes jamais demander, au plus philosophe des grands géomètres, une entrevue personnelle, que sa noble nature vous eût dignement accordée. La candeur avec laquelle vous exprimiez vos touchants regrets privés, quand, quelques mois après, survint une telle perte publique, fit une profonde impression sur le jeune auditoire, heureusement concentré, que vos manières disposaient à vous ériger davantage en père qu'en maître. Pourtant, je devais alors ignorer que, parmi les hommes dont l'incomparable géomètre s'entourait, on pouvait à peine en citer trois réellement capables de vous surpasser aux yeux de celui qui fut toujours apte à juger le vrai mérite indépendamment des résultats effectifs.

Un touchant indice de la pleine harmonie instituée chez vous entre le cœur et l'esprit, émana de votre admirable sollicitude philosophique envers la digne fille qui, par sa mort prématurée, accéléra la vôtre. Surmontant l'empirisme habituel, vous aviez spontanément reconnu que les deux sexes exigent et comportent une éducation pareillement encyclopédique, où la base mathématique est également nécessaire, sauf la diversité de ses développements. Ce motif suffirait pour caractériser vos titres spéciaux à la dédicace du traité qui systématise une telle aspi-

ration, et la rend directement réalisable envers toutes les classes de la société normale. Quoique tout l'enseignement mathématique s'y condense en cent-vingt leçons, j'y fais assez sentir que ce nombre peut régulièrement diminuer de moitié pour le sexe que la sympathie dispose le mieux à la synthèse. Vous seriez plus charmé que surpris du double résultat ainsi prescrit par le plan général de l'éducation encyclopédique sur laquelle mon principal ouvrage a directement fondé l'ensemble de la régénération finale.

Bornée aux indications précédentes, mon appréciation serait peut-être attribuée aux illusions de la reconnaissance, quoiqu'elles doivent, après tant d'années, se trouver pleinement dissipées. Il faut donc signaler à la Postérité le concours spécial d'influences qui vous priva de toute active coopération personnelle au mouvement intellectuel et social de votre temps. Malgré l'extrême rareté des hommes vraiment éminents, ils sont plus multipliés que ne l'annoncent les résultats, parce que la plupart ne peuvent assez surgir, surtout quand l'anarchie spirituelle augmente la difficulté naturelle de discerner et d'honorer le mérite réel.

Cette discordance entre les produits et les aptitudes fut, en partie, déterminée par l'étendue de votre esprit et sa culture pleinement encyclopédique, combinées avec le caractère profondément organique de votre nature morale. Vous ne pouviez assez méconnaître la tendance directement anarchique du grand ébranlement politique pour y prendre une part active, qui devait peu convenir aux âmes essentiellement philosophiques. La construction de la mécanique céleste ayant irrévocablement terminé l'évolution mathématique, vous ne pouviez vouer votre vie à la culture d'un domaine radicalement épuisé : vos habitudes encyclopédiques vous préservaient des illusions relatives à son prolongement. Toutefois, l'ébauche décisive de la philo-

sophie biologique, sous ses divers aspects statiques et dynamiques, aurait pu vous offrir une carrière où votre nom s'associerait aux grands esprits qu'elle a dignement illustrés. Même votre office mathématique semblait vous conduire à deux compositions didactiques par lesquelles, outre l'utilité directe, vous auriez heureusement préparé la systématisation finale de la science fondamentale. En consacrant sa jeunesse à la régénération provisoire d'un tel enseignement, le principal constructeur de la mécanique céleste n'avait pas abordé la géométrie générale; sa digne exposition écrite vous appartenait, d'après la supériorité de votre exposition orale. A ce fondement nécessaire de la philosophie mathématique, vous deviez naturellement joindre une équivalente élaboration envers le calcul infinitésimal qui le complète, et dont l'étude est autant défectueuse.

Il serait donc impossible d'attribuer l'insuffisance de votre développement au manque d'une destination vraiment adaptée à votre nature et conforme à votre situation. On peut davantage le rapporter à l'imparfaite énergie qui vous fut commune avec l'éminent géomètre auquel je dédiai mon traité fondamental. Toutefois, son propre exemple prouve que, chez les âmes autant aimantes qu'intelligentes, cette lacune ne suscite pas l'avortement, à moins que la situation personnelle n'exige de grands efforts habituels. Quelque aggravée que soit une telle influence d'après le défaut actuel de convictions fixes et communes, il faut donc chercher ailleurs la principale explication de ce phénomène. Je la trouve dans l'ensemble de la pression exercée sur vous, sous l'impulsion paternelle, par le protestantisme français, qui, depuis trois siècles, n'a jamais produit un éminent penseur, quoique de nobles germes aient dû souvent surgir chez une classe aussi cultivée que nombreuse.

Nulle grande vocation intellectuelle n'étant vraiment déve-

loppable sans une suffisante destination sociale, une telle anomalie dut jusqu'ici résulter de l'isolement toujours propre à vos coreligionnaires au sein du peuple central, où jamais ils ne formèrent qu'une vaste coterie. Chez les populations que le protestantisme, épiscopal ou presbytérien, pût officiellement dominer, la condition fondamentale fut assez remplie pour faire dignement surgir de puissantes intelligences, tant poétiques que philosophiques. Mais, parmi nous, il ne put jamais s'incorporer au mouvement national, soit mental, soit social, qui fut toujours dirigé, surtout dans la métropole, par l'ensemble des antécédents, spirituels et temporels, graduellement émanés du moyen âge. De là résulta la position exceptionnelle des protestants français, dont l'attitude politiquement passive se trouvait naturellement aggravée d'après leurs inclinations aristocratiques, directement contraires aux tendances nationales. Toutefois, une telle situation devait collectivement compenser leur consécration individuelle de la confusion radicale des deux pouvoirs sociaux. Poussés à concilier l'émancipation et la discipline, sans avoir assez réalisé ni l'une ni l'autre, ils ne purent davantage accueillir notre ébranlement politique que le mouvement philosophique qui le suscita, parce que tous deux semblaient uniquement négatifs. Laissant ce double essor aux catholiques affranchis, ils attendirent la doctrine capable de subordonner le progrès à l'ordre, et concentrèrent leur sollicitude sociale sur le maintien difficile de l'équilibre instable qu'ils avaient péniblement établi dans leur propre sein.

Votre tendresse devait naturellement repousser la sécheresse du protestantisme, qui fit nécessairement rétrograder vers Dieu l'adoration que, depuis le siècle des croisades, les Occidentaux avaient de plus en plus transférée à la suave devancière spontanée de l'Humanité. Une intelligence comme la vôtre ne pouvait radicalement méconnaître ni l'indivisibitité normale du

catholicisme, ni l'inconsistance théologique du protestantisme, rejettant les conséquences au nom du principe. En même temps, votre raison, éminemment pratique, dut bientôt sentir l'insuffisance sociale d'une doctrine aspirant à perpétuer le régime surnaturel après avoir systématiquement détruit ses institutions nécessaires. Néanmoins, faute d'une meilleure solution, un zèle vraiment religieux vous fit principalement vouer votre vie à préserver vos frères, surtout Français, du déisme et du scepticisme, en arrêtant la maladie occidentale à son premier degré. Des âmes aussi sympathiques que synthétiques doivent naturellement tendre, d'après un tel office, vers une pleine adoption personnelle des croyances habituellement appliquées à leur mission sociale. C'est ainsi que votre âme, si propre à la positivité complète, qui ne pouvait encore surgir, dut sincèrement persister dans l'état théologico-métaphysique, où la pression paternelle ne vous aurait pas retenu, parce qu'elle était contraire aux exemples autant qu'aux principes protestants. Telle fut la principale source de la sainte obscurité volontaire où vous avez essentiellement vécu, sauf divers opuscules éphémères, qui ne peuvent assez indiquer votre supériorité mentale et morale.

Malgré l'intime satisfaction habituellement résultée de cette noble restriction, et quoique les affections domestiques vous aient autant entouré que l'estime civique, je ne doute pas que, comme chez tant d'autres natures éminentes, votre mort prématurée ne soit surtout due à l'insuffisance d'essor. L'aveugle matérialisme, qui domine encore les explications physiologiques et pathologiques, fait habituellement méconnaître l'influence prépondérante que le développement ou l'altération de l'unité cérébrale exerce sur la santé corporelle. C'est pourtant du cerveau que la longévité doit essentiellement dépendre, surtout chez les âmes d'élite, où les perturbations du corps sont ordinairement réparables d'après une suffisante innervation, si

l'essor mental et moral devient assez conforme à la constitution personnelle. Une telle harmonie peut rarement exister quand l'anarchie spirituelle ne permet un plein développement qu'aux natures radicalement vulgaires, de cœur et d'esprit, dont l'unique valeur concerne le caractère, alors soumis à l'égoïsme, faute des conditions qui seules l'appliquent à l'altruisme. Voilà comment je suis normalement conduit à penser que le sentiment continu d'une supériorité comprimée et méconnue dut notablement abréger votre vie, après vous avoir habituellement interdit le vrai bonheur humain, toujours fondé sur la proportion de la destination à l'aptitude.

Jamais vous n'oubliâtes que, depuis vingt siècles, l'Occident cherche la religion universelle, sans pouvoir davantage y renoncer que l'établir. L'avortement de la solution catholique, d'après le conflit islamique, vous empêchait d'attendre une telle issue des divers sectes graduellement résultées de la dissolution, d'abord spontanée, puis systématique, du monothéisme occidental. Profondément imbue de positivité rationnelle, votre âme devait instinctivement pressentir que l'universalité religieuse pourrait seulement résulter de l'extension graduelle du véritable esprit scientifique à tous les domaines encyclopédiques. Il s'éleva, sous vos yeux, de la nature morte à la nature vivante, dont il osa même ébaucher l'appréciation affective et spéculative en franchissant le domaine social. Malgré l'insuffisance d'un tel essor, une intelligence comme la vôtre y dut spontanément sentir l'approche de la solution normale, d'abord philosophique, puis religieuse, que l'ensemble des destinées humaines réservait à votre principal élève.

Si vous aviez autant vécu que celui de mes trois derniers précurseurs qui me lie au grand rénovateur moderne, vous pourriez aujourd'hui goûter la satisfaction, au moins secrète, d'avoir dignement secondé le premier éveil d'une telle voca-

tion. La juste prépondérance que vous avez toujours accordée au cœur sur l'esprit vous ferait saintement accueillir la doctrine qui consacre l'intelligence au service continu de la sociabilité. Reconnaissant sa participation personnelle, quoique indirecte, à la solution finale, une âme, qui se contenta des moindres offices religieux, cesserait de regretter que la date de votre naissance ait interdit votre concours direct à l'œuvre la mieux adaptée à votre nature mentale et morale. Une juste crainte de l'anarchie ayant seule arrêté votre émancipation théologique, vous accueilleriez la véritable unité, pleinement dégagée des croyances locales et temporaires, d'après la construction religieuse qui sert de base à la synthèse dont je vous dédie la première partie. Attribuant au meilleur des mots le sens normalement conforme à son institution, vous n'hésiteriez pas à me féliciter d'avoir systématiquement résumé la vraie philosophie de l'histoire dans cet aphorisme fondamental : *L'homme devient de plus en plus religieux.*

Pendant les luttes intimes et continues qui durent spontanément abréger votre vie, vous avez probablement espéré que, parmi vos nombreux élèves, quelqu'un pourrait un jour obtenir assez d'ascendant pour faire dignement apprécier une supériorité comprimée et méconnue La distinction dont vous honoriez mon adolescence me permet de conjecturer que vous aviez peut-être attendu cet office du plein essor de ma maturité. Je sens, du moins, en terminant un hommage irrévocablement motivé, que la meilleure récompense de mes services consiste dans le pouvoir qu'ils me procurent d'incorporer à mon nom toutes les individualités qui s'y trouvent dignement liées.

AUGUSTE COMTE.

FIN DE LA DÉDICACE.

ERRATA.

Introduction, page 16, ligne 28; au mot *merveilleuse* il faut substituer *meilleure*.

Chapitre premier, page 136, avant-dernière ligne; après le mot *groupement* il faut ajouter *inverse*.

SYSTÈME

DE

LOGIQUE POSITIVE

OU

TRAITÉ DE PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

INTRODUCTION.

Subordonner le progrès à l'ordre, l'analyse à la synthèse, et l'égoïsme à l'altruisme ; tels sont les trois énoncés, pratique, théorique, et moral, du problème humain, dont la solution doit constituer une unité complète et stable. Respectivement propres aux trois éléments de notre nature, ces trois modes distincts de poser une même question sont non-seulement connexes mais équivalents, vu la dépendance mutuelle entre l'activité, l'intelligence, et le sentiment. Malgré leur coïncidence nécessaire, le dernier énoncé surpasse les deux autres, comme étant seul relatif à la source directe de la commune solution. Car, l'ordre suppose l'amour, et la synthèse ne peut résulter que de la sympathie : l'unité théorique et l'unité pratique sont donc impossibles sans l'unité morale ; ainsi la religion est aussi supérieure à la philosophie qu'à la politique. Le problème humain

peut finalement se réduire à constituer l'harmonie affective, en développant l'altruisme et comprimant l'égoïsme : dès lors le perfectionnement se subordonne à la conservation, et l'esprit de détail au génie d'ensemble.

Quoique mon principal ouvrage ait irrévocablement institué cette manière, seule vraiment religieuse, de concevoir toutes les questions réelles, il n'a pu suffisamment élaborer les solutions correspondantes. En le terminant, j'ai séparément caractérisé chacun des trois traités qui doivent le compléter pendant la dernière moitié de ma seconde carrière. Ma construction finale doit ici commencer en manifestant l'intime connexité des trois compositions ainsi promises pour 1856, 1859, et 1861. Les deux tomes de la principale seront spécialement consacrés à l'harmonie morale, tandis que le volume précédent et le volume suivant doivent respectivement développer la prépondérance normale du sentiment sur l'intelligence et l'activité. Ce que la fin de ma *Politique positive* annonça, pour plus de netteté, comme trois traités séparés va donc former les trois parties, distinctes mais connexes, d'un même ouvrage, qui deviendra le complément synthétique de ma construction religieuse.

Dans cette *Synthèse subjective*, je dois tout coordonner par le principe de l'Humanité, que ma *Politique* tira de ma *Philosophie* ; l'état normal de la nature humaine s'y trouvera directement caractérisé sous chaque aspect fondamental. Mon principal ouvrage ayant irrévocablement déterminé l'avenir d'après l'ensemble du passé, je puis maintenant développer assez ce tableau pour constituer le type nécessaire de la régénération universelle. Ainsi, ma *Synthèse* résulte de ma *Politique*, comme celle-ci de ma *Philosophie* ; de manière à compléter la grande trilogie qui doit diriger la réorganisation spirituelle de l'Occident. La doctrine régénératrice, d'abord philosophique, puis religieuse, étant suffisamment établie, il

faut directement exposer l'ensemble des conceptions propres à l'état normal de l'Humanité. Sans un tel complément, le sacerdoce universel ne pourrait assez guider les occidentaux vers l'avenir déduit du passé, pour terminer une révolution qui, plus intellectuelle que sociale, exige l'entière rénovation de notre entendement. En formulant les principales pensées de nos descendants régénérés, on institue le seul type capable de surmonter les préjugés et les sophismes de nos contemporains anarchiques et rétrogades. Je dois donc accomplir cette opération comme le terme décisif de la mission assignée à l'ensemble de ma carrière par mes opuscules primitifs, où j'avais directement en vue la reconstruction positive du pouvoir spirituel.

Tous les esprits qui se sont assez approprié ma philosophie et ma politique pourront comprendre et goûter une telle synthèse. Elle n'offrirait aux autres que des conceptions qui leur sembleraient idéales, parce qu'ils n'en auraient pas d'abord apprécié les bases réelles. Mais, quoique mon dernier ouvrage doive être moins lu que les deux précédents, il produira, sur le public d'élite, une impression plus décisive. Les âmes destinées à conduire le monde se sentiront ainsi retrempées, comme la mienne, en vivant avec nos descendants, au milieu desquels revivent nécessairement nos meilleurs ancêtres. Cet intime commerce avec l'avenir déduit du passé doit procurer aux régénérateurs un irrésistible ascendant sur un présent que l'anarchie et la rétrogadation isolent de sa source et de sa destination. Voilà comment les âmes d'élite pourront dignement acquérir une confiance vraiment inébranlable, qui, quand elles seront assez liguées, les fera bientôt prévaloir dans un milieu que son incohérence et sa dégradation rendent incapable d'une résistance active. Pour obtenir un tel empire, il faut assez apprécier la force et la réalité du tableau général des pensées futures, en

sentant, de cœur et d'esprit, sa liaison continue avec l'ensemble des évolutions antérieures.

Malgré qu'une telle synthèse ne puisse directement s'adresser qu'à l'intelligence, elle embrasse aussi le sentiment, et même l'activité, puisqu'elle expose les conceptions qui s'y rapportent. La seconde et principale partie est spécialement consacrée à la prépondérance normale du cœur, dont elle développe d'abord l'essor naturel, puis la culture artificielle. Les pensées correspondantes y sont systématiquement représentées comme supérieures à toutes les autres notions, théoriques ou pratiques. Dans ses deux parties extrêmes, la synthèse finale ne règle l'intelligence ou l'activité que d'après leur digne subordination au sentiment. Il ne pourra mieux prévaloir que par les tableaux purement poétiques dont l'élaboration ne saurait m'appartenir, quoique j'en puisse concevoir la nature et prévoir l'avénement.

Envers l'avenir qu'elle caractérise, cette synthèse est destinée à guider l'ensemble de l'éducation universelle, conformément aux indications finales de mon principal ouvrage. Pour qu'elle puisse directement remplir cet office, il suffira d'y combler, en temps opportun, les lacunes générales que j'y dois maintenant laisser. Dans sa dernière partie, l'encyclopédie concréte ou pratique se trouvera suffisamment caractérisée. Mais l'encyclopédie abstraite ou théorique ne saurait être assez instituée par les deux autres, qui seront seulement relatives à ses deux termes extrêmes. Toutefois, la science fondamentale et la science finale s'y trouvant pleinement constituées, mes successeurs pourront aisément étendre la systématisation jusqu'aux sciences intermédiaires, où le couple physico-chimique devra seul exiger de grands travaux.

Ces lacunes provisoires ne sauraient empêcher ma construction finale d'exercer, sur le présent, sa réaction nécessaire, en disciplinant, d'après l'avenir, les forces surgies du passé. L'a-

narchie occidentale concerne surtout l'intelligence, dont le désordre constitue la principale source des altérations du sentiment et des déviations de l'activité. Ma *Synthèse subjective* est donc en harmonie spéciale avec les besoins essentiels de la situation moderne, où l'esprit théorique se trouve seul devenu directement perturbateur. Elle doit lui faire naturellement subir une irrésistible discipline, d'abord en régénérant sa source mathémathique, puis en constituant sa destination morale. Après avoir radicalement rectifié les spéculations les plus générales, elle fera convenablement prévaloir les théories les plus éminentes, où l'action se trouve immédiatement liée à la contemplation. Il faut même considérer les lacunes intermédiaires comme pouvant d'abord faciliter la corrélation directe des deux termes extrêmes. Si les penseurs anciens et modernes firent souvent coexister les spéculations mathématiques et les méditations morales avant que leur connexité pût être appréciée, cette double culture doit activement prévaloir quand la liaison est établie.

Je puis donc regarder les lacunes actuelles de la synthèse finale comme incapables d'altérer sa principale efficacité, soit envers l'avenir, soit même quant au présent. Considérée dans son ensemble, elle est autant pratique que théorique, en restant toujours morale ; ces attributs se trouvent directement combinés par sa principale partie ; les deux autres sont respectivement vouées aux conceptions les plus abstraites et les plus concrètes. Des quatre volumes qui vont composer mon dernier ouvrage, deux règlent la contemplation, d'abord la plus simple, puis la plus noble, et deux instituent l'action, d'abord la plus éminente, puis la plus grossière ; le traité moyen concerne à la fois l'une et l'autre.

La nature et la destination de mon œuvre complémentaire étant assez indiquées, je dois développer cette introduction en

y caractérisant la construction de la synthèse subjective, l'institution de la logique positive, et la coordination de la philosophie mathématique.

Construction de la synthèse subjective.

Afin que la synthèse subjective soit vraiment complète, il faut que l'ordre concret et l'ordre abstrait s'y trouvent également rapportés à l'Humanité, qui résume l'un et l'autre. Mais cette condition serait impossible à remplir sans une digne combinaison entre les deux termes extrêmes de l'évolution humaine, qui doivent nécessairement concourir à constituer l'état normal de notre espèce. On peut regarder le fétichisme comme ayant spontanément introduit la subjectivité que le positivisme doit faire systématiquement prévaloir dans la synthèse universelle. Respectivement appréciés, les deux modes synthétiques ne diffèrent qu'en ce que le premier reste absolu parce que son type est personnel, tandis que le second devient relatif en adoptant le type social. Entre les deux synthèses subjectives, le théologisme tenta d'instituer une synthèse essentiellement objective, qui ne peut être aucunement incorporée à l'état normal, quoiqu'elle ait été longtemps nécessaire à l'existence préparatoire.

Rien ne saurait mieux caractériser les deux régimes extrêmes que leur tendance spontanée à faire toujours prévaloir, l'un les volontés, l'autre les lois, suivant la nature des types correspondants. A ce titre, ils seraient inconciliables sans une subordination appropriée aux besoins successifs de notre enfance et de notre maturité. Tant que prévaut la raison concrète, les lois fournissent aux volontés un supplément qui peut seul empêcher une fluctuation indéfinie. Il faut pareillement concevoir les volontés comme pouvant seules compléter les lois envers toutes les notions qui ne sont pas purement abstraites. On institue le régime de la maturité d'après celui de l'enfance en subordonnant l'ordre volontaire à l'ordre légal, dont la prépondérance est fondée sur sa généralité supérieure.

Il semble que la raison théorique et la raison pratique explorent le même domaine, puisqu'elles s'accordent à considérer les événements, pour les prévoir ou les modifier. Mais la première les étudie indépendamment des êtres correspondants afin d'en saisir les lois générales, tandis que la seconde ne les sépare jamais des corps, dont elle veut améliorer l'existence. A cet égard, la diversité des deux domaines résulte du contraste entre la simplicité de l'un et la composition de l'autre. Généralisant par abstraction, la théorie isole chaque phénomène de tous ceux dont il est réellement accompagné, pour le réunir aux effets semblables que comportent tous les autres cas, même hypothétiques. En sens inverse, la pratique spécifie toute action d'après l'ensemble des circonstances capables de l'affecter; ce qui constitue un point de vue plus conforme à celui du sentiment, toujours directement synthétique, en tant que spontanément relatif aux êtres.

Sans l'abstraction théorique, nous ne pourrions jamais instituer les lois générales qui seules nous permettent des prévisions capables de guider notre intervention. Il faut également reconnaître que la concrétion pratique est indispensable pour procurer à nos conceptions une suffisante réalité. Guidée par l'ordre abstrait, la raison concrète a toujours besoin d'en compléter les indications, qui, d'elles-mêmes, seraient habituellement chimériques, faute d'avoir pu tenir compte des circonstances propres à chaque cas. Néanmoins, sans les lumières théoriques qui circonscrivent nos essais, le génie pratique s'épuiserait en tâtonnements indéfinis, aussi stériles que pénibles. En considérant que chaque groupe de phénomènes ne peut jamais être entièrement fixe, on reconnaît que l'immuabilité des lois naturelles ne saurait convenir aux événements composés, et reste toujours bornée à leurs éléments irréductibles.

Telle est la nécessité qui, dans l'état normal de la raison hu-

maine, exige une combinaison permanente entre le dogmatisme et l'empirisme. Elle ne peut être instituée que d'après une suffisante incorporation du fétichisme au positivisme, en complétant l'ordre légal par l'ordre volontaire. Les lois étant toujours restreintes au domaine abstrait, les explications concrètes resteraient impossibles sans l'assistance des volontés.

On ne doit pas craindre que cette alliance puisse jamais altérer la positivité péniblement atteinte par la raison humaine, puisque les volontés s'y trouvent constamment subordonnées aux lois, vu la prépondérance normale de la généralité sur la spécialité. Néanmoins, une telle subordination ne peut être pleinement instituée que d'après une hypothèse fondamentale envers la conception subjective de l'ordre extérieur.

La subjectivité primitive transporte à toutes les existences l'ensemble des attributs humains, dont la distinction reste longtemps inappréciable. Une telle hypothèse ne peut convenir à l'état normal, puisqu'elle confond une activité quelconque avec la vie propre aux êtres organisés, qui ne sauraient subsister que dans un milieu plus fixe qu'eux-mêmes. Mais pour conserver à notre maturité les avantages affectifs, et spéculatifs, propres au régime de notre enfance, il suffit de modifier la fétichité spontanée d'après la décomposition positive du type humain. Entre le sentiment et l'activité, l'intelligence constitue un intermédiaire qui, malgré sa propre faiblesse, change radicalement l'ensemble de l'existence due aux deux principaux attributs. Ne devant jamais aspirer aux notions absolues, nous pouvons instituer la conception relative des corps extérieurs en douant chacun d'eux des facultés de sentir et d'agir, pourvu que nous leur ôtions la pensée, en sorte que leurs volontés soient toujours aveugles.

Bornée au Grand-Être, assisté de ses dignes serviteurs et de leurs libres auxiliaires, l'intelligence, poussée par le sentiment,

guide l'activité de manière à modifier graduellement une fatalité dont tous les agents tendent constamment au bien sans pouvoir en connaître les conditions. En dissipant les préjugés théologiques qui représentaient la matière comme essentiellement inerte, la science tendit à lui rendre l'activité que le fétichisme avait spontanément consacrée. La restitution n'est pourtant devenue complète que quand le positivisme a systématiquement écarté les fluides métaphysiques qui, sous l'anarchie moderne, dissimulèrent la véritable existence des corps. Toutefois, l'art, supérieur à la science, ne peut se contenter de l'activité qui suffit à celle-ci pour représenter l'ordre extérieur afin de le modifier. Aspirant à la synthèse par la sympathie, la poésie a besoin d'assimiler le monde à l'homme autant que le permet l'ensemble des notions émanées de la philosophie.

On ne saurait jamais prouver qu'un corps quelconque ne sent pas les impressions qu'il subit et ne veut pas les actions qu'il exerce, quoiqu'il se montre dépourvu de la faculté de modifier sa conduite suivant sa situation, principal caractère de l'intelligence. Rien n'empêche même de supposer que le sentiment et la volonté, comme l'activité correspondante, appartiennent aux moindres molécules, sans dépendre de l'arrangement matériel, qui n'affecte que la manifestation et l'intensité des résultats. Dans un tel état, la positivité ne diffère de la fétichité qu'en refusant à la matière une intelligence d'abord trop confondu avec le sentiment pour que leur séparation fût possible avant que l'essor collectif eût caractérisé l'aptitude spéculative. Écartant tous les préjugés théoriques, tant scientifiques que théologiques ou métaphysiques, propres à l'initiation humaine, la sagesse finale institue la synergie d'après une synthèse fondée sur la sympathie, en concevant toute activité dirigée par l'amour vers l'harmonie universelle. Notre maturité se trouve ainsi conduite à consacrer et développer les dispositions fondamentales de

notre enfance, en surmontant les entraves résultées du caractère absolu des conceptions primitives.

Nous pouvons même pousser les privilèges de la relativité jusqu'à perfectionner la fétichité systématique en supposant que la nature du monde était jadis plus rapprochée qu'aujourd'hui de celle de l'homme. On doit regarder le milieu comme privé d'intelligence afin qu'il devienne compatible avec le développement de l'Humanité. Réunie à la mobilité de composition qui toujours l'accompagne, sans qu'on puisse d'ailleurs expliquer une liaison nullement réciproque, la pensée susciterait, dans les corps ambiants, une agitation continue que notre existence, surtout collective, ne pourrait supporter. Mais il est permis de supposer que notre planète, et les autres astres habitables, furent doués d'intelligence avant que le développement social y devînt possible. Alors la terre vouait ses forces à préparer le séjour de l'Humanité, dont l'essor ne pouvait s'accomplir que dans un siége mort d'épuisement en vertu de ces longs efforts, plus proportionnés à la puissance matérielle de l'astre qu'à son aptitude spirituelle.

Hors de l'immuable fatalité, nous pouvons toujours concevoir des modifications qui, quoique secondaires envers notre milieu, réagissent profondément sur l'ensemble de notre existence. Obligée de subir constamment les lois fondamentales de la vie planétaire, la Terre, quand elle était intelligente, pouvait développer son activité physico-chimique de manière à perfectionner l'ordre astronomique en changeant ses principaux coefficients. Notre planète put ainsi rendre son orbite moins excentrique, et dès lors plus habitable, en concertant une longue suite d'explosions analogues à celles d'où proviennent les comètes, suivant la meilleure hypothèse. Reproduites avec sagesse, les mêmes secousses, secondées par la mobilité végétative, purent aussi rendre l'inclinaison de l'axe terrestre mieux conforme

aux futurs besoins du Grand-Être. A plus forte raison la Terre put-elle alors modifier sa figure générale, qui n'est au-dessus de notre intervention que parce que notre ascendant spirituel ne dispose pas d'un pouvoir matériel assez considérable.

Étendues à tous les astres de notre monde, ces fictions permettent de caractériser leur existence antérieurement aux révolutions imaginées par les théoriciens les plus hardis, toujours restreints à l'ordre actuel, faute d'une suffisante séparation entre le concret et l'abstrait. Chaque planète dut ainsi perfectionner sa constitution matérielle, pendant sa plénitude vitale, autant que le permirent son intelligence et sa situation. Leurs progrès purent être simultanés, et même concertés, puisque toutes, sous une commune fatalité, tendaient vers des préparations convergentes, en vue des socialités respectives, dont l'essor exigeait partout des modifications connexes. A mesure que chaque planète s'améliorait, sa vie s'épuisait par excès d'innervation, mais avec la consolation de rendre son dévouement plus efficace quand l'extinction des fonctions spéciales, d'abord animales, puis végétatives, la réduirait aux attributs universels de sentiment et d'activité. Tel est, envers les temps antérieurs, le complément général qui convient au fétichisme systématique, où l'existence matérielle se trouve finalement assimilée au type humain autant que le permettent nos connaissances et l'exigent nos besoins.

Une pareille croyance peut aussi satisfaire une curiosité spontanée qui, ne comportant aucune règle pendant notre enfance, y devint souvent abusive, mais que notre maturité doit utiliser en la disciplinant. Nous n'avons pas plus le besoin que la faculté de concevoir aucune création absolue, dont la notion est directement contradictoire, depuis que la science a démontré que la quantité totale de matière reste toujours inaltérable au milieu des mutations quelconques. Il convient, au contraire, de sup-

poser des transformations antérieures à l'économie actuelle, si ces hypothèses peuvent perfectionner notre unité, soit en complétant les notions philosophiques par les fictions poétiques, soit surtout en développant nos sympathies. Toutefois, il faut les restreindre aux temps qui précédèrent et préparèrent l'essor humain, afin de le mieux lier à l'ordre universel. Étendues aux états plus anciens, ces spéculations deviendraient aussi vaines qu'oiseuses; et l'existence future de notre planète ne mérite aucune attention si l'on y suppose éteint le Grand-Être qui la consacre.

Réduite à ce domaine normal, la fétichité concourt avec la positivité pour instituer la synthèse subjective, de manière à consolider la synergie en développant la sympathie. On ne peut contester la légitimité d'un tel régime quand on a suffisamment écarté les préjugés modernes sur une vicieuse appréciation des liens nécessaires entre la poésie et la philosophie. Il importe que le domaine de la fiction devienne aussi systématique que celui de la démonstration, afin que leur harmonie mutuelle soit conforme à leurs destinations respectives, également dirigées vers l'essor continu de l'unité personnelle et sociale.

Considérée théoriquement, l'incorporation du fétichisme au positivisme doit même perfectionner la méditation abstraite par l'assistance du sentiment. A plus forte raison, ce régime est-il propre à seconder les spéculations concrètes, qui préoccupent habituellement la plupart des intelligences. Son efficacité mentale consiste surtout à rendre les images plus vives et plus nettes, de manière à faciliter une attention soutenue. Toutefois, sa principale influence concerne la poésie et la morale, vu son aptitude directe à développer les émotions sympathiques et les inspirations esthétiques. On conçoit alors le monde comme aspirant à seconder l'homme pour améliorer l'ordre universel sous l'impulsion du Grand-Être.

A l'égard du domaine concret, négligé depuis l'âge fétichique, la synthèse subjective n'exige pas d'autres explications. Mais la fétichité doit, en se systématisant, se développer davantage que quand elle restait spontanée. Elle peut alors s'étendre au domaine abstrait, à l'aide d'une institution complémentaire, ébauchée dès le début théorique.

Réduite à l'ordre concret, la fétichité systématique pourrait satisfaire le sentiment, et surtout l'activité, mais sans assister assez l'intelligence. Elle laisserait dépourvues de secours les méditations les plus difficiles, normalement destinées à diriger toutes les autres. Le contraste naturel entre le concret et l'abstrait se développerait au point de compromettre l'harmonie mentale. Alors la raison pratique se trouverait souvent entraînée à méconnaître sa subordination normale envers la raison théorique. Tels seraient les dangers intellectuels d'un régime qui développerait, par les sentiments et les images, la prépondérance naturelle des spéculations concrètes, tandis que les conceptions abstraites resteraient réduites à l'emploi des signes. Il ne pourrait assez représenter la suprématie des fatalités immodifiables sous lesquelles vivent le Monde, le Grand-Être, et l'Homme. Faute d'animer les lois, il tendrait à faire prévaloir les volontés qui doivent s'y subordonner.

On ne peut assez apprécier une telle difficulté que d'après un examen général des lois irréductibles dont l'ensemble constitue l'ordre abstrait. Rapprochées suivant leur affinités subjectives, elles forment deux groupes principaux, confondus pendant l'anarchie théorique.

Le premier comprend les lois vraiment universelles, c'est-à-dire communes, sous diverses formes, à toutes les classes de phénomènes. Objectives et subjectives à la fois, mais à différents degrés, elles furent finalement instituées, par la religion positive, d'après l'ensemble des notions théoriques. Il me

suffit, envers ces quinze lois, de renvoyer au troisième chapitre du dernier volume de mon principal ouvrage.

Un second groupe, plus vaste et moins cohérent, complète l'ordre abstrait par l'ensemble des lois respectivement propres à chacune des sept catégories naturelles. Normalement subordonnées aux précédentes, en vertu du principe encyclopédique, elles composent la philosophie seconde, comme celles-ci la philosophie première.

Sous cet aspect, la dernière moitié de l'ordre abstrait constitue une transition naturelle vers l'ordre concret. Abstraitement, la fatalité suprême doit surtout consister dans les lois qui, communes à tous les phénomènes, sont seules indépendantes de leur classement. Nous ne pouvons regarder les autres que comme des institutions essentiellement empiriques, dont le meilleur type concerne la gravitation.

D'après cette distinction, l'ordre naturel résulte d'un concours où la fatalité générale domine les fatalités spéciales. A la suite de celles-ci, nous placerions les lois concrètes, si leur connaissance nous était réellement permise. Notre maturité, consacrant le régime de notre enfance, les remplace par des volontés, toujours subordonnées à la double fatalité. Telle est l'économie finale de l'entendement humain quand il renonce à l'absolu pour construire une synthèse capable d'assister la sympathie et de guider la synergie. Elle exige que la fétichité soit systématiquement étendue de l'ordre concret à l'ordre abstrait.

Esthétiquement considérée, cette extension n'a pas moins d'importance que sous l'aspect théorique. L'homme régénéré sent le besoin de témoigner sa gratitude continue à l'ordre immuable sur lequel repose toute son existence. Une juste adoration de la Terre, érigée en Grand-Fétiche, siége et soutien du Grand-Être, ne suffit pas pour satisfaire, à cet égard, les âmes dignement développées.

Vu dans son ensemble, l'ordre universel manque naturellement d'un culte direct, faute d'un milieu convenable. Il serait possible d'honorer les fatalités secondaires en s'adressant aux principaux siéges de leur développement spécial. Envers la fatalité suprême, qui n'a point de domaine propre, l'adoration semble devoir toujours rester dépourvue d'objet.

On ne peut assez apprécier cette lacune que depuis l'avénement de la religion positive. Une confusion empirique entre le concret et l'abstrait avait jusqu'alors empêché de sentir un tel besoin et la possibilité d'y satisfaire.

Il faut donc regarder cette difficulté comme inhérente au culte final. Dans l'état théologique, la prière est trop intéressée pour invoquer un ordre inflexible. Exclu de toute adoration, le destin ne put, malgré sa suprématie reconnue, obtenir des anciens le regret d'une lacune religieuse que les modernes ont seule remarquée. A cet égard, le fétichisme était moins injuste et plus complet, surtout quand l'astrolâtrie attribuait les lois générales aux influences célestes. Le positivisme est seul capable de glorifier l'immuabilité de l'ordre universel sans le concentrer sur aucun des corps qu'il domine.

Rapportée à l'Humanité, l'unité finale inspire le besoin de cultiver la sympathie en développant notre reconnaissance pour tout ce qui sert au Grand-Être. Elle doit nous disposer à vénérer la fatalité sur laquelle repose l'ensemble de notre existence.

Sous le fétichisme, cet empire ne put être adoré qu'en l'attribuant aux astres. Alors il ne pouvait directement embrasser que l'ordre matériel, objet prépondérant de la religion primitive. Le théologisme altéra ce culte en représentant la matière comme passive, et dissimula l'ordre moral sous les caprices des dieux. Une saine appréciation de la fatalité suprême ne pouvait résulter que de l'ensemble des études abstraites. Toutes con-

courent à nous prouver que, sans cet ascendant continu, le sentiment deviendrait vague, l'intelligence flottante, et l'activité stérile.

Faute d'un tel joug, le problème humain resterait insoluble, parce que l'altruisme ne pourrait jamais surmonter l'égoïsme. Assisté par la suprême fatalité, l'amour universel peut habituellement obtenir que la personnalité se subordonne à la sociabilité. Tous les sophismes de l'orgueil ne sauraient empêcher l'esprit positif de reconnaître que toute révolte émane des impulsions personnelles. Une soumission forcée tend à faire indirectement prévaloir l'altruisme par cela seul qu'elle comprime l'égoïsme. Mais la réaction morale est surtout efficace quand l'obéissance devient volontaire, puisque la sympathie se trouve directement développée, sans qu'aucun murmure empêche de goûter l'assujettissement.

Avant que l'existence naturelle des instincts altruistes fût systématiquement appréciable, la soumission semblait ordinairement dégradante. Dans toutes les religions locales et temporaires qui préparèrent la religion universelle et perpétuelle, l'homme adorait des dieux dont la félicité consistait surtout à satisfaire leurs désirs quelconques sans subir aucun joug. On ne pouvait alors concevoir que le bonheur dût résulter de l'obéissance, qui ne semblait pas pouvoir jamais devenir volontaire. La vénération chez les inférieurs n'était point ennoblie par le dévouement des supérieurs, dont les commandements restaient arbitraires, suivant les types divins. Philosophiquement jugé, l'essor scientifique tendit à faire graduellement surgir une merveilleuse appréciation en plaçant la grandeur intellectuelle dans une exacte soumission du dedans au dehors. Hésitation ou divagation, telles étaient, par un contraste décisif, les suites habituelles de l'anarchique liberté des abstractions métaphysiques. Elles conduisirent à faire partout sentir

la nécessité de fonder la systématisation finale du théologisme sur une soumission continue de la raison à la foi.

Chérir l'assujettissement, devint ainsi le principal caractère du dernier régime par lequel la synthèse provisoire devait préparer l'état normal. Historiquement considérée, la foi du moyen âge fournit le premier type d'une digne soumission, qui, semblant dirigée vers Dieu, se trouvait réellement appliquée à l'Humanité, mieux que sous la théocratie initiale. Image anticipée de l'ordre final, ce régime annonçait la libre acceptation de l'empire continu du passé sur l'avenir et le présent. Néanmoins, l'obéissance volontaire ne pouvait être solidement instituée par un aucun théologisme, puisque le monothéisme lui-même, avant son conflit avec la raison, érigeait un type nécessairement capricieux. Elle n'a pu résulter que du positivisme, qui, systématisant et développant les inspirations fétichiques, étend les lois naturelles à tous les phénomènes, et proclame l'existence spontanée des penchants bienveillants.

Une telle préparation était nécessaire pour transformer les dispositions résultées du régime préliminaire. Notre initiation s'accomplit sous une synthèse radicalement personnelle qui prescrit l'obéissance sans l'ennoblir, en un temps où le bonheur semble consister à commander, surtout arbitrairement. Il faut aspirer à l'unité sympathique pour apprécier la dignité de la soumission, comme principale base du perfectionnement moral. Vénérer une destinée inflexible devient alors le signe le plus décisif et la meilleure garantie d'une vraie régénération. Elle ne saurait être complète et stable que quand l'amour s'étend des prescriptions volontaires jusqu'aux obligations involontaires. Renverser cette marche, ce serait retourner au régime préliminaire, sans les croyances qui l'expliquaient et le corrigeaient, en sorte que l'obéissance deviendrait aussi précaire que dégradante. Sous cet aspect, le principal carac-

tère du culte positif consiste à glorifier la fatalité, même immodifiable, au nom de son efficacité morale.

L'appréciation de ces réactions normales ne saurait être assez systématisée au début d'un volume qui se borne à constituer l'élément logique de la synthèse subjective. Une étude spéciale sera directement consacrée à cette influence dans la partie morale de ma construction, soit en traitant de la nature humaine, soit en instituant son perfectionnement. Cependant, il fallait ici fixer distinctement l'attention sur une telle question, aussi difficile qu'importante. Il m'y suffit maintenant de constater la nécessité d'étendre le culte positif jusqu'au terme le plus général et le plus lointain. Établie envers l'Humanité, l'adoration normale s'applique ensuite au Monde, et doit se compléter en embrassant le destin.

Toutes ces indications motivent l'institution complémentaire qui permet au positivisme de systématiser une adoration que le théologisme ne put jamais ébaucher. On est obligé de remonter jusqu'au fétichisme pour trouver une célébration quelconque du destin. Mais ce culte naissant était essentiellement fondé sur la crainte, sans pouvoir résulter de l'amour, faute d'une saine appréciation des effets moraux de l'immuabilité. Bientôt effacée sous l'arbitraire théologique, cette disposition initiale devait rester latente jusqu'à l'avénement de la vraie religion. Elle y suppose un perfectionnement, difficile mais décisif, qui complète la combinaison fondamentale entre le positivisme et le fétichisme.

Étendue jusqu'à la fatalité suprême, l'adoration du destin exige l'institution d'un siége nécessairement subjectif. Tant que le culte positif s'adresse directement à l'Humanité, nul artifice n'y devient obligé, puisque le sujet y coïncide avec l'objet, d'après une saine appréciation de l'homme comme serviteur actuel et futur organe du Grand-Être. Appliquée au Monde,

l'adoration ne peut plus se contenter d'une exacte représentation du siége glorifié. Bornée à l'appréciation scientifique, la célébration manquerait son but principal, faute de pouvoir assez développer les instincts sympathiques. La poésie, plus large et non moins vraie que la philosophie, doit alors intervenir pour animer un siége dogmatiquement inerte. Idéalisant le Monde et ses parties, elle y suppose, avec une activité nullement contestable, un sentiment nécessaire à la destination du culte. Rien n'est plus légitime qu'une telle fiction aux yeux de quiconque a bien senti la nature subjective et le caractère relatif de la synthèse positive.

Grâce aux priviléges normaux du vrai rationalisme, les conceptions théoriques doivent toujours admettre les embellissements esthétiques qui peuvent le mieux s'adapter à leur destination réelle. Rapportées à l'Humanité, comme source et but à la fois, elles n'instituent la synthèse que pour consolider et développer la sympathie, seul principe de l'unité positive. A ce titre, on peut même attribuer aux corps des qualités entièrement idéales, pourvu qu'elles ne soient jamais en opposition avec les propriétés constatées. Cette faculté resterait d'ailleurs insuffisante pour que la logique relative fût pleinement constituée. Elle exige un complément essentiel, consistant à créer des existences purement fictives, dont l'institution subjective ne soit aucunement douteuse.

Rendue aussi poétique que philosophique, la synthèse positive doit toujours subordonner le dogme au culte, sans en altérer la juste indépendance. On ne peut instituer l'harmonie normale des trois éléments religieux qu'en destinant la contemplation à systématiser l'affection et l'action. Sous cet aspect, il suffit, pour la réalité des théories positives, que l'ordre des conceptions y devienne toujours conforme à celui des événements. Alors commencent à prévaloir les motifs d'utilité,

surtout morale, qui doivent compléter l'institution des pensées humaines. L'idéal vient se combiner avec le réel pour consolider la synthèse en développant la sympathie. Ils peuvent ainsi composer des institutions à la fois morales et mentales, où la séparation entre le subjectif et l'objectif devient souvent difficile. Elles comportent un tel ascendant que, jusqu'à la fin de l'initiation humaine, les plus anciennes créations du Grand-Être furent prises pour des lois extérieures.

A cet égard, il suffit ici de rappeler les deux exemples principaux que fournissent les deux parties extrêmes de la science profane. Rien ne peut encore détourner les géomètres d'envisager l'artifice de l'inertie comme une réalité naturelle, quoique sa subjectivité soit pleinement dévoilée depuis un quart de siècle. Tous les biologistes refusent de voir, dans la série animale, une institution logique, dont ils compromettent la destination, et même la conservation, en y laissant prévaloir l'appréciation objective, malgré les explications décisives du positivisme.

Vues dans leur ensemble, les opinions qui dominèrent notre initiation manifestent cet irrésistible empire de l'Humanité sur l'homme. Elles furent toujours modifiées conformément aux lois naturelles de l'évolution spéculative. Rien n'a pu cependant déterminer jusqu'ici la plupart des intelligences à regarder les croyances théologiques comme des institutions spontanées du Grand-Être, qui dut, pendant son enfance, imaginer hors de lui des guides qu'il ne pouvait alors découvrir dans sa propre vie. Il a fallu que l'initiation humaine se trouvât terminée, par la découverte des lois sociologiques, pour que les penseurs avancés se soient formés, à cet égard, des convictions inébranlables. Tel fut l'ascendant de la raison collective sur les pensées individuelles, avant que l'essor intellectuel pût devenir systématique. A plus forte raison, cette autorité doit-elle se développer quand la religion relative a directement établi la

subjectivité nécessaire de la vraie synthèse. Sous cet aspect, le passé ne peut fournir qu'une mesure très imparfaite des transformations volontaires et systématiques que doivent finalement subir nos fonctions les plus modifiables.

Il faut maintenant appliquer ces règles à l'institution subjective qui complétera le culte positif en idéalisant la fatalité la plus générale. D'après les indications précédentes, la difficulté consiste en ce que le suprême destin ne saurait avoir de siége objectif, tandis que son adoration exige une résidence déterminée. On ne peut concilier ces conditions qu'en instituant un milieu général, dont la nature fictive ne soit jamais équivoque. Le dénouement résulte du développement systématique de l'institution de l'espace, tellement spontanée que son origine, individuelle ou collective, reste toujours inaperçue, quoique sa subjectivité devienne aisément appréciable. Elle fournit, dès le premier essor du génie abstrait, un milieu fictif dont la destination, restée jusqu'ici mathémathique, doit désormais embrasser tous les phénomènes extérieurs.

Telle est l'issue normale du principal embarras propre à l'établissement du lien synthétique sans lequel l'instinct sympathique ne saurait assez prévaloir. Elle exige que l'espace acquière un caractère plus complet, et même plus animé, que celui qu'il a jusqu'à présent développé. Réduit à son office géométrique, et par suite mécanique, ce milieu conserve les empreintes que notre imagination y place, afin de nous permettre de penser aux formes et situations indépendamment des corps qui nous les manifestent. Il faut finalement étendre la même aptitude à tous les attributs universels, pour que leur contemplation et leur glorification abstraites puissent se développer à l'aide d'images convenables, au lieu de rester bornées à l'emploi des signes. Cela n'exige point qu'on altère la nature essentiellement passive de l'espace universel, dont toute l'activité se réduit, en

géométrie, à solidifier les limites, superficielles ou linéaires, de chaque empreinte, en conservant au dedans sa fluidité générale. Avec la même souplesse, il peut également garder les densités, les saveurs, les températures, les odeurs, les couleurs, les sons, et tous les autres attributs matériels, que nous pourrons ainsi séparer des corps.

Etendue autant que le comporte sa nature, cette institution doit même embrasser le domaine vital, tant qu'il reste statiquement considéré. Sous un tel régime, les conceptions anatomiques, et surtout taxonomiques, comportent un développement systématique qui serait autrement impossible, faute d'une suffisante abstraction. Prolongée ainsi jusqu'aux organismes fictifs, la comparaison biologique peut à la fois devenir plus éminente et plus efficace. Appliquée dynamiquement, cette institution deviendrait stérile et même vicieuse. Car les fonctions vitales, tant végétatives qu'animales, exigent des siéges réels, sans que leur étude puisse utiliser les fantômes émanés du milieu subjectif. Il faut à la poésie des fictions mieux déterminées et plus consistantes pour attribuer une activité suffisante aux êtres qu'elle veut créer. On doit donc compléter et systématiser l'institution de l'espace sans altérer sa nature toujours passive, qui seule permet au milieu général de fournir un domaine abstrait à toute la science profane.

Historiquement envisagée, la consécration de l'Espace doit être regardée comme spontanément ébauchée depuis longtemps chez une notable partie de la population humaine. Un concours spécial d'influences, surtout sociales, disposa la civilisation chinoise à developper le fétichisme au delà de tout ce qui fut possible ailleurs. Mieux systématisé qu'en aucun autre cas, il y prévalut sur le théologisme et préserva le tiers de notre espèce du régime des castes, malgré l'hérédité des professions. Il y surmonta tous les contacts hétérogènes, et conserva son ascendant

national au milieu des mélanges, plus tolérés que consacrés, du polythéisme extérieur, sans jamais accueillir le monothéisme. Le culte y consiste surtout dans l'adoration de la Terre et du Ciel, qui représentent le Grand-Fétiche et le Grand-Milieu que le positivisme associe au Grand-Être. D'après le caractère concret de la sociabilité chinoise, dont la principale imperfection résulte du défaut d'essor abstrait, l'Espace s'y confond avec l'ensemble des corps célestes, sous l'impulsion astrolatrique. Épurée par la relativité, cette institution sera facilement subordonnée à l'Humanité chez un peuple où la destination sociale prévaut toujours.

On ne doit ici considérer ce rapprochement que comme propre à faire mieux apprécier le complément nécessaire de la synthèse finale. Ralliant l'élite de la race blanche avec la majorité de la race jaune et l'ensemble de la race noire, l'incorporation du fétichisme au positivisme peut seule consolider la religion universelle. Graduellement étendue jusqu'au domaine abstrait, la synthèse relative doit embrasser toutes les existences liées au Grand-Être. Afin que la sympathie soit assez développée, il faut idéaliser, non seulement le monde objectif, mais aussi le milieu subjectif où nous plaçons tous les phénomènes extérieurs. Nous ne devons admettre l'intelligence que chez l'Humanité, perfectionnant l'ordre universel par ses serviteurs et leurs auxiliaires. Une activité purement aveugle reste seule au service du sentiment dans les corps dont l'ensemble constitue le siége et la base de la suprême existence. Mais le milieu général où s'accomplissent les phénomènes quelconques n'est animé que par la sympathie universelle, sans action comme sans réflexion.

Malgré l'anarchie moderne, la raison occidentale a toujours conservé, sous des formes qui lui sont propres, les dispositions partout émanées du fétichisme fondamental. Une vague hypothèse d'Éther universel fut instituée pour rallier les abstractions

théoriques pendant leur dispersion académique. Subordonnée au caractère absolu de l'empirisme scientifique, cette conception offre une apparence d'objectivité qui, dissimulant sa nature, altère sa destination. Il faut pourtant reconnaître que l'Éther des savants occidentaux et le Ciel des lettrés chinois ont spontanément préparé la systématisation de l'Espace. C'est ainsi que, sous des synthèses absolues, l'Occident et l'Orient se disposérent à l'avénement des conceptions relatives qui caractérisent la synthèse finale. Afin que ces préambules s'adaptent à leur vraie destination, il suffit d'y transformer l'objectif en subjectif. Le fluide universel est alors apprécié comme une institution systématique de l'Humanité, qui purifie et complète les ébauches spontanées.

Élaborés par notre enfance et notre adolescence, les éléments synthétiques de notre maturité n'ont besoin que d'être convenablement transformés pour constituer l'état normal. Une inaltérable trinité dirige nos conceptions et nos adorations, toujours relatives, d'abord au Grand-Être, puis au Grand-Fétiche, enfin au Grand-Milieu. Fondée sur la théorie de la nature humaine et sur la loi du classement universel, cette hiérarchie offre un décroissement continu du caractère propre à la synthèse subjective. On y vénère au premier rang l'entière plénitude du type humain, où l'intelligence assiste le sentiment pour diriger l'activité. Nos hommages y glorifient ensuite le siége actif et bienveillant dont le concours, volontaire quoique aveugle, est toujours indispensable à la suprême existence. Il ne se borne point à la Terre avec sa double enveloppe fluide, et comprend aussi les astres vraiment liés à la planète humaine comme annexes objectives ou subjectives ; surtout le Soleil et la Lune, que nous devons spécialement honorer. A ce second culte succède celui du théâtre, passif autant qu'aveugle, mais toujours bienveillant, où nous rapportons tous les attributs matériels, dont sa sou-

plesse sympatique facilite l'appréciation abstraite à nos cœurs comme à nos esprits.

Relativement aux corps extérieurs, une telle doctrine perfectionne la synthèse en développant la symphatie, de manière à réagir sur notre principale amélioration. Elle peut seule satisfaire au besoin, à la fois théorique et pratique, que j'ai caractérisé par ce vers systématique: *Pour compléter les lois, il faut des volontés.* Apprécié subjectivement, un tel complément convient autant à la vie spéculative qu'à la vie active, vu la commune insuffisance des motifs légaux. Ce qui manque de précision aux lois sociales pour guider la pratique humaine trouve son équivalent dans l'impuissance des explications théoriques envers le spectacle concret: il faut, de part et d'autre, que le commandement assiste l'arrangement, afin que l'*ordre* soit complet. Tel est le régime qui doit normalement assimiler l'ordre extérieur à l'ordre humain autant que le comporte leur opposition nécessaire. Il représente la matière, et même l'espace, sous l'impulsion continue de la sympathie fondamentale, concourant, activement ou passivement, à perfectionner l'harmonie universelle d'après la providence graduelle du Grand-Être. Franchissant l'intervalle que le Monde, c'est-à-dire la Terre, remplit entre l'Espace et l'Humanité, nous pouvons directement rapprocher les deux éléments extrêmes de la trinité suprême, en attribuant au fluide général toute l'objectivité des lois les plus abstraites.

Une dernière appréciation achève de caractériser la synthèse subjective en la considérant envers le Grand-Être, afin de faire assez ressortir combien l'intelligence se trouve ennoblie dans une doctrine toujours dominée par le sentiment. Notre maturité systématise l'empirisme de notre enfance en représentant l'esprit comme notre principal privilége, sans altérer sa subordination normale envers le cœur. Il suffit, pour concilier ces

deux conditions, de substituer le point de vue social au point de vue personnel qui fut seul consacré par la méthode théologico-métaphysique. Cette transformation fait aussitôt sentir que l'intelligence suppose la sociabilité comme elle l'assiste, parce que l'essor collectif constitue l'unique source de l'évolution active et spéculative; en sorte que le monothéisme est radicalement contradictoire. Alors on reconnaît que l'ordre ne peut être compris et modifié que d'après l'amour, qui, réciproquement, a besoin de l'esprit pour instituer la symphathie envers l'avenir et le passé. Relevée et disciplinée par une telle connexité, l'intelligence se trouve librement subordonnée au sentiment, contre lequel elle fut en conflit croissant depuis le début de l'essor abstrait. Elle obtient la plus noble consécration et le plus complet exercice dans le régime qui fait le mieux prévaloir le cœur, parce qu'elle peut seule y systématiser l'unité normale.

Simplifiée autant que possible, la construction de la synthèse subjective consiste à constituer, pour l'entendement, l'état le plus symphatique. On peut d'avance garantir qu'il sera, par cela même, le plus synthétique et le plus synergique de manière à développer l'existence la plus religieuse. Fondée sur la théorie positive de l'âme, une telle construction ne pouvait être qu'ébauchée au début d'un volume dont le domaine est spécialement logique, quoiqu'il doive l'instituer comme premier élément de la synthèse finale. Il faut donc attendre le traité de morale théorique et pratique pour le développement systématique des aperçus ci-dessus introduits. A la poésie seule appartient ensuite de faire assez sentir la principale efficacité des institutions destinées à généraliser le type humain en y rattachant, autant que possible, la matière et même l'espace.

Institution de la logique positive.

Afin de caractériser la logique relative qui convient à la synthèse subjective, il faut d'abord comparer sa définition normale avec l'ébauche que formula, six ans avant, l'introduction de

mon principal ouvrage. Guidé par le cœur, j'y sus déjà proclamer et même systématiser l'influence théorique du sentiment. Une appréciation plus complète m'y fit aussi consacrer l'office fondamental des images dans les spéculations quelconques. Sous ce double aspect, cette ébauche fut satisfaisante puisqu'elle embrassa l'*ensemble des moyens* logiques, en surmontant leur réduction métaphysique au seul emploi des signes. Toute son imperfection consiste en ce que leur destination s'y trouva trop restreinte, faute de m'être assez dégagé des habitudes scientifiques. Il y semble que la vraie logique se borne à nous *dévoiler* les *vérités* qui nous conviennent, comme si le domaine fictif n'existait pas pour nous, ou ne comportait aucune règle. Nous devons autant systématiser la conjecture que la démonstration, en vouant toutes nos puissances intellectuelles, comme nos forces quelconques, au service continu de la sociabilité, seule source de la véritable unité.

Reconstruite convenablement, la définition de la logique, incidemment formulée à la page 448 du tome premier de ma *Politique positive*, exige deux rectifications connexes, non envers les moyens, mais quant au but. On y doit remplacer *dévoiler* les *vérités* par *inspirer* les *conceptions*, afin de caractériser la nature essentiellement subjective des constructions intellectuelles, et l'extension totale de leur domaine, non moins intérieur qu'extérieur. Mais, avec cette double rectification, ma formule initiale devient pleinement suffisante. Alors on est finalement conduit à définir la logique: *Le concours normal des sentiments, des images, et des signes, pour nous inspirer les conceptions qui conviennent à nos besoins, moraux, intellectuels et physiques.* Néanmoins, cette définition exige deux explications connexes, d'abord envers les moyens qu'elle indique, puis surtout quant au but qu'elle assigne.

Il suffit, sous le premier aspect, qu'elle se trouve convena-

blement rattachée à la théorie fondamentale de la nature humaine. D'après cette théorie, l'ensemble du cerveau concourt aux opérations quelconques de sa région spéculative. Élaborées par l'esprit sous l'impulsion du cœur assisté du caractère, toutes nos conceptions doivent naturellement porter l'empreinte de ces trois influences. A la tête des moyens logiques, il faut donc placer les sentiments qui, fournissant à la fois la source et la destination des pensées, les combinent d'après la connexité des émotions correspondantes. Rien ne saurait remplacer cette logique spontanée, à laquelle sont toujours dus, non seulement les premiers succès des esprits sans culture, mais aussi les plus puissants efforts des intelligences les mieux cultivées.

On ne peut même systématiser la logique, comme régler l'ensemble de l'existence humaine, qu'en subordonnant les deux autres moyens essentiels à ce procédé fondamental, seul commun à tous les modes et degrés de l'entendement. Bornées à ce régime, les opérations intellectuelles pourraient être fortes et profondes ; mais elles resteraient vagues et confuses, parce qu'il ne comporte pas la précision et la rapidité qu'elles exigent, ne pouvant jamais devenir assez volontaire. Jointes aux sentiments, les images rendent l'esprit plus prompt et plus net, parce que leur usage est plus facultatif. Elles se combinent avec eux, d'après la liaison naturelle entre chaque émotion et le tableau de son accomplissement. Toute leur efficacité résulte de cette connexité, qui permet aux images de rappeler les sentiments d'où d'abord elles dérivèrent.

Sous une telle assistance, le cœur institue un second régime logique plus précis et plus rapide que le premier, mais moins sûr et moins puissant, où les conceptions se forment en combinant les images. Une moindre spontanéité distingue ce mode du précédent et ne lui permet pas une équivalente généralité, quoiqu'il surgisse sans culture. Jamais il ne suffit pour rendre

les déductions, inductions, ou constructions, aussi promptes et nettes que l'exige leur destination esthétique, théorique, ou pratique. Elles ne peuvent remplir ces conditions qu'en joignant le secours des signes proprement dits à la puissance des sentiments assistés des images. Tel est le complément nécessaire de la vraie logique, entièrement ébauchée dans l'animalité, mais exclusivement développable par la sociabilité.

Tous les modes, fondamental, auxiliaire, et complémentaire, propres à l'élaboration des pensées quelconques, furent successivement doués d'une prépondérance conforme à l'âge correspondant de l'initiation humaine. Remontant jusqu'au fétichisme, la méthode affective, et surtout sympathique, a toujours conservé, même à l'état latent, la suprématie qui lui fut ouvertement procurée par notre première enfance. On voit ensuite le polythéisme, moins puissant, moins universel, et moins durable, faire, en aprarence, prévaloir les images, tandis que les signes obtinrent enfin la principale attention sous le monothéisme, plus faible, plus restreint, et plus passager que les deux régimes précédents. Il faut regarder ces trois phases de la préparation logique comme naturellement suscitées par la prépondérance successive de la construction, de l'induction, et de la déduction, auxquelles conviennent respectivement les trois modes de l'élaboration mentale. Sous une telle marche, l'empirisme métaphysique, malgré la sagesse sacerdotale, réduisit le système logique au dernier élément développé, qui, quoique le moins puissant, mais susceptible d'un essor plus facile, dissimula ceux qu'il complétait.

Écartant les préoccupations exclusives, le positivisme termina de vains débats en consacrant, chacune suivant sa nature, les trois méthodes successivement surgies pendant l'initiation humaine. Fondant l'état normal de l'entendement sur la vraie théorie de l'âme, la religion universelle institua la logique

finale en systématisant le concours spontané des trois régions cérébrales à chaque résultat mental. Une appréciation générale fait aussitôt reconnaître la correspondance de chacune d'elles avec l'un des trois modes d'élaboration. Si la source de la méthode affective n'est aucunement douteuse, il faut aussi regarder l'emploi des images comme manifestant la participation de l'appareil spéculatif, dont leur production caractérise le plein essor. Il est également certain, quoique moins évident, que, par l'usage des signes, l'activité concourt aux opérations de l'intelligence; car leur office dans la conception dérive de leur destination envers l'expression, toujours accomplie de la même manière que l'action. On voit ainsi le tableau cérébral représenter l'ensemble de la méthode normale, en expliquant l'indépendance et le concours de ses trois éléments. Nous pouvons donc regarder leur puissance respective et leur subordination mutuelle comme réglées par la théorie positive de l'âme, qui prouve que, même sous l'aspect logique, la saine philosophie doit toujours être essentiellement sympathique.

Basée sur la constitution cérébrale, la vraie coordination des trois éléments logiques fut instinctivement sentie sous le fétichisme, et sagement respectée par la théocratie, qui pourtant ne put la systématiser. A partir de l'évolution grecque, la progression occidentale la méconnut radicalement, en transportant aux signes une prépondérance factice, d'où résulta la dénomination qui prévaut encore. Cette déviation fatale ne put être arrêtée par la civilisation romaine, qui, malgré son instinct social, subit l'ascendant intellectuel de ses sujets politiques. On ne trouve qu'au moyen âge un noble effort pour instituer le vrai régime logique en y faisant religieusement prévaloir le cœur. Néanmoins, faute d'une systématisation alors impossible, la sagesse catholique et l'instinct chevaleresque ne purent surmonter la dégénération métaphysique, qui se développa pen-

dant tout le cours de la révolution moderne, où les dignes mystiques ont seuls pressenti l'état normal.

On doit toujours attacher beaucoup d'importance à bien apprécier cette unique tentative, malgré son inévitable avortement. Précurseur extrême du positivisme, le catholicisme y posa, sous les formes propres au moyen âge, le principe fondamental de la vraie logique, en proclamant la subordination continue de la raison à la foi, qui réellement équivalut à celle de l'esprit au cœur. Elle ne devint vraiment oppressive pour l'intelligence que quand le sacerdoce dégénéré, prenant le moyen pour le but, s'efforça de prolonger par la violence la domination épuisée du théologisme le moins durable. Ramenée au sens positif, la règle catholique constitua, malgré la révolte moderne, la première ébauche de la loi fondamentale qui soumet les vivants aux morts. A ce point de vue, la prescription du moyen âge sur la soumission de l'examen à la tradition se trouve consacrée par la religion finale, qui proclame, comme base nécessaire de l'ordre humain, l'entière subordination de l'homme à l'Humanité.

Nous devons regarder la théorie logique des métaphysiciens comme caractérisant à la fois leur impuissance à régler l'état social et leur inaptitude à le concevoir. Avant leur essor grec, la destination pratique du théologisme avait spontanément compensé ses vices théoriques, quoique sa méthode soit aussi personnelle que celle de l'ontologisme. Tous ses dangers se développèrent quand la culture intellectuelle passa des prêtres aux philosophes, qui, malgré leurs tendances pédantocratiques, ne purent instituer la spéculation abstraite qu'en écartant le point de vue collectif. Une intuition nécessairement individuelle, où l'intelligence oubliait à la fois sa subordination au sentiment et sa destination pour l'activité, fut alors érigée en état normal de la raison théorique. Rien ne peut mieux caractériser cette

dégradation que la systématisation de la logique d'après le seul emploi des signes en écartant les sentiments et même les images. Elle constitua la première et principale manifestation de la maladie occidentale, où l'homme s'isole de l'Humanité. L'institution sympathique de la logique fournit la meilleure preuve de l'aptitude du positivisme à terminer la révolution moderne, en faisant systématiquement prévaloir la sociabilité sur l'intelligence.

Telle est donc la véritable harmonie logique, impossible sous le régime préparatoire, et premier fruit du principe régénérateur. Elle consiste à faire toujours concourir la force des sentiments avec la netteté des images et la précision des signes pour élaborer les conceptions qui nous conviennent. Mieux étudiée, elle conduit à distinguer deux modes généraux dans l'impulsion fondamentale, tantôt égoïste, tantôt altruiste. Pour montrer combien l'anarchie moderne a dégradé les Occidentaux, il suffirait de noter que, malgré les nobles habitudes du moyen âge, les instincts personnels sont les seuls penchants dont elle ait habituellement proclamé l'efficacité mentale. On doit pourtant reconnaître que, à cet égard, comme à tout autre, leur influence est immédiatement supérieure à celle des moteurs bienveillants, qui ne sauraient ordinairement avoir autant d'énergie. Rarement l'initiative mentale peut directement émaner des impulsions sympathiques. A la faible stimulation de l'altruisme, il faut habituellement que l'égoïsme joigne sa puissante spontanéité pour susciter les efforts intellectuels.

Afin de bien apprécier le concours de toutes les régions cérébrales à chaque opération mentale, on doit y rapporter l'impulsion initiale, et même l'attention continue, à la participation simultanée des deux portions, antérieure et postérieure, de l'appareil affectif. Leurs liens spéciaux les rendent normalement susceptibles d'une convergence indispensable à leur commune

destination. Il faut cependant attribuer à l'altruisme l'efficacité des efforts de l'intelligence comme de l'activité. Même en écartant les vices propres à la direction égoïste, l'opposition mutuelle des impulsions personnelles les rend habituellement impuissantes à constituer l'harmonie logique, ainsi que l'unité totale. Elles ne sauraient ordinairement devenir efficaces qu'en se subordonnant à l'altruisme, dont l'ascendant continu peut seul empêcher leur énergie de se consumer en conflits intérieurs. Nous sommes ainsi conduits, sans méconnaître la participation nécessaire de l'égoïsme, à regarder l'impulsion affective des opérations intellectuelles comme essentiellement réglée par les instincts sympathiques. Tous y concourent spontanément, chacun selon sa nature, l'attachement spécial en stimulant l'attention, la vénération en la disciplinant, et l'amour universel en la dirigeant vers sa destination normale.

D'après cette explication, la systématisation logique est autant due que l'unité générale à la prépondérance du cœur sur l'esprit. On doit regarder les signes et les images comme les auxiliaires des sentiments dans l'élaboration des pensées. Cette assistance se trouve ainsi fournie par les deux parties essentielles de l'appareil intellectuel, respectivement consacrées l'une à la conception, l'autre à l'expression, qui toujours exige l'action. Toute méditation reste incomplète quand elle ne produit aucune image, et toute contemplation devient confuse sans un tel guide. Elles sont donc caractérisées, l'une et l'autre, d'après les images, dont la considération, active ou passive, forme le principal domaine de l'esprit intérieurement dirigé par le cœur. Une dernière fonction devient alors nécessaire pour transmettre au dehors le résultat général de l'élaboration accomplie au dedans. Rapportés à cette destination, d'où dérive leur réaction mentale, les signes acquièrent leur principale dignité, comme seuls capables d'instituer, entre le Grand-Être et ses serviteurs,

les communications qui procurent, aux uns les éléments, à l'autre le produit, du travail intellectuel.

Etablie sur ces fondements généraux, la systématisation de la logique peut être spécialement confirmée d'après un exemple décisif, naturellement surgi dans la première partie de la présente introduction. Quand j'ai construit la base de la synthèse subjective, j'ai nécessairement pratiqué toutes les règles que je viens de prescrire aux opérations mentales, suivant la tendance ordinaire du positivisme à faire spontanément précéder l'explication par l'application. Un premier examen rend directement sensible la prépondérance continue de la méthode affective dans la conception de la trinité positive, où la sympathie constitue le seul lien des trois éléments du culte universel. Instinctivement propre au Grand-Être, l'amour devient l'âme artificielle du Grand-Fétiche, et même enfin du Grand-Milieu. Toutefois, les deux autres modes logiques se trouvent convenablement représentés dans la construction fondamentale de la synthèse subjective. A l'égard des images, elle consacre et développe leur usage, en assimilant la matière, et même l'espace, au type humain, sans altérer aucune nature. Sous le rapport des signes, l'ensemble de ce volume fera directement sentir, d'après les spéculations qui les utilisent le mieux, combien la systématisation sympathique de l'espace ennoblit et fortifie leur office intellectuel.

Considérée envers son but, la logique dut à la fois être la plus ancienne et la plus vicieuse des constructions philosophiques. Elle voulut directement régler l'élément moyen de l'existence humaine, en le séparant de sa source sociale et de sa destination pratique. Science, la logique posa l'aphorisme fondamental qui subordonne l'ordre intellectuel à l'ordre physique, sans en conclure que la connaissance de l'un exigeait l'appréciation de l'autre, dont l'étude était alors bornée aux phénomènes les plus simples. Art, elle ne put instituer qu'un vain

appareil de règles métaphysiques, qui ne comportaient d'autre efficacité que de compenser, par quelques habitudes de généralité, la spécialité nécessaire de la positivité préliminaire. Renonçant au domaine poétique, la logique, dans son exclusive préoccupation de la vérité, se sentit bientôt incapable d'initiative, et se contenta de systématiser l'aptitude, plus nuisible qu'utile, à prouver sans trouver.

On ne pouvait réellement instituer la logique avant que la construction de la religion positive eût essentiellemeut terminé l'initiation humaine. Une solution décisive devient alors possible, et même opportune, pour le grand problème que le moyen âge posa, d'après une ébauche provisoire, en s'efforçant de régler les forces quelconques. Vue dans son ensemble, la difficulté consiste surtout à discipliner l'esprit, soit comme étant l'élément le plus troublé par la révolution moderne, soit afin qu'il assiste le principe régénérateur envers la systématisation universelle. Ramenée à sa vraie destination, l'intelligence doit aider le sentiment à diriger l'activité : cet office suffit pour instituer le régime mental. Alors l'esprit, renonçant à la stérile indépendance rêvée par l'orgueil métaphysique, place sa véritable grandeur dans une digne soumission à l'ordre fondamental que nous devons subir et modifier. Guidée par le spectacle extérieur, l'intelligence adapte la marche de ses conceptions à celle des phénomènes, dont les états futurs ou passés peuvent être ainsi jugés d'après nos opérations intérieures, vu la perpétuité des deux économies parallèles. Elle a reconnu que cette correspondance ne peut jamais être absolue ; elle n'aspire à l'instituer qu'autant que l'exigent nos vrais besoins.

Un tel régime se résume dans ce vers systématique : *Entre l'Homme et le Monde, il faut l'Humanité ;* le premier hémistiche rappelle le dualisme immobile de la synthèse préliminaire, et

le second indique la progression continue qui caractérise la synthèse finale. Modifiant le Monde et dominant l'Homme, l'Humanité transmet à celui ci la principale influence de celui-là, mais en la perfectionnant de plus en plus. Avant que cette interposition pût être directement conçue, elle se trouvait indirectement représentée par celle des tuteurs subjectifs que l'Humanité sut spontanément instituer pour guider son enfance. Notre émancipation devait surtout consister à substituer le vrai Grand-Être à ces précurseurs fictifs, dont la domination, empiriquement prolongée, dut finalement devenir autant oppressive qu'elle fut longtemps salutaire. On conçoit alors l'Homme en rapport avec le Monde par et pour l'Humanité, principe universel de la systématisation positive.

Relativement instituée, la synthèse peut entièrement consister à développer et consolider la sympathie, où résident à la fois la source et la destination de la suprême existence. Elle dispose l'intelligence à seconder le sentiment d'une manière plus directe et plus profonde qu'en dévoilant l'ordre universel. Ne devant représenter ce spectacle qu'avec une approximation adaptée à nos besoins, l'esprit peut, après avoir assez rempli son office passif, prendre une attitude active, en s'élevant de la philosophie à la poésie, pour développer le culte, où consiste surtout la religion. On doit regarder ce second domaine comme le complément normal du premier ; car, en passant au service direct du sentiment, l'intelligence ne cesse point de servir l'activité, finalement destinée à perfectionner la constitution morale. Mieux appréciés, les progrès physiques et même intellectuels tirent de leur réaction affective leur principale valeur, individuelle et collective.

A la fois poétique et philosophique, la saine logique devient aussi précieuse aux cœurs les plus sympathiques qu'aux esprits les plus synthétiques. Nos répugnances envers elle furent seule-

ment inspirées par sa constitution métaphysique, qui consacrait l'individualisme absolu. Toujours sociale, la logique positive fait profondément sentir que l'essor intellectuel est nécessairement collectif. Idéalisant l'ordre universel à mesure qu'elle le représente, elle perfectionne la synthèse en développant la sympathie, d'après l'extension normale du type humain, qui, rapprochant toutes les existences dignes d'apréciation, les rend mieux comparables et plus combinables. Graduant ce type suivant la nature de chaque cas, la synthèse finale concentre l'intelligence chez le Grand-Être, dont la conception embrasse et consacre, non seulement ses serviteurs directs, mais aussi les auxiliaires indirects librement émanés des races affiliées. Une diffusion indéfinie des attributs intellectuels avait rendu le théologisme profondément perturbateur, même quand les entités furent pleinement incorporées aux substances. On ne peut concevoir l'ordre qu'avec une seule intelligence, partout assistée du sentiment et de l'activité, suivant le vrai type du Grand-Être, confusément préparé par la concentration monothéique de ses tuteurs fictifs.

Généralisée autant qu'il convient, cette conception doit subjectivement envelopper le Monde et l'Humanité d'un commun milieu, qui forme le principal domaine de la logique systématisée, parce qu'il devient le siége normal des lois vraiment universelles. Réduite au sentiment sans activité, sa nature passive le rend plus propre à développer la sympathie, ailleurs mêlée à des efforts qui ne sauraient toujours converger, ou même à des pensées souvent opposées. Alors la soumission volontaire se trouve directement érigée en source sacrée de la discipline universelle. Notre culte de l'Espace, complétant celui de la Terre, nous fait ainsi voir, dans tout ce qui nous entoure, de libres auxiliaires de l'Humanité. D'après ce régime de pleine relativité, la combinaison entre le fictif et le réel ne peut jamais sus-

citer leur confusion, les deux modes étant toujours rapportés à la même destination, d'où résulte, en chaque cas, une suffisante distinction entre le subjectif et l'objectif.

Érigée en principal privilège du Grand-Être, l'intelligence acquiert une dignité jusqu'alors impossible, sans pouvoir contester sa consécration religieuse au service continu de la sociabilité, seule source de son propre développement. Beaucoup d'espèces, mêmes sociables, présentent les germes d'une aptitude mentale qui deviendrait probablement comparable à la nôtre si leur essor collectif était jamais réalisable. Leur avortement n'est dû qu'à la principale loi de la philosophie seconde, la concentration de la socialité chez la race prépondérante. On voit ainsi les autres espèces, si l'attachement et la vénération y peuvent assez prévaloir, réduire leur intelligence à servir activement l'Humanité, sans aspirer, suivant leur nature, à constituer un Grand-Être rival de celui qui régit la commune planète. Une abnégation d'abord individuelle, mais souvent susceptible de devenir collective, ennoblit ces libres auxiliaires, même quand leur assistance se borne à nous alimenter. Ils ont ainsi mérité que la maturité du Grand-Être systématise le culte que leur voua son enfance avant que leurs services fussent suffisamment appréciables. Rationnellement considérée, leur adoration perfectionne la synthèse subjective en instituant des intermédiaires à l'aide desquels l'Humanité se trouve mieux liée à la Terre, comme celle-ci se lie davantage à l'Espace par les autres astres humains.

De telles indications font assez sentir que, même dans sa spontanéité fétichique, le régime sympathique de l'entendement humain surpasse sa constitution métaphysique, dont la prétendue rationalité consiste à servir l'égoïsme au lieu d'assister l'altruisme. On peut regarder le cerveau comme un double placenta qui rattache le dedans au dehors, en construisant la synthèse et

développant la sympathie. Guidés par le cœur, nous adhérons directement à l'Humanité, puis à l'économie universelle qui sert de base à son existence. Mais l'esprit, remplaçant l'ordre de dignité par l'ordre de simplicité, se soumet d'abord aux lois extérieures, d'après lesquelles il reconnait ensuite les lois humaines. Étendues normalement, les deux marches convergent spontanément, puisque le Grand-Être constitue à la fois le principal élément et le résumé nécessaire de l'économie universelle.

Elles doivent pourtant rester spécialement propres, l'une à la poésie, l'autre à la philosophie, de manière à mériter une consécration distincte dans la logique religieuse. Quand on se dégage des préjugés théoriques qui dominaient notre adolescence, on commence par sentir que le beau constitue autant que le vrai le domaine normal de la méthode universelle, non moins subjective qu'objective. Un pas de plus dans la même voie conduit ensuite à s'élever de l'imagination au sentiment, comme on avait d'abord passé de la raison à l'imagination. Alors notre maturité systématise le régime spontané de notre enfance, où la synthèse fétichique ébaucha l'universalité subjective, graduellement effacée sous les tentatives théologiques, métaphysiques, et même scientifiques, de coordination objective. Tel est l'état normal de la logique humaine, quand nous avons entièrement accompli la préparation, plus sociale qu'intellectuelle, que devait offrir l'évolution collective entre le fétichisme et le positivisme. Il faut alors instituer le régime final d'après une régénération plus intellectuelle que sociale, où le positivisme absorbe le fétichisme en écartant le théologisme, qui ne doit désormais conserver qu'une existence historique, méritée par des services nécessaires quoique passagers. On peut ainsi résumer l'émancipation humaine d'après le classement systématique du culte avant le dogme, car un tel ordre répare

les déviations théologiques et reconstruit les habitudes fétichiques.

Sous ce régime, le sentiment, introduit dans la logique à la suite de l'imagination, y prend un irrévocable ascendant, que la raison sanctionne comme aussi favorable à son essor spécial qu'à l'unité générale. Une saine appréciation des conditions propres à l'élaboration mentale fait bientôt reconnaître les avantages intellectuels de la suprématie affective. Borné même à son office théorique, l'esprit y sent la puissance d'une synthèse qui facilite les inductions et les déductions en suscitant des rapprochements et fortifiant l'attention, d'après une digne similitude entre l'objet et le sujet. La logique religieuse, dégagée de l'empirisme scientifique, ne se restreint plus au domaine des hypothèses vérifiables, qui seul convenait à la préparation positive. Il doit être finalement complété par le domaine, beaucoup plus vaste et non moins légitime, des conceptions propres à développer le sentiment sans choquer la raison. Mieux adaptées à nos besoins moraux, les institutions de la vraie poésie sont aussi conformes que celles de la saine philosophie aux conditions intellectuelles de la synthèse relative. Elles doivent désormais obtenir autant d'extension et d'influence dans la systématisation logique, qui pourtant n'exposera jamais à confondre deux modes ouvertement consacrés l'un à la réalité, l'autre à l'idéalité.

Conformément à ce régime, le plan général de l'éducation positive, établi par mon principal ouvrage, place l'art avant la science, comme le culte au-dessus du dogme, de manière à prévenir les difficultés essentielles d'une telle régénération. Un profond essor sympathique, suivi d'une longue évolution esthétique, précède la culture théorique, et permet d'y faire spontanément prévaloir le sentiment, en tant que source normale de la systématisation. La vie active doit ensuite compléter et

développer l'appréciation d'un régime plus convenable à la pratique qu'à la théorie. Tout en facilitant les spéculations abstraites par le concours des images et des sentiments avec les signes, la logique religieuse est surtout propre à perfectionner les méditations concrètes, en leur procurant à la fois plus de grandeur, de précision, et de consistance. Étendue jusqu'aux approches de la maturité, l'éducation universelle doit naturellement consolider la régénération mentale, sous les impulsions successivement émanées du sentiment, de l'intelligence, et de l'activité, dont le concours préviendra toute déviation.

A l'âge pleinement viril, le développement du culte, surtout intime, vient habituellement préserver le vrai régime logique des perturbations surgies du mouvement pratique. Mieux appréciable dans l'état subjectif où nous sommes journellement placés par une digne adoration, le concours normal des sentiments avec les images et les signes y manifeste son aptitude nécessaire à diriger toute élaboration mentale. On reconnait à la fois l'assistance mutuelle et l'efficacité respective des trois éléments logiques envers des exercices immédiatement liés au perfectionnement moral. Une expérience continue nous rend ainsi familière la hiérarchie normale qui, d'après la constitution fondamentale de la nature humaine, place les sentiments au-dessus des images et les signes au-dessous, pour l'élaboration des pensées quelconques. Rationnellement appréciée, la pratique quotidienne du culte intime devient la meilleure préparation aux fonctions habituelles du vrai théoricien, dont les forces s'y trouvent développées et mieux dirigées.

Religieusement considérée, la logique positive fait profondément sentir que notre perfectionnement consiste surtout dans le progrès continu de l'assujettissement volontaire. Elle est directement destinée à discipliner le plus perturbateur des trois éléments humains, celui qui, né pour servir, aspire toujours à

régner, en vertu de sa participation nécessaire à la systématisation dont il se croit la source quoiqu'il n'y soit qu'agent. Pour régler l'esprit, il faut lui faire d'abord apprécier l'empire incontestable des fatalités extérieures, d'où son évolution normale peut graduellement parvenir à reconnaître la suprématie subjective des lois morales en s'y préparant d'après les lois intellectuelles. On doit regarder cette rénovation de l'entendement comme le nœud principal de la régénération finale, que caractérise une pleine soumission, seule base fixe de l'ascendant que l'altruisme doit normalement obtenir sur l'égoïsme. Sous l'aspect pratique, le cœur trouve moins d'embarras à faire dignement accepter sa suprématie par le caractère, qui, plus sage que l'esprit, dirige aisément sa principale activité vers le développement de l'empire intérieur, en plaçant la liberté dans l'amour.

Toutes les considérations précédentes ayant assez caractérisé les moyens et le but de la logique positive, il faut achever d'instituer l'état normal de l'entendement en déterminant la constitution fondamentale de la méthode universelle. Résultat nécessaire de l'ensemble de l'initiation humaine, la vraie méthode ne pouvait être systématiquement appréciée que d'après un suffisant essor de ses applications essentielles, tant poétiques que philosophiques, sous l'empirisme théologico-métaphysique. On la borna longtemps à la déduction, où les signes prévalent ; cette notion domina même les conceptions logiques du plus éminent des rénovateurs modernes. Néanmoins, dans sa construction mathématique, il systématisa les images, et sut dignement instituer l'induction, dont la destination supérieure se trouva simultanément proclamée par son principal émule ou collègue. Cette initiation ne pouvait cependant se compléter que quand le positivisme, aspirant à la synthèse universelle, institua la méthode subjective, en plaçant la construction du système

au-dessus de l'induction des principes et de la déduction des conséquences.

Faute d'une destination vraiment synthétique, l'essor scientifique ne put que très imparfaitement développer sa principale efficacité, consistant à manifester, par une suite suffisante d'exercices décisifs, tous les caractères essentiels de la saine méthode. On doit même reprocher à la culture mathématique d'avoir habituellement consacré les préjugés métaphysiques sur la suprématie de la déduction, en poursuivant des études où l'induction restait ordinairement inaperçue parce que la simplicité des phénomènes permettait d'induire sans effort. Ramenée à son véritable office sous l'impulsion sociale, la méthode universelle ne fut réellement sentie dans son ensemble que quand le sacerdoce du moyen âge entreprit de régler la vie humaine en systématisant l'altruisme autant que le comportait une synthèse radicalement égoïste. Cet effort contradictoire ayant bientôt avorté, le sentiment fut davantage repoussé du domaine logique, afin d'éviter le mysticisme graduellement résulté d'une tentative prématurée. Elle a pourtant préparé la régénération finale, soit en léguant aux âmes d'élite un précieux programme, soit en ébauchant des habitudes solitaires chez les populations ultérieurement préservées du protestantisme et du déisme.

On doit regarder l'essor esthétique, et surtout poétique, comme ayant davantage tendu vers la systématisation spontanée de la méthode universelle, tandis que l'existence pratique en faisait confusément sentir le véritable ensemble. Bientôt convergentes, ces deux impulsions, toujours secondées par l'influence féminine, préservèrent l'esprit moderne des plus graves déviations logiques que devaient y susciter la dégénération mystique de la sagesse catholique et la restriction abstraite du génie scientifique. Tous les chefs-d'œuvre poétiques font directement ressortir la partie supérieure de la méthode

universelle, en subordonnant la déduction et l'induction à la construction, spontanément devenue le principal effort de l'art et son mérite essentiel. Étendue de l'art général aux arts spéciaux, la logique esthétique fit graduellement surgir, à travers l'anarchie moderne, une appréciation confuse, mais profonde, du vrai régime de l'entendement humain, étroitement senti dans la logique scientifique. Néanmoins, deux évolutions également empiriques avaient besoin de se combiner pour conduire l'esprit moderne à systématiser la méthode universelle, dont l'une caractérisait l'institution subjective, pendant que l'autre élaborait les deux éléments de sa base objective. *Induire pour déduire, afin de construire* : telle est la formule générale de la logique positive, qui ne pouvait surgir que quand les besoins sociaux auraient assez manifesté l'urgence de la régénération occidentale. Rattachée à l'institution de la religion finale, la systématisation directe de la méthode universelle dut alors s'accomplir d'après l'ensemble des préparations développées sous l'anarchie moderne.

Nous devons regarder la fondation de la sociologie comme ayant naturellement suscité l'avénement de la vraie logique, en faisant nécessairement converger les impulsions incohérentes qui le préparèrent, et surtout en combinant la science avec la poésie. On ne pouvait étendre l'esprit positif jusqu'au domaine social, qui devait d'abord sembler essentiellement dynamique, sans accorder une attention décisive à l'évolution esthétique, où réside l'un des principaux éléments du mouvement humain. Bientôt l'appréciation historique de l'art conduisit à celle du sentiment, pour étudier la source et le but de l'élaboration poétique, toujours destinée à communiquer les émotions, surtout sympathiques. Il suffit alors qu'une angélique impulsion vînt moralement régénérer le fondateur de la sociologie, chez lequel l'appréciation esthétique servit ainsi de lien entre la pré-

paration de l'esprit et la suprématie du cœur. Tous ces mouvements devaient s'accomplir dans une même âme, où la plénitude spontanée du septicisme avait, de bonne heure, fait profondément sentir le besoin et la difficulté d'une vraie réorganisation spirituelle, d'abord philosophique, puis religieuse. Alors surgit, au centre de l'anarchie occidentale, le type systématique de l'existence normale, personnifiée chez le penseur que son initiation disposa le plus à l'essor révolutionnaire, dont sa jeunesse ne fut préservée que par la vénération.

D'après la préparation et l'avénement de la saine logique, on confirme la suprématie que sa systématisation reconnaît au sentiment, comme source et destination du travail intellectuel. On peut utilement compléter cette vérification par le contraste que fournit l'état habituel de la raison moderne, spontanément personnifié chez le plus éminent des esprits du second ordre. Chef d'une démolition radicale, il était personnellement au-dessus d'un tel office d'après la sagacité, la rectitude, et même l'étendue de son intelligence, aussi propre à la conception qu'à l'expression, et suffisamment assistée de la persévérance. Il ne manqua de profondeur et de consistance que par suite d'une insuffisance exceptionnelle des trois instincts sympathiques, et surtout de la vénération, source directe de toute vraie discipline. L'un des esprits les plus universels qui jamais aient surgi ne fut donc privé d'aptitude synthétique que faute d'être assez animé des sentiments sans lesquels l'intelligence et l'activité ne peuvent rien construire.

Appréciée dans son état systématique, la méthode universelle se trouve nécessairement composée de trois éléments : la déduction, l'induction, et la construction, dont la succession est représentée par leur classement, suivant l'importance et la difficulté croissantes. Nous pouvons immédiatement déduire quand les spéculations sont assez simples pour que leurs prin-

cipes soient spontanément saisissables. Graduée suivant la complication des phénomènes, l'induction prévaut si l'institution des points de départ offre plus de prix et d'embarras que le développement des conséquences. Elle constitue le principal élément de la méthode objective, et fournit sa transition directe vers la méthode subjective, surtout quand surgit la comparaison biologique. La filiation sociologique devient alors le premier état de la construction qui, dans la synthèse morale, doit finalement coordonner, sous le principe religieux, tous les matériaux successivement émanés de l'analyse théorique.

Rapprochée de la hiérarchie scientifique, cette hiérarchie logique ne semble pas offrir un suffisant parallélisme, quoique la règle encyclopédique y soit évidemment la même, suivant la simplicité décroissante et la dignité croissante des domaines correspondants. On peut aisément reconnaître que cette apparente discordance est seulement due à l'inégalité du développement; il suffit de distinguer les divers modes d'induction pour que la succession des sept degrés logiques devienne exactement conforme à celle des sept degrés scientifiques. Un reproche plus grave paraît d'abord résulter d'une insuffisante concordance entre la méthode philosophique et la méthode poétique, qui doivent toujours coïncider dans la logique religieuse. Toutefois, les deux marches ne semblent différer qu'en ce que la poésie, directement préoccupée de la construction, ne s'arrête point, comme la philosophie, au préambule inductif et déductif, quoiqu'elle en fasse continuellement un usage implicite. Elle dut ainsi, suivant son admirable privilège, annoncer, sous le régime préparatoire, l'état définitif de la raison humaine, systématiquement développé chez un sacerdoce aussi poétique que philosophique, quand les habitudes préliminaires sont assez régénérées.

Élargie autant que l'exige son universalité, la méthode po-

sitive est d'abord déductive, puis inductive, et finalement constructive ; sauf à dilater l'état intermédiaire suivant les besoins théoriques ; ce qui, dans l'état normal, ne convient qu'à l'âge scolastique. Sous cet aspect, les trois degrés essentiels de l'élaboration mentale sont en exacte harmonie avec ses trois moyens généraux. Tant que la déduction prévaut, l'assistance logique doit directement émaner des signes, où l'expression facilite la conception. Une induction difficile a surtout besoin des images, dont les signes deviennent les simples auxiliaires. Dès que la construction succède à la double préparation des matériaux, le sentiment doit ouvertement développer sa suprématie auparavant latente ; car il est seul apte à coordonner. Il préside directement à l'ensemble de l'élaboration inverse, où l'esprit descend graduellement du dedans au dehors. On voit ces deux marches respectivement prévaloir, l'une en philosophie, l'autre en poésie, pour expliquer le dogme ou compléter le culte.

Généralisée par les vrais philosophes, après avoir surgi chez les véritables poëtes, sous la secrète impulsion des dignes femmes, la méthode subjective termine l'initiation logique en plaçant la puissance synthétique au dessus des facultés analytiques. Elle institue la solution normale du problème humain en vouant la raison au service du sentiment, au nom même de l'extension respective des conceptions quelconques comme de leur liaison mutuelle. Notre préparation fournit une vérification générale de la supériorité logique d'un tel régime par le contraste permanent entre les constructions, aussi vastes que cohérentes, de la poésie, et les compositions, aussi dispersives que restreintes, de la science, même en mathématique. Il ne faut pas plus attribuer cette différence à la diversité des élaborations qu'à l'inégalité des génies. On voit la science, malgré la réalité des conceptions et la simplicité des phénomènes, rester aussi peu sys-

tématique que la théologie et même la métaphysique, parce que le domaine théorique s'y trouvait plus éloigné de la source affective de toute coordination.

Rapportées au perfectionnement moral, les entreprises de l'intelligence, comme celles de l'activité, prennent autant de consistance que de dignité, d'après un but qui dirige et soutient les forces quelconques en consacrant leur exercice. Il en est ainsi pour la coordination des moyens logiques par la suprématie du sentiment, qui prévient ou rectifie les divagations propres aux signes, et même aux images, dont la succession spontanée deviendrait souvent contraire à l'ordre extérieur qu'elle doit représenter. Cette présidence continue d'un instinct toujours synthétique fait aussitôt reconnaître combien les éléments du travail intellectuel restent au-dessous de leur destination subjective. Hors de nous, les signes sont autant, et même plus, phoniques que graphiques pour accomplir les communications ; tandis que, en nous, les formes servent seules à seconder la pensée, sans qu'elle ait encore utilisé les sons, qui pourtant se lient davantage à l'impulsion affective. Également restreintes, comme leur nom l'indique, les images restent purement visuelles, quoique tous nos souvenirs puissent pareillement acquérir l'intensité qui les rapproche des impressions correspondantes autant que le comporte l'état de raison.

Afin que la constitution logique soit assez caractérisée, elle doit être directement comparée à la construction générale de la synthèse subjective, indiquée dans la première partie de cette introduction. Nous pouvons rendre cette comparaison plus précise et plus décisive en réduisant cette synthèse à la suprême trinité qui la résume. Il devient alors possible d'instituer un parallélisme fondamental entre les trois auxiliaires de la pensée, signes, images, sentiments, et les trois objets de contemplation ou d'adoration, Espace, Terre, Humanité. Mais, pour que cette

correspondance soit suffisante, il faut, de part et d'autre, lier chaque terme à la méthode ou doctrine qu'il concerne. On doit toujours combiner les trois moyens avec les trois parties, déductive, inductive, constructive, de la méthode, et les trois domaines avec les trois parties, logique, physique, morale, de la doctrine.

De cette manière, un tel parallélisme peut également perfectionner les deux systématisations, en faisant mieux ressortir leur commune destination. On doit d'abord éprouver de l'embarras envers le début de cette comparaison, faute de saisir la relation spéciale entre les signes et l'Espace. Néanmoins, cette difficulté n'est due qu'à l'insuffisance des habitudes préliminaires quant à l'usage abstrait de l'Espace, resté toujours restreint aux spéculations géométriques, tandis qu'il peut également fournir un siége aux formules quelconques. Une équivalente préparation convient à la seconde comparaison, où les images ne semblent pas se rapporter spécialement à la Terre. Mais il suffit de considérer leur aptitude inductive pour reconnaître que, dans leur destination abstraite, elles doivent surtout concerner le siége matériel de l'existence humaine, puisqu'il fournit la plupart des impressions qui les suscitent.

Un examen général du travail intellectuel fait toujours apercevoir que les signes, outre leur efficacité directe pour la déduction, assistent surtout la pensée en rappelant les images ; comme celles-ci, malgré leur service inductif, la secondent principalement en réveillant les sentiments. Telle est la double expérience habituellement résultée du culte intime, où l'effusion avorte si les signes ne raniment pas les images ou celles-ci les sentiments. On doit pourtant reconnaître que les signes sont directement susceptibles de correspondre aux sentiments, quoique avec moins d'énergie et de fidélité, comme l'indiquent les cas dépourvus d'images. Pour que leur efficacité soit judicieusement

appréciée, il faut souvent leur attribuer une influence analogue à celle des images, surtout quand l'écriture les a rendus permanents. Il est impossible de concevoir l'harmonie humaine sans que nous soyons d'abord supposés réduits au sentiment qui nous domine au milieu des impressions extérieures. Elle exige ensuite l'intervention intermittente de l'intelligence et de l'activité qui, par les images et les signes, lient le dedans et le dehors, dont elles sont également dépendantes. Sous cet aspect, l'appareil mental exerce un double office, en incorporant au dedans les conceptions qu'il élabore d'après le dehors, et communiquant au dehors les résultats des influences qu'il reçoit du dedans.

Étendant à la trinité générale l'examen ainsi commencé par l'unité particulière, on doit d'abord résoudre la difficulté qu'y suscite la disparité des types. Si la Terre devient assimilable à l'Humanité d'après l'activité, que nous supposons accompagnée du sentiment sans y joindre l'intelligence, la simplicité du Grand-Fétiche contraste avec la composition du Grand-Être. Toutefois, la conformité se rétablit quand on a suffisamment égard à l'universalité nécessaire de l'existence matérielle. Il est clair que les propriétés essentielles sont directement relatives aux molécules, dont l'assemblage influe, non-seulement sur l'intensité des résultats, mais aussi sur leur production. Mieux appréciée, l'existence du Grand-Fétiche est donc réductible, comme celle du Grand-Être, à des organes indivisibles, qui ne peuvent développer leurs attributs que sous l'ascendant de l'ensemble, seul réel des deux parts. Alors la diversité des deux cas se borne à la perpétuité des éléments de l'un contrastant avec le renouvellement continu de ceux de l'autre. Rapproché de la différence qui concerne l'intelligence, ce contraste aquiert un tel empire qu'il empêchera toujours la confusion des deux existences, sans qu'il puisse jamais altérer les avantages propres à leur assimilation normale.

L'Espace exige et comporte une explication équivalente, mais plus difficile et plus importante, pour comparer au Grand-Être le Grand-Milieu, qui s'en trouve plus éloigné que le Grand-Fétiche. On pourrait diminuer l'intervalle en supposant que l'Espace était jadis actif, et même intelligent, d'après une facile extension de la fiction ci-dessus introduite envers la Terre. Guidées par la relativité subjective de la synthèse finale, la philosophie et la poésie doivent également repousser cette consécration du chaos théologico-métaphysique, qui ne pouvait convenir qu'à la synthèse préliminaire, toujours poussée vers la vaine recherche des causes. Il faut donc conserver à l'Espace l'existence purement passive, où le type humain se trouve réduit au sentiment, dont la suprématie constitue ainsi le seul attribut pleinement universel. Quoique cette fiction soit contraire à l'ordre matériel, qui représente toute existence comme douée d'activité, ce contraste fait mieux ressortir la nature purement subjective de l'élément le plus général du suprême triumvirat. Un tel milieu ne pourrait aucunement remplir son principal office, philosophique ou poétique, sans une immuabilité complète. Elle est naturellement conforme, soit à la sympathie qui caractérise le fluide universel, soit à la fatalité prépondérante dont il devient le siège subjectif.

Historiquement considéré, le triumvirat religieux systématise le développement continu de la vie subjective, spontanément surgie avec le fétichisme. Elle devint équivoque sous le théologisme, qui représentait comme extérieures des existences purement fictives. Réduites à leur influence réelle et durable, les habitudes polythéiques ont pourtant développé notre aptitude à vivre avec des êtres essentiellement créés par nous. On doit regarder le monothéisme, surtout occidental, comme ayant secondé cet essor en le systématisant d'après une concentration, plus apparente que réelle, où les existences idéales se rappro-

chent mieux du type humain quand les saints prévalent sur les anges. Sous l'impulsion du moyen âge, les dignes mystiques, réductibles au plus éminent, participaient à la fois de la femme et du poëte ; ils développèrent et coordonnèrent la vie subjective autant que le comportait la synthèse absolue.

Épurée et complétée par le positivisme, cette suite de préparations a profondément lié le régime de notre enfance à celui de notre maturité. Mais la synthèse relative peut seule consolider et développer l'essor direct de la vie subjective, en y dissipant à la fois tout scrupule et toute illusion. Un régime où nous devons habituellement vivre davantage avec nos ancêtres et nos descendants qu'avec nos contemporains exige que la religion soit radicalement empreinte de subjectivité.

Rien ne doit être négligé pour obtenir que la raison accorde au sentiment une obéissance qui ne saurait devenir complète et durable qu'autant qu'elle restera pleinement libre. On peut constamment craindre le renouvellement des intimes conflits qui devaient troubler l'installation de l'état normal après avoir longtemps retardé son avénement. Basées sur une apparente légitimité, les prétentions spontanées de l'intelligence à diriger la systématisation humaine pourraient toujours reprendre un dangereux essor si l'universelle suprématie du sentiment n'était pas consacrée d'une manière spéciale. Il faut que la principale conception religieuse fasse directement ressortir la sympathie comme unique source de l'unité générale, et spécialement de l'harmonie mentale. Nous n'avons besoin que de remarquer l'intermittence des fonctions, tant de conception que d'expression, attribuées à l'appareil spéculatif pour sentir qu'il en est seulement l'agent, et que leur principe réside dans la présidence continue du sentiment. Elle peut seule faire toujours converger les efforts intellectuels vers leur destination normale, consistant à seconder l'unité sympathique en liant l'homme à l'Huma-

nité par le développement de la vie subjective. Tous ces motifs seraient pourtant insuffisants pour que la raison restât dignement soumise au sentiment si la religion finale n'était pas constituée de manière à rendre spécialement familière la subordination normale.

Mais le triumvirat qui résume la synthèse subjective doit universellement développer les habitudes vraiment organiques en faisant directement apprécier la soumission comme la base de toute harmonie, même dans la nature morte. On voit l'intelligence concentrée chez le Grand-Être dont l'existence composée et l'évolution continue reposent uniquement sur l'amour universel, sans lequel son essor théorique serait aussi contradictoire que son efficacité pratique. Réduit à l'activité sympathique, le Grand-Fétiche seconde volontairement la suprême providence, sans exiger la discipline qu'elle applique à ses serviteurs, tant directs qu'indirects, pour prévenir les déviations de leur esprit. Toute l'existence du Grand-Milieu consistant dans la sympathie, aussi dépourvue d'activité que d'intelligence, sa soumission devient plus complète et plus facile, conformément à sa destination passive. Sous l'impression continue de ce triple tableau, l'âme du vrai croyant se trouve habituellement disposée à sentir que l'ordre universel fonde le perfectionnement sur l'obéissance pour instituer l'unité sympathique.

A cette conviction directe, la synthèse finale, profondément historique d'après son intime relativité, joint la confirmation indirectement résultée des vicieuses dispositions consacrées par la synthèse préliminaire en vertu de son caractère absolu. Même sous la concentration monothéique, où le conflit divin semblait dissipé, le théologisme érigeait en type suprême un être nécessairement capricieux, dont la notion contradictoire devait spontanément consacrer l'insubordination et l'égoïsme. Il n'appartenait qu'à la synthèse relative de proclamer une pro-

vidence constamment soumise à l'ordre en le perfectionnant toujours, de manière à faire partout prévaloir une digne obéissance. Cette unique intelligence n'étant point susceptible d'une suprématie illimitée, et sa puissance active restant même inférieure à sa portée spéculative, les imperfections naturelles doivent seulement susciter les progrès artificiels, sans inspirer ni récrimination ni dégradation. On ne peut davantage éprouver des émotions discordantes en contemplant les deux autres membres du triumvirat religieux, puisque leur nature aveugle, ou même passive, les préserve de tout reproche capable d'altérer l'adoration méritée par leur concours sympathique.

Nulle obscurité ne saurait maintenant entraver l'appréciation directe du parallélisme fondamental entre la constitution logique et la construction synthétique qui doivent également caractériser la subjectivité finale. Une inaltérable harmonie doit respectivement lier le Grand-Milieu, le Grand-Fétiche, et le Grand-Être, avec les signes, les images, et les sentiments, intellectuellement aptes à déduire, induire, et construire. Alors surgit l'institution finale de la véritable science, nécessairement composée de trois parties où l'esprit théorique apprécie successivement l'Espace, la Terre, et l'Humanité. Graduellement contractée pour la synthèse subjective, ma hiérarchie encyclopédique aboutit à ce classement, en combinant deux condensations séparément familières, d'abord entre les trois éléments de la philosophie inorganique, puis entre les trois domaines organiques. Elle est ainsi conduite à concentrer tout le savoir théorique dans la progression normale que forment la *Logique*, la *Physique*, et la *Morale* ; les deux premières sciences étant purement préliminaires, l'une en méthode, l'autre en doctrine, et la dernière seule finale.

On doit d'abord éprouver de l'embarras à changer la dénomination empiriquement usitée envers le point de départ, où

je cesse d'appeler *Mathématique* la science, essentiellement déductive, qui doit, à l'aide des signes, élaborer la méthode universelle, en étudiant l'Espace. Un nom justement blâmé par mon père spirituel exigeait une rectification plus complète que celle qu'il y produisit en écartant une pluralité qui consacre la vaine suprématie à laquelle aspire l'orgueil déductif. Bornées à la méthode, ces prétentions peuvent devenir légitimes, pourvu qu'on appelle *Logique* la science fondamentale, afin d'y mieux prévenir toute illusion envers la doctrine, suivant la coutume du moyen âge, prolongée chez le plus profond des philosophes britanniques. La réaction inverse de cette substitution purifie l'étude systématique de la méthode, en la rendant inséparable de celle d'une doctrine capable d'en manifester toutes les parties essentielles, qui ne peuvent surgir que d'après des exercices décisifs. Ils ne sauraient offrir la simplicité scientifique qui seule convient aux appréciations logiques qu'en étant toujours restreints à l'existence pleinement universelle, réduite à ses trois éléments nécessaires, nombre, étendue, mouvement. Elle a seulement besoin qu'une sagesse systématique y vienne artificiellement rattacher une suffisante manifestation des parties supérieures de la méthode, qui ne furent d'abord caractérisées que d'après des études moins générales et plus compliquées. Rien n'empêche de les incorporer à la science fondamentale, en utilisant, envers l'état normal, les rapprochements que le positivisme tire de l'ensemble du régime préparatoire, comme je l'ai, depuis longtemps, ébauché pour un traité didactique.

Coordination de la philosophie mathématique.

Appréciée directement, la condensation de la hiérarchie encyclopédique dans la progression Logique, Physique, et Morale y constitue la meilleure combinaison entre le point de vue historique et le point de vue dogmatique. Notre éducation théorique, tant individuelle que collective, doit toujours com-

mencer en élaborant la méthode fondamentale par l'étude abstraite de l'existence la plus simple et la plus universelle. Il faut ensuite apprécier assez les lois générales de l'ordre matériel pour que nous puissions, d'une part, le modifier sagement ou le subir dignement, et, d'une autre part, y concevoir la base nécessaire de l'ordre humain. Mais l'étude directe de celui-ci peut seule terminer l'initiation théorique, en faisant graduellement cesser l'abstraction, quand l'objet coïncide avec le sujet. Étendues à des domaines de plus en plus compliqués, la méthode et la doctrine ont ainsi subi l'élaboration qu'exige l'état normal, afin que l'intelligence, à la fois poétique et philosophique, assiste le sentiment pour diriger l'activité vers le service continu de l'Humanité.

Rapprochée de la théorie cérébrale, la progression encyclopédique représente, dans ses trois termes, les trois éléments de la nature humaine. On y trouve pourtant une inversion qui ne lui permet pas d'être assez conforme, soit à l'évolution spontanée du principe positif, soit à la constitution normale de la société finale. Bornée d'abord aux élaborations pratiques, la positivité s'étend ensuite aux spéculations théoriques, et pénètre enfin jusqu'au domaine moral. Une vicieuse transposition semble donc exister dans la progression encyclopédique, qui nous fait étudier les lois intellectuelles avant les lois physiques, quoique celles-ci dominent et précèdent celles-là. Sous l'aspect social, la classe contemplative sert normalement d'intermédiaire entre le sexe actif et le sexe affectif ; tandis que la progression encyclopédique place l'étude la plus abstraite avant la plus pratique. Toutes ces discordances, dont la nécessité n'est pas moins évidente que leur réalité, devront toujours rappeler la destination, essentiellement didactique, d'une telle marche. Elle prépare l'état normal de la raison humaine, en amenant l'intelligence au domaine moral, où s'opère la fusion entre la théorie et la

pratique, pour se vouer habituellement au principal perfectionnement, qui pourra quelquefois susciter des épisodes logiques ou physiques.

Cette inversion entre les deux premiers termes de la progression encyclopédique n'y devient didactiquement nécessaire que d'après sa conformité, statique et dynamique, avec l'ordre abstrait. Hors du domaine concret, quand on généralise afin de systématiser, on doit toujours commencer par les spéculations les plus simples, seules immédiatement accessibles à la positivité rationnelle. Il faut aussi regarder cette progression comme représentant l'appréciation abstraite de la constitution sociale, réduite à l'harmonie naturelle entre le sacerdoce et le gouvernement. Elle montre le pouvoir issu de l'activité doublement enveloppé du pouvoir spirituel, d'abord au nom du passé par l'intelligence, puis au nom de l'avenir par le sentiment. Nous devons systématiquement attribuer les lois morales au sacerdoce, quoique elles soient spontanément propres au sexe affectif : car leur coordination, d'où dépend leur efficacité politique, appartient autant à la classe contemplative que celle des lois intellectuelles, où réside son domaine naturel.

Historiquement considérées, les discordances accessoirement inhérentes à la progression encyclopédique doivent toujours rappeler le contraste nécessaire entre le concret et l'abstrait jusqu'à ce que l'initiation humaine se termine en conciliant les deux modes. Alors la poésie, irrévocablement combinée avec la philosophie, y fait pénétrer son génie synthétique et sa tendance sociale, tandis qu'elle en reçoit plus de consistance et de généralité. Religieusement vouées l'une et l'autre au perfectionnement moral, celle-ci développe les lois qu'il suit, et celle-là les sentiments qui l'inspirent. Préoccupées de leur office normal, elles oublient l'une sa sécheresse primitive, l'autre son empirisme initial. Elles se sentent mutuellement nécessaires

pour régler la vie humaine en disciplinant les volontés par un heureux mélange de conviction et de persuasion.

Il faut d'abord apprécier la progression encyclopédique comme devant graduellement élaborer la méthode universelle, dont la systématisation constitue le principal objet de l'éducation théorique. La science fondamentale, essentiellement vouée à l'étude de l'Espace, fait naturellement apprécier l'ensemble des procédés déductifs. Une sagesse artificielle y peut normalement introduire l'ébauche décisive de tous les modes d'induction, et même de construction. Spécialement élaborée par la science préparatoire, qui se consacre à l'étude abstraite de la Terre, la méthode inductive y développe ses moyens les plus généraux, dans l'observation astronomique, l'expérimentation physique et la nomenclature chimique. Toutefois, l'induction transcendante appartient à la science finale, où surgissent, pour l'appréciation systématique de l'Humanité, les deux modes, statique et dynamique, qui poussent l'investigation inductive vers sa destination constructive. Respectivement développées en biologie et sociologie, la comparaison et la filiation conduisent l'analyse abstraite jusqu'à sa terminaison synthétique. Élevée sur cette série de préparations objectives, la méthode subjective devient le suprême régulateur de l'entendement humain, en construisant la science, et par suite, l'art, directement propres au sentiment.

Mieux approfondie, la méthode finale ne diffère réellement des méthodes préliminaires que d'après une irrévocable subordination de l'analyse à la synthèse. Appréciée trop exclusivement, la construction semblerait exiger, comme l'induction et la déduction, un organe distinct et supérieur dans l'appareil cérébral. Elle n'y doit point occuper un siége spécial, quand on la regarde comme le résultat d'une heureuse combinaison, instituée sous la suprématie du sentiment, entre les deux élé-

ments connexes de l'intelligence. Sous cet aspect, la construction consiste dans une déduction transcendante, qui, fondée sur les inductions convenables, institue la synthèse subjective d'après l'élaboration analytique des matériaux objectifs. Toute la distinction se réduit à placer la déduction au-dessus de l'induction lorsqu'elle atteint son principal domaine, tandis qu'elle reste au-dessous tant qu'elle est restreinte à son exercice initial. Rapportée à sa vraie destination, la méditation déductive aspire toujours à construire en coordonnant, même quand elle se borne au champ préliminaire où surgit son essor abstrait. Obligée alors d'assister l'analyse au lieu de présider à la synthèse, elle attend que le domaine final développe son aptitude constructive, qui ne peut dignement s'appliquer qu'à l'ensemble et jamais aux parties quelconques.

Étudiée convenablement, la progression encyclopédique doit normalement représenter la succession des efforts par lesquels la raison humaine systématise son régime théorique pour le faire irrévocablement concorder avec son état esthétique. Le génie poétique se trouve naturellement placé, comme l'esprit féminin, au point de vue synthétique, où leur concours appelle le génie philosophique, que l'abstraction empêche d'y monter autrement que d'après une longue préparation. Il suffira toujours, pour caractériser cette supériorité spontanée, de rappeler l'incomparable composition où la poésie a tant devancé la philosophie sur la vraie théorie de la folie. Si la solution religieuse du problème humain commence, dans l'enfance, individuelle ou collective, en subordonnant l'égoïsme à l'altruisme, elle se poursuit, pendant l'adolescence, par la subordination théorique de l'analyse à la synthèse. Alors la vie active vient la compléter et la consolider, en subordonnant irrévocablement le progrès à l'ordre, quand la double préparation, d'abord affective, puis spéculative, n'a point avorté.

Bornée à l'essor abstrait, l'intelligence est placée dans une situation contradictoire, qui la rend essentiellement perturbatrice. Aspirant à dominer l'existence humaine, elle méconnaît l'universelle suprématie du sentiment, et dédaigne le but social qui peut seul diriger ses efforts en les consacrant. Tel fut le caractère habituel de l'évolution abstraite pendant les trente siècles de la transition, d'abord spéculative, puis active, enfin affective, qui dut conduire les occidentaux de la théocratie à la sociocratie. Il faut même regarder l'intelligence comme n'ayant été dans un état vraiment normal que sous le fétichisme, qui l'avait spontanément subordonnée au sentiment. Rapportée à sa destination, plus sociale qu'intellectuelle, la théocratie ne peut remplir sa mission politique qu'en procurant à l'esprit une domination oppressive, d'où résultèrent ses tendances perturbatrices chez les peuples échappés au joug sacerdotal.

On peut ainsi sentir combien était enracinée la déviation que le positivisme dut rectifier pour instituer l'état normal de l'entendement humain. Bientôt renaîtraient d'équivalentes aberrations si l'ensemble du régime final cessait d'entretenir la discipline théorique. Elle doit reposer sur une synthèse pleinement subjective, dont la prépondérance peut seule empêcher l'étude des lois d'aspirer à la systématisation objective vers laquelle tendit la recherche des causes. Il faut regarder une telle rechute comme toujours imminente, parce qu'elle résulte d'une disposition naturellement liée à l'essor abstrait, qui ne cessera jamais de convenir à l'éducation individuelle autant qu'à l'évolution collective. Religieusement instituée, l'abstraction ne doit prévaloir que pendant l'initiation théorique, et ne peut ensuite présider qu'à des travaux épisodiques, essentiellement réservés au sacerdoce.

Nous devons pourtant reconnaître que, dans cette mesure, elle restera toujours nécessaire à tous les esprits, dont aucun ne

sera normalement privé de l'instruction encyclopédique. On ne peut généraliser sans abstraire, ni systématiser qu'en généralisant; en sorte que la synthèse fétichique manquait de consistance et de généralité, parce qu'elle était purement concrète. Tel est encore l'état spontané de l'esprit féminin, et même du génie poétique, qui restent ordinairement incapables de motiver leurs meilleures inspirations, et de résoudre les plus dangereux sophismes, tant intérieurs qu'extérieurs. Avec le développement social, surgit et grandit le besoin de règles générales pour diriger la conduite d'après une appréciation réfléchie. Bientôt cette nécessité s'étend à la vie privée, devenue tellement complexe que les inspirations subites et spéciales des meilleurs sentiments ne sauraient la guider sans l'assistance de la raison systématisée. L'abstraction, et par suite l'analyse, sont donc indispensables pour consolider et développer la sagesse humaine, d'abord collective, puis individuelle. Elles doivent seulement rester propres à l'âge où s'élaborent les notions générales et coordonnées, afin de laisser prévaloir la raison concrète et synthétique pendant l'existence normale.

Dans tout le cours de l'initiation théorique, la sollicitude religieuse doit surtout l'empêcher de reproduire l'insurrection de l'esprit contre le cœur, fatalement liée à l'évolution collective. Il faut beaucoup compter, à cet égard, sur la préparation normale, d'abord affective, puis esthétique, des études scientifiques, et sur le préservatif continuellement résulté de l'essor croissant du culte intime. On doit pourtant reconnaître que ces influences seraient souvent insuffisantes contre les dangers, intellectuels et moraux, de l'abstraction analytique, si les fatales spéculations n'étaient instituées de manière à prévenir ou rectifier les vices qui leur sont propres. Sous prétexte, tantôt de dignité, tantôt de rationalité, l'esprit théorique s'efforce toujours d'éluder la discipline religieuse. Afin de surmonter ses

sophismes, elle doit pénétrer sur son propre terrain, pour le dominer aux titres même qu'il invoque dans sa révolte contre le cœur.

Armé de sa puissance synthétique, le sentiment peut dignement soumettre l'intelligence, du moins sous le régime de la foi démontrable, où les inépuisables subterfuges de la théologie et de la métaphysique sont radicalement discrédités. Car il n'appartient qu'au cœur de diriger une systématisation réelle, pour laquelle l'esprit doit seulement élaborer les éléments convenables en renonçant à les lier. Tous les témoignages que l'intelligence invoque afin de montrer sa force prouvent réellement sa faiblesse, surtout quand elle s'enorgueillit de la concentration qu'exigent les efforts théoriques. Il faut attribuer cette absorption à l'impuissance de l'esprit, qu'une plus grande énergie laisserait plus disponible; comme l'est le cœur en vertu de sa prépondérance spontanée, qui le rend toujours accessible à de nouvelles émotions au milieu de ses principaux élans. Fondée sur la synergie cérébrale, la concentration attribuée aux plus nobles efforts de l'intelligence se reproduit envers les plus grossiers besoins de la vie organique, chaque fois qu'ils exigent une assistance exceptionnelle du cerveau.

Graduellement appréciée, la suprématie intellectuelle des penchants convertit la région spéculative du cerveau, comme sa région active, en appendice nécessaire de la masse affective dont il est essentiellement composé. Rattachées à leur vraie source, les opérations de l'intelligence sont toujours inspirées, dirigées, et soutenues par le sentiment, tantôt égoïste, tantôt altruiste. A l'esprit seul, on ne doit attribuer que l'exécution d'un travail où les matériaux lui viennent du dehors et les forces du dedans, à peu près comme dans l'exercice des appareils sensitifs. Toutes les réclamations de l'intelligence, soit pour sa dignité, soit pour sa rationalité, doivent normalement aboutir

à sa libre subordination au sentiment, seul garant de ces deux attributs. On peut aisément le sentir en reconnaissant la prééminence des problèmes directement relatifs au cœur et l'incohérence des spéculations purement abstraites.

Étendue jusqu'au domaine moral, l'évolution théorique devient enfin satisfaisante, soit pour l'importance et la difficulté des doctrines, soit pour la plénitude et la rationalité des méthodes. Son état d'abstraction, alors réduit autant que possible, n'écarte que les diversités individuelles, dont la considération empêcherait d'instituer des notions et des règles communes à tous les hommes, ou du moins à tous les membres d'une même classe. Toutefois, l'individualisation finale de chaque opération du Grand-Être oblige la pratique à tenir empiriquement compte des différences que la théorie a dû négliger. Il survient ainsi des illusions ou des déceptions quand on passe de l'abstrait au concret, même dans le domaine le plus synthétique. On doit pourtant reconnaître qu'elles sont moins fréquentes et moins intenses qu'envers les domaines antérieurs, quoique la nature du cas extrême puisse souvent les rendre plus regrettables.

Ces indications font assez sentir que le régime sympathique de l'entendement humain surpasse autant en réalité qu'en utilité l'indépendance vaguement rêvée par l'orgueil métaphysique sous l'impulsion théologique. La dignité normale et la vraie rationalité de l'essor théorique ne peuvent résulter que de son institution religieuse pour la synthèse subjective. Alors cesse la distinction provisoire entre le domaine profane et le domaine sacré; car la suprématie n'est jamais contestée à l'étude directe du sentiment, que toutes les autres spéculations regardent comme leur destination finale et leur source initiale. Rapportées à la Morale, la Logique et la Physique se trouvent irrévocablement incorporées à la religion positive, avec les théories

biologiques, et même sociologiques, qui sont seulement liées de plus près au but commun de toutes les préparations abstraites. On doit pourtant regarder la position encyclopédique des deux sciences préliminaires comme les exposant davantage aux déviations analytiques, de manière à nécessiter une sollicitude spéciale pour prévenir ou réparer leur dégénération spontanée.

Obligées de recevoir d'en haut leur constitution normale, elles ne peuvent jamais contester la légitimité de la discipline qui les consacre au service du Grand-Être. Pour se rendre indépendantes de la science finale, les sciences préliminaires devraient se construire, par leurs propres forces, une destination, des méthodes, et des conceptions, que l'analyse a toujours reçues de la synthèse. Toute systématisation partielle étant nécessairement impossible, le génie analytique n'a jamais produit que des opuscules isolés, quelquefois accumulés en traité, sans former un véritable ensemble. A la science suprême, appartiennent, en vertu de sa plénitude synthétique, toutes les constructions réelles, soit qu'elles la concernent directement, soit qu'elle les destine à son préambule logique ou physique. Rien ne peut mieux vérifier cette nécessité que l'institution subjective de l'espace et de l'inertie en mathématique, du mouvement terrestre en astronomie, de l'atomisme physique et de la pluralité chimique, outre la série biologique et la progression sociologique.

Nous devrons toujours à cette dépendance le dénoûment systématique de la contradiction spontanée qui vicia tout enseignement scientifique jusqu'à l'avènement du positivisme. On y tentait d'exposer chaque science en l'isolant de sa source et de sa destination, pour attribuer son développement à des efforts purement individuels, dont l'adepte devait reproduire la prétendue succession. Mais le positivisme, développant sa réalité caractéristique avec son attribut d'utilité, fit irrévocablement prévaloir, dans toutes les études partielles, le point de vue vrai-

ment historique, toujours inséparable de la synthèse universelle, en substituant le relatif à l'absolu.

Subordonnée à la Morale, la Logique doit être systématiquement réduite aux spéculations qu'exige la préparation normale de la science finale, à laquelle il faut réserver l'élaboration décisive de toutes les conceptions, tant pour la méthode qu'envers la doctrine. A cette destination générale, la science fondamentale doit aussi joindre son lien spécial avec la science préparatoire, dont les notions propres doivent d'abord reposer sur l'ensemble des lois mathématiques. Bien appréciée, cette seconde mission ne modifie aucunement la première, assez large déjà pour embrasser toutes les spéculations vraiment durables sur le nombre, l'étendue, et le mouvement. Il faut même reconnaître que la destination, essentiellement logique, de la science fondamentale est plus propre que son application physique à consacrer les principales recherches qui durent empiriquement surgir de sa culture isolée. On verra, dans tout le cours de ce volume, que malgré l'immense épuration qu'il opère en mathématique, j'y systématise des spéculations réellement inutiles à la Physique, et qui sont seulement conservées en vertu de leur efficacité logique.

Élaborée conformément à sa constitution normale, la science mathématique, régénérée sous le nom de Logique, inspirera toujours aux vrais penseurs un intérêt analogue à celui qui soutint ses principaux promoteurs. Cette étude, où les signes prévalent, les a dignement combinés avec les images, depuis sa rénovation cartésienne. Rapportée à sa destination principale, elle attend du positivisme une plénitude systématique qui ne peut résulter que de sa relation directe au sentiment. Il y doit enfin pénétrer, d'abord au titre spécial de complément nécessaire, puis comme régulateur synthétique de toute élaboration analytique. Toutefois, la science fondamentale ne saurait,

même alors, aspirer au plein développement des moyens logiques et des méthodes universelles, qui ne peuvent obtenir leur principal essor que dans la science finale, sans excepter les signes et la déduction.

Il faut d'autant plus s'attacher à la régénération sympathique du début mathématique de la positivité rationnelle, que là surgit et grandit la fatale insurrection de l'esprit contre le cœur pendant la transition occidentale. Nul autre cas ne saurait offrir autant d'importance et de difficulté pour la systématisation finale des sciences préliminaires. C'est là que, sous l'attrait continu de succès plus faciles et plus complets, l'esprit théorique peut le plus se consumer en divagations aussi nuisibles à l'intelligence qu'au sentiment. Une discipline plus sévère et plus précise peut seule y prévenir ou réparer des égarements que la religion positive doit toujours flétrir en invoquant autant la raison que la morale. Le succès d'un tel contrôle est finalement assuré dans un régime où l'instinct public et la sagesse sacerdotale concourent à rapporter les travaux théoriques aux besoins sociaux. Toutefois, cette discipline sera spécialement garantie par l'institution normale de l'essor scientifique, borné toujours à l'âge didactique, sauf les épisodes discontinus que suscitera la vie active. On ne peut redouter l'extension abusive de ces travaux incidents, quand on pense qu'ils sont normalement concentrés chez un sacerdoce justement préoccupé de ses fonctions religieuses et de son intervention sociale.

La science de l'Espace, qu'il faut habituellement nommer *Logique* au lieu *Mathématique*, doit beaucoup différer, dans l'état normal, de ce qu'elle était pendant l'évolution préparatoire, surtout depuis l'anarchie rétrograde qui fut consacrée par le régime académique. Inutiles à la doctrine et nuisibles à la méthode, la plupart des spéculations qu'elle avait accumulées durent être radicalement écartées quand le positivisme

vint instituer la discipline théorique sous l'impulsion religieuse. Bornée aux recherches les mieux accessibles au mécanisme algébrique, la destination logique et l'application physique s'y trouvaient méconnues ou négligées. Elle était même devenue entièrement incapable de comporter une définition nette et générale, au milieu de ses prétentions, aussi vagues qu'oppressives, à la présidence encyclopédique. Rien ne peut mieux caractériser la dégénération mathématique que la consécration du calcul des chances et l'essor des intégrales définies. Toutes les conceptions essentielles de la géométrie et de la mécanique se trouvaient dissimulées, et même altérées, sous l'invasion algébrique. A son tour, le calcul avait déjà subi la réaction naturelle de la dégradation qu'il opérait dans le principal domaine mathématique : son oppressive suprématie tendait à dénaturer ses propres institutions, surtout en confondant ses deux modes nécessaires.

Dans l'ensemble du régime sous lequel s'accomplit l'initiation théorique, de telles déviations ne pourront jamais se reproduire si la science fondamentale est convenablement systématisée. Outre l'évolution affective et la culture esthétique qui les précèdent, les études abstraites sont protégées contre leurs dangers intellectuels et moraux par l'habitude continue du culte intime et la participation naissante au culte public. Même au début d'une telle instruction, la religion de l'Humanité place le second sacrement social pour faire spécialement sentir les vices propres à l'initiation théorique et la direction qui doit les prévenir ou les réparer. Avant d'aborder les études scientifiques, l'exposition de la philosophie première y fait directement présider la systématisation religieuse, en expliquant les quinze lois universelles, précédées de la théorie positive de l'abstraction et suivies de la hiérarchie encyclopédique. Rien ne manque alors pour que le sacerdoce enseigne dignement la science fondamentale,

pourvu qu'elle ait d'abord été convenablement régénérée par la synthèse subjective.

Étudiée suivant sa nature et sa destination, la Mathématique, ou plutôt Logique, peut être entièrement purgée de ses vices intellectuels et même moraux, essentiellement dus à l'indiscipline presque continue sous laquelle s'accomplit sa longue élaboration. Tous les reproches qui lui sont justement adressés par une sollicitude empirique, surtout respectable chez les mères, ne doivent réellement affecter que sa culture isolée, sans atteindre sa constitution normale. Il est vrai que la simplicité de son domaine l'éloigne plus qu'aucun autre des impulsions directement religieuses, toujours liées à la science finale. Cependant, si la science fondamentale reste contenue dans ses justes limites, la synthèse sympathique peut habituellement diriger sa culture normale. Apprécié conformément à sa destination finale, l'essor occidental du génie abstrait fit empiriquement surgir, en tous genres, des conceptions qui, convenablement épurées, s'incorporent à la systématisation positive, sans devoir jamais susciter des travaux continus, sauf les perfectionnements didactiques.

Voilà comment les deux premières années de l'instruction encyclopédique peuvent réellement suffire, avec deux leçons hebdomadaires, pour embrasser toutes les notions vraiment essentielles de la Logique, même en y joignant l'Astronomie qui les complète en les appliquant. Epurées par la religion qui les consacre, les spéculatious mathématiques perdent une sécheresse plutôt due à leur empirique isolement qu'à leur propre nature. Rien n'y doit empêcher d'utiliser la simplicité du domaine pour obtenir que le but général n'y soit jamais perdu de vue d'après une vicieuse concentration de l'esprit sur les moyens spéciaux. Toujours accessibles au sentiment, en vertu de leur réaction morale, ces études peuvent et doivent devenir aussi sympathiques que synthétiques. Une invocation sagement

continue de leur destination et de leur nature doit normalement suffire, quand elles sont régénérées, pour les empêcher de développer l'orgueil, et même de disposer à la sécheresse.

On peut concevoir l'intelligence comme simultanément susceptible de deux régimes distincts, suivant qu'elle est directement vouée, dans l'art, au service du sentiment, ou qu'elle ne l'assiste qu'indirectement, dans la science, en instituant le guide systématique de l'activité. Bien que le premier mode soit naturellement supérieur au second, en rationalité comme en dignité, celui-ci comporte une noblesse mentale, et même une consécration morale, fondées sur son concours nécessaire à l'établissement, et surtout à la consolidation, de l'unité. L'ordre universel, tant intérieur qu'extérieur, ne peut être assez apprécié que par la science, pour le subir dignement ou le modifier sagement. Il ne devient pleinement saisissable que si d'abord elle l'étudie envers les plus simples phénomènes, où le spectacle est plus fixe et plus régulier, quoique moins intéressant. Graduellement étendues aux domaines supérieurs, les spéculations scientifiques s'ennoblissent et se coordonnent en se compliquant. Elles doivent pourtant rester analytiques, jusqu'à ce quelles aient atteint leur destination morale, où la coïncidence entre l'objet et le sujet fait cesser l'abstraction et prévaloir la synthèse. Rapportées d'avance à ce but commun par leur institution subjective, elles peuvent toujours éviter les divagations spéciales, sans qu'elles doivent jamais aspirer à devenir aussi synthétiques que les spéculations esthétiques, dont la nature est essentiellement concrète.

Tous les contrastes entre les deux modes, ascendant et descendant, que comporte l'usage théorique de l'échelle encyclopédique peuvent être assez appréciés en comparant les marches opposées que suivirent ma fondation philosophique et ma construction religieuse. Institué, par mes opuscules primitifs, pour

sa destination sociale, le positivisme dut d'abord être essentiellement analytique, afin de poser sa base intellectuelle d'après la succession spontanée des travaux abstraits du génie occidental. Mais, en obtenant sans contestation l'ascendant résulté d'une telle progression, cette marche ne pouvait rien poser, en philosophie, que comme conclusion totale d'une longue suite de préparations scientifiques. On vit, au contraire, sous l'impulsion synthétique qui résulta d'une angélique influence, ma construction religieuse établir, dès son début, tous les principes essentiels que son essor systématique a successivement développés. Réunis par leur source affective, ils étaient spontanément inséparables; ce qui dut à la fois entraver leur première admission et faciliter leur ascendant final.

Une telle tranformation, accomplie dans un seul cerveau, permet de sentir comment l'institution subjective peut partout régénérer les conceptions émanées de l'élaboration objective, en vouant l'analyse au service de la synthèse. Notre étude successive de l'ordre universel doit ainsi devenir, dès son début, profondément sympathique, en développant les réactions morales qui lui sont propres. Il faut alors regarder la science fondamentale comme étant surtout destinée à constituer des types de fixité, d'évidence, et de régularité qui ne sauraient assez surgir ailleurs, et dont l'influence directe s'augmente de leur aptitude indirecte à perfectionner les autres études.

Suivant une telle attribution, la science peut, comme l'art, concourir à la solution radicale du problème humain, en facilitant, à sa manière, l'ascendant continu de l'altruisme sur l'égoïsme. Une digne soumission étant la base nécessaire du perfectionnement moral, il exige autant l'assujettissement du dedans au dehors d'après la foi que l'établissement de l'harmonie intérieure par l'amour. A la science la plus abstraite appartient surtout une telle aptitude; car elle tend directement

à discipliner le plus pertubateur des trois éléments humains, en faisant spontanément surgir, de son propre essor, l'irrésistible frein d'une pleine évidence. Vouée au domaine le plus simple et le plus général, elle y développe les lois intellectuelles en élaborant les lois physiques, et sa génération permet aussi d'y manifester les lois morales, comme source nécessaire de toute systématisation. Initiée par la Logiqne à l'appréciation normale de l'ordre fondamental, la raison abstraite, sans cesser d'être essentiellement analytique, peut toujours avoir dignement en vue sa destination synthétique, que lui rappellent, dès son début, ses réactions affectives. Tous ces priviléges permettent à la Mathématique régénérée plus d'extension didactique qu'à la Physique, et presqu'autant qu'à la Morale, dans l'ensemble de l'instruction théorique. Epuré convenablement, le domaine logique doit même embrasser des spéculations, surtout géométriques, qui s'y trouvaient étouffées ou dénaturées par les puérilités académiques.

Fondée sur une définition systématique, sa circonscription générale ne comporte aucune incertitude. Il est nécessairement composé de trois éléments, Calcul, Géométrie, et Mécanique ; puisque la seule existence commune à tous les êtres appréciables se réduit à trois attributs, nombre, étendue, et mouvement. D'après cette constitution, la science fondamentale reproduit, dans sa propre enceinte, le classement total de la hiérarchie encyclopédique, suivant la généralité décroissante et la complication croissante. Elle ne diffère de ce type que par une combinaison plus intime de ses trois éléments ; le plus simple ne peut ni ne doit être entièrement séparé des deux autres, quoique le plus compliqué puisse et doive rester pleinement distinct, sauf sa subordination normale. Son principal domaine consiste dans l'élément moyen, dont le premier fournit la base et le dernier le complément, comme l'indique la prépondé-

rance spontanée du mot *Géométrie* pour désigner l'ensemble de la science mathématique.

On peut utilement comparer cette constitution de la science fondamentale à celle de la science finale, où la biologie se mêle intimement aux deux autres études, tandis que la morale reste distincte, et la sociologie forme l'élément le plus décisif. Rapprochée de la science préparatoire, la Logique présente, comme la Morale, une composition plus homogène et plus systématique, quoique le classement suive partout la même règle. A tous égards, la Physique constitue l'élément le moins lié de la philosophie seconde, vu la diversité naturelle de ses aspects objectifs, dont la liaison est seulement subjective, malgré la dépendance réelle des domaines correspondants.

Rapportée à sa destination, où la méthode prévaut sur la doctrine, la Logique ne peut convenablement élaborer l'instrument intellectuel qu'en étudiant d'abord les lois numériques, puis les lois géométriques, enfin les lois mécaniques. Elle manifeste, par cette succession, la marche fondamentale de la raison abstraite, où chaque pas est précédé d'un plus simple, en remontant jusqu'au point de départ spontanément issu du génie scientifique de l'Humanité dans l'âge fétichique. Toujours l'initiation théorique de l'individu doit ainsi reproduire celle de l'espèce, mais en condensant et liant de plus en plus les diverses phases, pour que l'évolution acquière la rapidité nécessaire à l'éducation. A leur début, les études mathématiques comprenaient le même champ général qu'après leur essor complet, qui n'a pu que développer un domaine essentiellement immuable. Bien que l'anarchie moderne ait souvent suscité des tentatives au delà de ces limites, leur avortement a toujours confirmé la restriction nécessaire de la science fondamentale aux spéculations sur le nombre, l'étendue, et le mouvement. La discipline positive, en vouant la Logique à l'étude

systématique de l'Espace, se borne à promulger une loi qu'elle n'a point créée, et dont la réalité, tant subjective qu'objective, ressort de l'ensemble des essais propres à l'initiation humaine. Il suffit, pour la confirmer, de rappeler que, dans la meilleure des tentatives anomales, le principal géomètre du dix-neuvième siècle fournit, à travers l'anarchie académique, un admirable type du vrai génie mathématique sans perfectionner ni la thermologie ni la logique.

Guidée par l'ensemble des épreuves occidentales, la raison abstraite saura toujours restreindre son début analytique à l'immuable domaine qui suffit à sa destination normale, en écartant les excursions empiriques de l'âge indiscipliné. Réduit à son véritable office, le calcul introduit dans la géométrie et dans la mécanique une généralité systématique qui développe leur liaison mutuelle sans altérer leur essor respectif ni leur succession nécessaire. Il ne peut remplir cette mission, finalement devenue son principal attribut, que d'après sa propre division en deux modes généraux, respectivement voués, l'un aux valeurs, l'autre aux relations. Dans le premier seul consista longtemps son essor spontané, dont le caractère doit toujours prévaloir au début de l'initiation logique. On ne peut attribuer qu'à l'anarchie académique l'usurpation du domaine arithmétique par l'algèbre, au commun détriment de la doctrine et de la méthode.

Il faut cependant regarder ces abus comme une exagération empirique de la prépondérance systématique que le calcul algébrique doit conserver afin de coordonner la logique. Nous devons lui reconnaître, outre son origine abstraite et directe dans les questions numériques, une source concrète qui, quoique indirecte, le fit naturellement émaner des spéculations géométriques, et même aurait pu le faire aussi surgir en mécanique. Une complication notable oblige la détermination des

nombres inconnus à commencer par élaborer leur liaison aux nombres connus afin de mettre en évidence leur mode de formation, sans considérer d'autres valeurs que celles qui modifient les relations. L'évaluation devient ensuite le complément nécessaire d'un tel préambule, qui pourtant doit souvent constituer la principale partie du travail logique. Toutefois, les problèmes fort simples peuvent seuls permettre d'instituer une séparation complète entre les deux phases propres à toute question de nombres. On doit cependant distinguer, dans tous les cas, le point de vue arithmétique et le point de vue algébrique, qui, malgré leur mélange nécessaire, peuvent être normalement appréciés, suivant que chaque méditation concerne les valeurs ou les relations. Sous cet aspect, l'algèbre, née de l'arithmétique, s'y serait toujours subordonnée, faute d'une autre destination, si son origine géométrique ne l'avait graduellement investie d'une indépendance que l'anarchie moderne rendit également funeste aux deux souches.

Vue directement, la source concrète du calcul algébrique est aussi naturelle que l'abstraite, et même elle le fit plus tôt surgir, sous une forme méconnue. Il se distingue par une double indétermination, autant relative au degré qu'au genre de grandeur. Rapportée au premier attribut, sa filiation arithmétique est directement évidente, puisque l'élaboration des relations dispose à faire abstraction des valeurs. Géométriquement considérée, l'algèbre remplit un office équivalent, quand la méditation devient surtout déductive, d'après un suffisant concours de notions inductives. On voit ainsi les grandeurs devenir spontanément indéterminées en valeur sans perdre leur caractère concret, jusqu'à ce que, pour mieux déduire, l'esprit étende au genre l'abstraction d'abord limitée au degré, ces deux considérations étant également indifférentes à ce raisonnement.

Elles font respectivement surgir les deux formes générales que comporte toute relation précise, tantôt proportion, tantôt équation, suivant que l'algèbre émane de la géométrie ou de l'arithmétique. Malgré l'essor spontané du premier mode dans l'antiquité, la prépondérance que les modernes ont graduellement procurée au second est finalement conforme à la principale destination du calcul le plus abstrait, surtout en géométrie, depuis sa rénovation cartésienne. Un tel usage, étendu bientôt à la mécanique, annonce que l'office de l'algèbre concerne davantage la méthode que la doctrine, puisqu'on y préfère la forme la mieux adaptée au raisonnement universel. Là pourtant commence la déviation du calcul moderne, qui, transportant à la géométrie le mode issu de l'arithmétique, tend vers un essor indépendant de ses deux sources. On peut aisément reconnaître que cette aberration, qui nécessita l'épuration positive, fut seulement due à l'indiscipline métaphysique, sans être radicalement propre à la nature d'un tel instrument.

Graduellement soumis au régime philosophique que le moyen âge ébaucha, le calcul algébrique perfectionna la méthode sans altérer la doctrine, en subordonnant l'élaboration abstraite à sa destination concrète, d'abord géométrique, puis mécanique. Rapportées à leur but normal, les conceptions algébriques procurent à la science fondamentale un degré de liaison et de généralité qui serait autrement impossible, et sans lequel son office encyclopédique resterait insuffisant. Après que l'anarchie eut, au dix-neuvième siècle, pleinement développé les usurpations de l'algèbre, une réaction involontairement rétrograde s'efforça de rétablir, en géométrie, la culture isolée que la constitution cartésienne avait normalement éteinte. Voilà comment une empirique résistance tendit, au nom de la synthèse, vers un morcellement équivalent à celui qui précéda le régénérateur mathématique. Estimables par leurs motifs, ces faibles

efforts de l'instinct organique ne pouvaient aucunement surmonter l'ardeur révolutionnaire des algébristes ; et la logique flotta, comme toute l'existence occidentale, entre la rétrogradation et l'anarchie jusqu'à l'avénement du positivisme.

Une première appréciation fait ainsi voir, dans la décomposition générale du calcul, la condition fondamentale de la systématisation mathématique. Toute la philosophie consiste, envers la science initiale, comme dans l'ensemble du domaine intellectuel, à constituer une harmonie durable entre l'abstrait et le concret. Il y faut toujours subordonner les moyens au but, sans que leur développement normal se trouve aucunement restreint. La régénération cartésienne fut admirablement propre à concilier ces deux besoins, quoique l'anarchie moderne l'ait bientôt tournée vers l'usurpation algébrique, surtout depuis le complément infinitésimal, quand la mécanique cessa d'absorber l'essor abstrait. Avec la destination continue qu'il procurait à l'algèbre, l'incomparable fondateur de la philosophie mathématique a suscité le perfectionnement général des spéculations abstraites, en y combinant les signes avec les images, auparavant bornées à la géométrie. Rien n'a plus influé qu'une telle institution sur l'avénement du calcul infinitésimal, faute duquel la rénovation cartésienne serait devenue essentiellement insuffisante. Elle y dispose doublement, soit en généralisant les conceptions algébriques, soit en développant leur destination géométrique, sans que l'application mécanique ait pu notablement affecter un tel essor.

Il serait maintenant superflu d'insister davantage sur la coordination générale de la philosophie mathématique, ainsi résultée d'une intime combinaison entre le calcul et la géométrie, en isolant à leur suite la mécanique. L'efficacité spéciale de ce dernier élément consiste surtout à constituer à la fois la limite normale de la logique et son lien direct avec la physique. Étudié

convenablement, cet extrême domaine de l'esprit mathématique comporte, en outre, une réaction intellectuelle, et même morale, qui sera soigneusement caractérisée au dernier chapitre de ce volume.

D'après cette appréciation, on ne doit pas s'étonner que la philosophie mathématique ait été fondée avant que la mécanique eût pris son essor définitif. Outre qu'il supposait celui des deux autres éléments, il exigeait aussi qu'ils fussent déjà combinés, afin que leur concours fournît une impulsion capable de surmonter les difficultés propres à l'institution de la théorie générale du mouvement. Nulle autre étude mathématique n'avait autant besoin de la méthode infinitésimale, qui ne pouvait y suffire sans le calcul correspondant, essentiellement résulté de la géométrie cartésienne. Après que la mécanique eut pleinement surgi, sa réaction générale n'altéra point la constitution antérieure de la logique, quoique sa culture spéciale ait beaucoup développé le calcul en lui fournissant un nouveau champ, où cependant il n'a jamais trouvé le germe d'aucune conception. Rien n'est plus propre à confirmer la profonde justesse de la concentration cartésienne de la science fondamentale dans la combinaison systématique entre l'algèbre et la géométrie.

Afin que cette constitution soit assez caractérisée, il faut d'abord apprécier la division essentielle de la géométrie, qui correspond à sa liaison au calcul, puis sa division secondaire, d'où résulte sa relation logique avec la mécanique. Vu leur hétérogénéité radicale, les deux principaux éléments du domaine mathématique n'ont pu se combiner qu'après s'être séparément développés. Rien ne saurait dispenser l'initiation systématique de reproduire, à cet égard, l'évolution spontanée, quoique ce double préambule puisse et doive moins durer chez l'individu que dans l'espèce. Il institue, entre le pur domaine arithmétique et le principal domaine géométrique, deux études successive-

Bornée à l'essor abstrait, l'intelligence est placée dans une situation contradictoire, qui la rend essentiellement perturbatrice. Aspirant à dominer l'existence humaine, elle méconnait l'universelle suprématie du sentiment, et dédaigne le but social qui peut seul diriger ses efforts en les consacrant. Tel fut le caractère habituel de l'évolution abstraite pendant les trente siècles de la transition, d'abord spéculative, puis active, enfin affective, qui dut conduire les occidentaux de la théocratie à la sociocratie. Il faut même regarder l'intelligence comme n'ayant été dans un état vraiment normal que sous le fétichisme, qui l'avait spontanément subordonnée au sentiment. Rapportée à sa destination, plus sociale qu'intellectuelle, la théocratie ne peut remplir sa mission politique qu'en procurant à l'esprit une domination oppressive, d'où résultèrent ses tendances perturbatrices chez les peuples échappés au joug sacerdotal.

On peut ainsi sentir combien était enracinée la déviation que le positivisme dut rectifier pour instituer l'état normal de l'entendement humain. Bientôt renaîtraient d'équivalentes aberrations si l'ensemble du régime final cessait d'entretenir la discipline théorique. Elle doit reposer sur une synthèse pleinement subjective, dont la prépondérance peut seule empêcher l'étude des lois d'aspirer à la systématisation objective vers laquelle tendit la recherche des causes. Il faut regarder une telle rechute comme toujours imminente, parce qu'elle résulte d'une disposition naturellement liée à l'essor abstrait, qui ne cessera jamais de convenir à l'éducation individuelle autant qu'à l'évolution collective. Religieusement instituée, l'abstraction ne doit prévaloir que pendant l'initiation théorique, et ne peut ensuite présider qu'à des travaux épisodiques, essentiellement réservés au sacerdoce.

Nous devons pourtant reconnaître que, dans cette mesure, elle restera toujours nécessaire à tous les esprits, dont aucun ne

sera normalement privé de l'instruction encyclopédique. On ne peut généraliser sans abstraire, ni systématiser qu'en généralisant; en sorte que la synthèse fétichique manquait de consistance et de généralité, parce qu'elle était purement concrète. Tel est encore l'état spontané de l'esprit féminin, et même du génie poétique, qui restent ordinairement incapables de motiver leurs meilleures inspirations, et de résoudre les plus dangereux sophismes, tant intérieurs qu'extérieurs. Avec le développement social, surgit et grandit le besoin de règles générales pour diriger la conduite d'après une appréciation réfléchie. Bientôt cette nécessité s'étend à la vie privée, devenue tellement complexe que les inspirations subites et spéciales des meilleurs sentiments ne sauraient la guider sans l'assistance de la raison systématisée. L'abstraction, et par suite l'analyse, sont donc indispensables pour consolider et développer la sagesse humaine, d'abord collective, puis individuelle. Elles doivent seulement rester propres à l'âge où s'élaborent les notions générales et coordonnées, afin de laisser prévaloir la raison concrète et synthétique pendant l'existence normale.

Dans tout le cours de l'initiation théorique, la sollicitude religieuse doit surtout l'empêcher de reproduire l'insurrection de l'esprit contre le cœur, fatalement liée à l'évolution collective. Il faut beaucoup compter, à cet égard, sur la préparation normale, d'abord affective, puis esthétique, des études scientifiques, et sur le préservatif continuellement résulté de l'essor croissant du culte intime. On doit pourtant reconnaître que ces influences seraient souvent insuffisantes contre les dangers, intellectuels et moraux, de l'abstraction analytique, si les fatales spéculations n'étaient instituées de manière à prévenir ou rectifier les vices qui leur sont propres. Sous prétexte, tantôt de dignité, tantôt de rationalité, l'esprit théorique s'efforce toujours d'éluder la discipline religieuse. Afin de surmonter ses

On doit regarder la principale difficulté de la géométrie comme concernant ses recherches les plus usuelles, les questions directement relatives à la mesure, envers laquelle l'étude des propriétés de chaque figure n'est réellement que préparatoire. Rien ne peut mieux caractériser l'incomparable génie du plus grand géomètre de l'antiquité que ses admirables travaux sur les rectifications, les quadratures, et les cubatures. Bien que ses solutions fussent toujours spéciales, leur comparaison suffisait pour disposer à rendre les méthodes aussi générales que les questions. Il était donc naturel que la rénovation cartésienne fût surtout dirigée vers de tels problèmes, aussitôt que sa marche serait assez manifestée par les spéculations préliminaires. Ses tentatives à cet égard firent graduellement surgir l'algèbre transcendante, pour compléter et systématiser la méthode infinitésimale, sur laquelle la géométrie ancienne avait nécessairement fondé toutes les solutions de ce genre.

Mesurer l'étendue, c'est toujours réduire les comparaisons de longueur, d'aire, et de volume à de simples comparaisons de lignes droites ; ce qui ne présente que des difficultés secondaires envers les figures rectilignes, que la géométrie dut d'abord considérer. Elle ne trouve de graves embarras que dans l'extension nécessaire de ces questions aux figures curvilignes, où réside son principal domaine. La méthode infinitésimale fut spontanément instituée afin de surmonter ces difficultés en ramenant les cas les plus compliqués aux cas les plus simples, par la réduction idéale des formes quelconques à leurs éléments infiniment petits, toujours supposés rectilignes. On peut regarder l'institution infinitésimale comme équivalent, en Logique, à ce que fut, en Physique, l'institution corpusculaire, quelques siècles auparavant : la destination et la légitimité sont essentiellement analogues envers ces deux conceptions. Dans l'usage de cette méthode, la géométrie ancienne n'employait, selon sa

nature, que des artifices spéciaux pour l'élimination finale des éléments auxiliaires ainsi substitués aux grandeurs directes. Il fallut donc instituer un nouveau calcul afin que cette élimination pût acquérir la régularité qu'exigeait la généralisation moderne de la méthode primitive. Alors surgit l'algèbre leibnitzienne, complément nécessaire de la géométrie cartésienne, qui, ne pouvant autrement remplir son principal office, serait sans cela restée toujours restreinte aux spéculations préliminaires, quoiqu'elle en fît spontanément sentir l'insuffisance.

Bientôt étendue à la mécanique, dont l'essor attendait une telle méthode, l'institution infinitésimale acheva de constituer la philosophie mathématique en simplifiant et généralisant la relation de l'abstrait au concret. Une réduction systématique des cas composés aux cas simples devenait de plus en plus nécessaire à mesure que la Logique s'approchait des limites normales de son vrai domaine. Étendue à la théorie du mouvement, l'algèbre transcendante s'y trouva bientôt impuissante envers les questions spéciales, mais en conservant sa précieuse aptitude à développer et coordonner les spéculations générales, qui constituent le principal objet de la mécanique rationnelle. Née de la conception cartésienne, l'institution leibnitzienne conduisit ainsi l'esprit mathématique jusqu'à la coordination lagrangienne du dernier élément de la Logique. On put alors regarder la science fondamentale comme irrévocablement établie, puisqu'elle avait successivement élaboré les trois parties essentielles de son domaine normal, en ne laissant à désirer qu'une systématisation inséparable de la synthèse universelle qui devait bientôt surgir.

Ramenée à son véritable office, l'algèbre, convenablement subordonnée à la géométrie, devient, sous la discipline religieuse, un instrument de rationalité destiné surtout à lier entre eux les trois éléments de la Logique. On voit ainsi le nom-

bre, l'étendue, et le mouvement susciter des spéculations profondément connexes, malgré leur hétérogénéité naturelle, insurmontable sans un tel secours. Mais la transformation des questions concrètes en recherches abstraites devient illusoire, même en géométrie, envers les solutions spéciales : elle n'est pleinement efficace qu'à l'égard des appréciations générales, qui suffisent pour élaborer la méthode universelle. A ce point de vue, la constitution mathématique doit être vraiment satisfaisante aussitôt que la synthèse subjective l'a systématisée en l'épurant. Notre initiation théorique y trouve le meilleur type de la véritable rationalité quand l'abstraction s'y borne à généraliser les inductions et coordonner les déductions afin d'élaborer la méthode universelle en construisant des doctrines suffisamment simples. Un tel système représente l'ensemble de la synthèse subjective, résumé dans la trinité positive, dont les membres correspondent spécialement aux éléments de la Logique, où le Calcul se rattache à l'Espace, la Géométrie à la Terre, et la Mécanique à l'Humanité. Sous le régime synthétique, la science fondamentale acquiert la consistance et la dignité que l'empirisme analytique ne put jamais lui procurer.

Elle se trouve ainsi préservée des divagations et des usurpations qui troublèrent son évolution spontanée et compromirent sa principale destination. Son développement doit être normalement restreint aux spéculations capables de caractériser la méthode positive sous tous ses aspects essentiels, comme déductive, inductive, et finalement constructive, en subordonnant l'analyse à la synthèse. Toutes les grandes conceptions n'y peuvent réellement avoir d'autre but, et tous les travaux secondaires au delà de cette mesure y sont seulement destinés à la science suivante. A ce titre, ils doivent mieux figurer en Physique, surtout céleste, où leur usage se subordonne à leur office, sans altérer la constitution systématique de la Logique.

Rien ne peut dès lors susciter l'encombrement du domaine mathématique par les abstractions, aussi dépourvues de rationalité que de dignité, qu'y fit longtemps prévaloir l'anarchie académique, chez des esprits incapables d'un meilleur exercice.

Sous aucun des régimes propres à l'initiation humaine, l'intelligence ne put être vraiment disciplinée, à partir de l'état théocratique, qui, l'appelant à dominer avant qu'elle fût développée, vicia tout son essor préliminaire. Obligée d'abstraire pour généraliser afin de systématiser, la raison théorique ne pouvait dignement surgir que dans le plus simple domaine, où la spontanéité des inductions développe l'art déductif sans le subordonner à des constructions d'abord impossibles. Cette étude spéciale des seuls attributs susceptibles d'une pleine universalité ne pouvait cependant manifester sa destination logique que d'après une suffisante extension de la méthode positive à tous les ordres naturels. Il était donc inévitable que la Mathématique restât longtemps bornée à son office scientifique, qui la fit bientôt usurper et divaguer, en abusant de la domination normale des lois correspondantes sur toutes les économies moins générales et plus compliquées. Elle échappa spontanément à la discipline ébauchée au moyen âge, où même elle fournit la source latente des aspirations continues de l'intelligence contre un régime incompatible avec l'essor rationnel. Tous les ravages de l'anarchie mathématique résultèrent de l'office scientifique, qui suscita le matérialisme théorique, consistant à faire partout prévaloir les études inférieures sur les supérieures, en invoquant l'universalité des lois les plus grossières. Alors la régénération de la science fondamentale se résume en lui transférant le nom de *Logique*, qui la discipline en la consacrant à l'élaboration positive de la méthode universelle pour construire la synthèse subjective.

CHAPITRE PREMIER.

CALCUL ARITHMÉTIQUE.

Appréciation générale.

Avant que le langage soit assez complet pour manifester et seconder l'essor spéculatif, les conceptions numériques forment le début nécessaire de l'évolution abstraite, tant individuelle que collective. Dans sa maturité, l'esprit humain systématise et développe ce point de départ spontané, qui fut de plus en plus méconnu pendant tout le reste de l'initiation théorique. On ne peut le bien apprécier qu'en déterminant la nature et la destination de la Logique, avec plus de précision que n'en comportait l'introduction que je viens d'achever. Rapportée à la définition systématique que j'ai d'abord posée, la composition ci-dessus assignée à la science fondamentale ne semble pas suffisamment motivée. Elle ne peut être assez justifiée que d'après un examen plus direct et plus spécial de la première phase de l'éducation encyclopédique.

L'ensemble d'antécédents sous lequel s'accomplit cette préparation exige d'abord une appréciation complète. Il consiste surtout dans l'évolution affective à laquelle est essentiellement consacrée la première enfance, où s'élabore spontanément le principal élément logique. Bientôt l'essor esthétique, qui carac-

térise la seconde enfance, vient graduellement assister les sentiments par les images, d'après un suffisant concours d'impressions de tous genres. Rattachée à cette double préparation, l'initiation théorique, systématiquement accomplie pendant l'adolescence, achève d'instituer la logique universelle en y développant l'emploi des signes. On inaugure cette phase finale de l'éducation proprement dite par deux préambules ci-dessus rappelés, l'un religieux, l'autre philosophique, respectivement destinés à faire convenablement prévaloir l'instinct sympathique et l'esprit synthétique.

Fondée sur de tels antécédents, l'initiation encyclopédique doit surtout reprendre, en sens inverse, l'élaboration logique, afin de systématiser une marche qui ne pouvait d'abord être que spontanée. On y voit successivement prévaloir les signes, les images, et les sentiments, à mesure que les spéculations se compliquent et s'ennoblissent, en montant les trois degrés généraux de la hiérarchie théorique. Le terme d'une telle préparation consiste à faire pleinement concorder l'éducation systématique et l'évolution spontanée, respectivement caractérisées par leurs marches, objective et subjective, l'une analytique, l'autre synthétique. Il faut regarder l'essor continu du culte intime pendant l'adolescence comme ayant alors pour principale destination de fournir le type distinctif de l'état final auquel aspire une initiation où l'analyse prépare la synthèse. Elle doit toujours tendre à systématiser le régime logique qui fait habituellement prévaloir les sentiments sur les images et celles-ci sur les signes, conformément au modèle instinctivement développé dans la prière quotidienne.

Reconstruire systématiquement la rationalité spontanée de la première enfance : telle est la principale destination de la préparation encyclopédique qui distingue l'adolescence. Avec tous les avantages qui lui sont propres, cette initiation offre de graves

dangers, surtout résultés du renversement radical qu'elle fait nécessairement subir à la marche primitive de l'entendement. Graduellement étendue à des domaines plus compliqués et plus nobles, l'élaboration théorique tend à réparer les ravages auxquels sa marche a directement exposé l'esprit et le cœur. Il faut pourtant reconnaître que le mal subsiste tant que la préparation n'est pas poussée jusqu'au terme où l'analyse aboutit à la synthèse. On doit donc regarder l'éducation encyclopédique comme radicalement avortée quand elle reste inachevée. Ne pouvant atteindre son but essentiel que dans sa dernière phase, elle devient plus nuisible qu'utile quand elle n'aboutit point à la morale. Elle ne saurait dès lors servir qu'à titre d'instruction, pour fournir à l'activité des lumières spéciales, sans diriger l'intelligence vers la systématisation de la conduite générale spontanément inspirée par le sentiment.

Étudiée dans cet esprit, la Logique est surtout destinée à préparer la construction de la Morale en élaborant la méthode universelle d'après les plus simples spéculations. Son office envers la Physique concerne essentiellement la doctrine, pour établir les lois les plus générales de toute existence, qui dominent celles de l'ordre matériel. Cette attribution scientifique devient normalement secondaire comparativement à la destination logique, qui doit seule régler la constitution mathématique. La science fondamentale contracte, par la méthode, une liaison directe avec la science finale, à laquelle la doctrine ne la rattacherait qu'indirectement. A la fois consacrée et disciplinée d'après une telle relation, c'est de là que dépendent le choix et le développement des principales théories qui conviennent à sa composition finale. Voilà comment elle comporte un traité plus condensé que celui de la science préparatoire, quoique toutes deux occupent à peu près le même temps dans la durée normale de l'éducation encyclopédique. On doit davantage con-

tracter la méthode que la doctrine quand on accomplit leur explication écrite, tandis que la disposition inverse convient à leur enseignement verbal, où les préceptes logiques exigent plus d'exercice que les notions scientifiques.

Dans un moindre degré, la science préparatoire comporte une appréciation finale essentiellement analogue à celle de la science fondamentale. Un examen vraiment philosophique de sa constitution normale conduit à reconnaître que l'importance théorique de la Physique concerne davantage la méthode que la doctrine. La plupart des notions qui la composent offrent peu d'intérêt scientifique pour la connaissance de l'ordre que nous devons subir ou modifier, et comportent surtout une utilité logique en suscitant l'élaboration décisive de l'induction universelle. C'est dans la Morale que la doctrine prévaut sur la méthode, malgré l'extension qu'y reçoit celle-ci, parce que l'initiation encyclopédique y trouve sa terminaison nécessaire. Elle n'a plus à préparer des spéculations supérieures, et les théories y sont directement rapportées à leur destination pratique.

On doit donc regarder les sept années de l'éducation encyclopédique comme principalement consacrées à l'élaboration de la méthode, les deux dernières étant seules vouées à la doctrine directement propre à guider l'existence normale. Rapportée au type logique spontanément émané du culte, cette étude du dogme ne semble pas offrir une importance proportionnée au temps qu'elle absorbe, et capable de compenser les dangers qu'elle suscite. Dans les prières quotidiennes, l'ensemble de la méthode positive se trouve mieux senti qu'il ne peut l'être d'après cette longue suite d'instructions théoriques. Il faut aussi reconnaître que la préparation encyclopédique de l'individu diffère de celle de l'espèce, en ce que celle-ci fut surtout destinée à developper les forces intellectuelles, tandis que celle-là

doit essentiellement régler leur usage. Nul exercice théorique ne saurait autant convenir à l'intelligence que l'habitude des efforts journellement suscités par le culte intime et l'existence pratique. A la vérité, cet essor directement relatif aux problèmes les plus importants et les plus difficiles ne put être institué pour l'individu que d'après la préparation encyclopédique que l'espèce avait d'abord subie. Le régime final de l'entendement humain, fondé sur l'ensemble des évolutions préliminaires, doit paraître ainsi dispensé de la reproduction personnelle d'une élaboration sociale dont les principaux résultats sont immédiatement transmissibles.

Beaucoup de recherches, surtout mathématiques, qui furent réellement nécessaires à l'initiation collective, doivent être normalement écartées de la préparation individuelle, outre les divagations propres à l'anarchie moderne. Une telle épuration peut seule permettre de condenser en sept années de leçons peu fréquentes une évolution dont l'accomplissement original exigea les trente siècles de la progression occidentale, d'après le point de départ fétichique et théocratique. Toutefois, les principales phases de ce long essor seront toujours reproduites dans l'éducation normale, sauf la rapidité que l'usage systématique de la foi positive doit habituellement procurer à l'initiation théorique des vrais croyants.

On peut finalement regarder l'évolution encyclopédique comme ayant pour but général de systématiser la vie humaine, affective, spéculative, active. C'est seulement à ce titre que cette longue et difficile préparation restera toujours nécessaire à l'individu de même qu'elle le fut d'abord à l'espèce. Tous les exercices spontanément résultés du culte, de l'art, et de l'industrie, quelque essor qu'ils procurent aux forces intellectuelles, sont radicalement incapables de suppléer à l'initiation théorique pour la systématisation de l'existence humaine. Une

évolution abstraite peut seule permettre à la vraie sagesse de réaliser ce complément nécessaire de chaque préparation normale. Bornée à la culture concrète, la raison resterait toujours incapable de consistance et de régularité, suivant le type journellement manifesté par les poëtes, les femmes, et les prolétaires, avant leur régénération. Rien ne peut mieux distinguer le positivisme et le fétichisme que l'opposition nécessaire entre la systématisation finale et la spontanéité primitive. Également synthétiques, d'après une équivalente prépondérance du cœur sur l'esprit, les deux états extrêmes de l'humanité ne sont profondément différents qu'en ce que l'un devient systématique tandis que l'autre reste spontané.

Nous pouvons surtout apprécier l'éducation encyclopédique en comparant son efficacité logique à celle du culte intime qui doit toujours l'accompagner. Obligé de rester concret, le culte, même assisté par l'art, quelque essor qu'il fasse spontanément subir à la méthode positive, ne saurait la systématiser, puisque l'objectivité n'y vient jamais compléter la subjectivité. Bien qu'il doive finalement devenir abstrait, il ne peut, sous ce dernier mode, développer son efficacité normale que chez les âmes dignement élaborées dans le noviciat encyclopédique. Les meilleurs cœurs, quand ils sont entièrement étrangers aux réactions morales de l'initiation théorique, ne sauraient assez goûter les émotions propres à l'adoration systématique du Grand-Être. Elle ne peut pleinement convenir aux jeunes disciples de l'Humanité que lorsqu'ils ont dignement achevé leur préparation encyclopédique, quoique leur libre assistance aux fêtes sociolâtriques doive auparavant les disposer au culte final.

Historiquement considéré, l'essor théorique a graduellement accompli la transition fondamentale entre le fétichisme et le positivisme, également méconnus par le théologisme qui les sépara dans l'évolution occidentale. Une équivalente appréciation

convient davantage à l'état normal, où l'éducation encyclopédique doit toujours conduire le vrai croyant du culte concret et spontané vers le culte abstrait et systématique. Moralement jugée, l'étude du dogme se trouve donc interposée entre les deux principaux degrés propres au développement du culte, d'abord personnel, puis social. A ce titre, l'initiation théorique ne saurait jamais cesser de lier l'essor fétichique et l'état positif de chaque âme régénérée. Nulle autre transition ne peut combiner deux modes d'adoration naturellement séparés par l'opposition du concret à l'abstrait. On peut regarder cette nécessité comme le principal motif de l'entière universalité qui convient à l'éducation encyclopédique en vertu de sa destination morale, impossible à réaliser chez les âmes dépourvues d'une telle culture. Sous cet aspect, le dogme se trouve finalement enveloppé dans le culte, dont la prépondérance normale ne saurait mieux ressortir que d'après son aptitude à consacrer autant la spéculation que l'action pour consolider et développer l'affection.

Écartant les préjugés théoriques qui résultèrent de l'impuissance du théologisme à discipliner l'intelligence, on reconnaît que le dogme, en se subordonnont au culte, n'est pas moins ennobli qu'épuré, puisqu'il se trouve ainsi participer à l'institution directe de l'unité. Dans l'âge fétichique, la véritable unité, toujours fondée sur l'amour, dut spontanément surgir, d'après la suprématie initiale du sentiment, qui ne pouvait alors rencontrer aucune opposition, vu le caractère concret des spéculations quelconques. Graduellement développée sous le théologisme, surtout depuis la rupture du joug théocratique, la raison abstraite suscita l'indiscipline métaphysique et prépara la subordination positive, suivant que l'essor de l'analyse fut général ou spécial. Aspirant à la synthèse spéculative en méconnaissant sa source affective, elle brisa l'unité fétichique sans

pouvoir la remplacer. Réduite aux théories les plus simples, elle y fit surgir des germes de systématisation qui devaient finalement ramener l'esprit sous la domination du cœur, quand ils auraient successivement pénétré les principaux domaines de l'intelligence.

Une coexistence naturelle entre l'indiscipline générale et la subordination spéciale dut donc distinguer la progression occidentale, où l'analyse devint à la fois destructive et constructive, suivant que son usage fut métaphysique ou positif. Tant que la préparation objective demeura bornée à l'ordre extérieur, l'influence analytique resta plus dissolvante qu'organique, parce que l'exercice ontologique prévalut sur l'essor scientifique. Il en fut autrement quand la positivité rationnelle s'introduisit dans le domaine humain, même en ébauchant les théories vitales. Le plus beau de tous les spectacles surgit alors, celui d'une grande intelligence dignement appliquée au service continu de la sociabilité générale. Étendue jusqu'au domaine suprême, la science tendit à vulgariser ce type longtemps exceptionnel, en suscitant une philosophie que l'impulsion affective dut bientôt transformer en religion, de manière à subordonner irrévocablement l'analyse à la synthèse.

Rien ne pourra jamais dispenser l'initiation individuelle de reproduire, à cet égard, la marche générale de l'évolution collective, puisqu'elles offrent le même début et tendent vers le même terme. Une civilisation développée ne saurait se contenter de la raison concrète qui suffit à la sociabilité fétichique, où la synthèse sympathique reste d'ailleurs exposée à de fréquentes altérations d'après l'inconsistance d'un tel régime. Systématiser en généralisant après avoir abstrait, tel est le principal caractère de l'état normal, où dès lors pourraient toujours renaître les déviations propres à l'existence préliminaire, si l'initiation logique n'était pas instituée convenablement.

Cette institution doit surtout tendre à consolider l'amour par la foi, d'après un essor graduel de convictions vraiment inébranlables, qui ne sauraient d'abord surgir qu'envers les spéculations les plus simples et les plus abstraites. On peut caractériser l'anarchie moderne en la faisant principalement consister dans l'insurrection croissante de la raison contre la foi, depuis l'irrévocable rupture de l'harmonie passagère que le moyen âge avait péniblement établie. Ramener l'esprit sous la suprématie du cœur, qui ne fut suffisante que pendant la première enfance, tel est le nœud essentiel de la régénération finale. Pour y parvenir, la religion positive sanctifie l'abstraction en la vouant à systématiser la domination spontanée des morts sur les vivants, de manière à prévenir la révolte ontologique par la subordination scientifique. Sous ce régime, un digne usage de l'analyse vient résumer la synthèse finale dans cet aphorisme universel : la soumission est la base du perfectionnement, d'abord physique, puis intellectuel, enfin et surtout moral.

On ne doit jamais oublier que la vraie religion, après avoir lié le dedans par l'amour, le relie au dehors par la foi, sans laquelle l'unité serait toujours compromise, malgré la prépondérance habituelle des meilleures impulsions. Tous les instincts sympathiques peuvent continuellement exposer la conduite à de graves fluctuations, et même à de profondes déviations, quand l'amour universel dirige l'activité pacifique sans une suffisante assistance de la foi démontrable. A mesure que l'existence humaine se complique en se développant, la soumission à l'ordre extérieur y devient de plus en plus indispensable au maintien de l'harmonie intérieure. Guidées par la foi positive, la vie publique et la vie privée peuvent éviter ou réparer les aberrations du sentiment, quand des convictions inaltérables dissipent, en chaque cas, toute incertitude sur la nature et les conditions du bien. Élevées sous une telle discipline, les âmes

d'élite sont uniquement soumises à l'amour, toujours prêt à sanctionner l'ordre ; et l'opinion suffit pour régir les plus vulgaires, sans avoir souvent besoin de la force.

Mieux appréciée, l'éducation encyclopédique, qui semble d'abord instituer la discussion, est surtout destinée à construire une foi toujours démontrable, mais rarement démontrée, même aux plus instruits. Elle fait continuellement sentir l'ascendant de l'Humanité, dont les travaux séculaires ont seuls produit les conceptions qui s'y trouvent assimilées en quelques années. Noblement rêvée par le catholicisme, la soumission volontaire de la raison à la foi devient le meilleur résultat du positivisme, qui termine l'initiation abstraite en systématisant cette discipline d'après la vraie théorie de la nature humaine. Succédant à la préparation spéculative, l'existence active a bientôt complété la subordination normalement émanée de l'évolution affective et développée dans le culte avec l'assistance de l'art. Une appréciation directe de la vie réelle fait promptement reconnaître la nécessité d'une discipline sans laquelle l'intelligence consumerait ses forces à débattre les principes au lieu de développer les conséquences. Rien ne peut mieux caractériser la tendance naturelle de l'esprit positif vers une digne soumission, que l'adoption facile et rapide des principales notions scientifiques chez les populations modernes, au milieu de l'anarchie métaphysique. A plus forte raison, l'éducation encyclopédique fera-t-elle universellement prévaloir, comme institutions de l'Humanité, toutes les conceptions qu'exige la systématisation directe de l'existence finale.

Purifiées par la religion positive, l'abstraction et l'analyse renoncent à leurs vaines aspirations, pour se vouer à leur destination normale, généraliser la science réelle afin de systématiser la foi démontrable. Alors l'instinct fétichique et l'esprit positif se trouvent irrévocablement combinés, et leur concours

régénère l'intelligence en la subordonnant au sentiment. Bornées à leurs domaines respectifs, les deux rationalités extrêmes seraient toujours restées incapables, l'une de saisir les lois générales, l'autre de construire les pensées synthétiques. Leur fusion mutuelle répare leurs imperfections respectives, de manière à constituer l'état normal de l'entendement humain, où le cœur et l'esprit concourent sans conflit. On voit ainsi surgir la vraie logique, d'après une suffisante conciliation entre l'inspiration concrète et la démonstration abstraite.

Toutes les considérations précédentes concourent à déterminer la nature et la destination de la science fondamentale, afin de préserver son étude systématique des divagations qui troublèrent son élaboration spontanée. On sent le besoin d'un tel préambule, quand on a suffisamment apprécié la difficulté de discipliner l'élément le plus perturbateur, dont l'essor devint de plus en plus déréglé depuis la fin de l'âge fétichique. Non-seulement ces aperçus généraux étaient tous indispensables avant d'aborder le domaine mathématique ; mais ils doivent encore être complétés par un examen spécial du véritable but de la Logique.

Elle doit entièrement renoncer à résoudre le problème que j'ai directement posé dans sa définition systématique. Sous aucun aspect, les sciences préliminaires ne sauraient accomplir des solutions nécessairement réservées à la science finale, seule capable d'instituer des doctrines décisives envers les différentes faces d'une synthèse naturellement indivisible. Comparée à sa définition, l'insuffisance de la Logique devient directement évidente, puisque le concours normal qui s'y trouve proposé doit toujours exiger l'ensemble des connaissances réelles sur la constitution et le gouvernement de la nature humaine. On peut regarder ce problème comme admettant deux solutions : l'une, concrète et synthétique, mais empirique, spontanément émanée

du culte, surtout intime ; l'autre, abstraite, analytique, et systématique, résultée du dogme, mais seulement quand il est complet. La première précède et dirige l'initiation théorique, tandis que la seconde la termine et la résume. A tous égards, le début de l'éducation encyclopédique est nécessairement incapable d'instituer une doctrine qu'il doit seulement préparer. Rien ne fait mieux sentir cette impuissance que les dispositions sophistiques souvent résultées des études mathématiques, chez les âmes qui n'ont pas été préalablement poussées vers la synthèse par la sympathie.

Rapproché de sa définition, le problème logique ne saurait jamais admettre d'autre solution que celle qui convient à l'ensemble du problème humain, posé sous sa forme la plus complète. A l'amour seul, il appartient de faire normalement prévaloir les sentiments sur les images et celles-ci sur les signes, pour susciter les inspirations convenables et diriger les saines élaborations. Notre perfectionnement logique doit donc résulter du concours des moyens, moraux, intellectuels, et même physiques, propres à développer l'altruisme et comprimer l'égoïsme. Garantie des sophismes métaphysiques, la raison abstraite renonce à chercher, au début de l'éducation encyclopédique, une solution nécessairement réservée à sa terminaison. Sous cet aspect, il faut finalement regarder la définition que j'ai posée pour la Logique comme étant surtout destinée à signaler, dès l'origine de l'initiation théorique, son dernier résultat rationnel, afin de mieux éviter les fluctuations et les déviations.

D'après un examen plus spécial, on doit aussi faire prévaloir l'institution sociale sur l'exposition personnelle dans le développement des études mathématiques. Il importe autant au cœur qu'à l'esprit de rectifier les habitudes d'isolement que la science fondamentale dut à sa culture empirique. On ne peut y parvenir que d'après une combinaison continue entre les conceptions

historiques et les explications dogmatiques, qui devra naturellement prévenir ou corriger toute tendance à représenter l'essor mathématique comme indépendant de l'ensemble du développement humain.

Élement nécessaire de la synthèse subjective, la science fondamentale que j'ai normalement appelée Logique est surtout destinée à préparer la systématisation finale en élaborant la méthode universelle par les constructions les plus simples. Non-seulement son étude ne saurait jamais suppléer aux exercices spontanés de la raison concrète ; mais elle serait impossible, ou deviendrait vicieuse, sans un tel préambule, naturellement résulté de l'évolution affective et développé dans le culte intime. D'après cette préparation, qu'il faut souvent invoquer, le sentiment doit toujours présider à l'initiation mathématique, dont le domaine peut aisément compenser, par sa plus grande simplicité, son plus grand éloignement du centre synthétique.

Sous l'aspect philosophique, l'évolution préliminaire de l'Humanité dut surtout consister à faire pleinement converger la raison concrète ou pratique et la raison abstraite ou théorique, dont la divergence put longtemps sembler insurmontable, à partir du théologisme. On peut ainsi juger l'importance et la difficulté de l'éducation encyclopédique, toujours obligée de reproduire individuellement la transition collective entre la synthèse de l'enfance et celle de la maturité. L'étude successive de l'Espace, de la Terre, et de l'Humanité devient donc indispensable, à l'individu comme à l'espèce, pour instituer l'harmonie mentale; sauf le surcroît de vitesse et de rationalité que l'évolution historique procure à l'essor dogmatique.

Toujours décroissante à mesure qu'elle tend vers son terme nécessaire, l'abstraction conserve, jusqu'à la fin de cette ascension, les difficultés qui lui sont propres. Elle devient plus pénible dans les domaines plus élevés, quoiqu'elle y soit moins com-

plète ; tant qu'il faut écarter quelques attributs réels, leur nombre ne peut aucunement augmenter l'embarras d'idéaliser ceux qui subsistent. Même en Morale, où l'élimination finit par se réduire aux diversités individuelles, l'abstraction est plus difficile que dans les spéculations mathématiques, parce que le concours des phénomènes y détourne davantage de toute altération artificielle des cas naturels. Pour confirmer cette appréciation, il suffit de remarquer combien les esprits dépourvus de culture théorique répugnent à considérer les lois morales indépendamment des différences personnelles. Souvent la même disposition se manifeste chez ceux qui se sont bornés aux études mathématiques, quoique leurs habitudes dussent leur faire directement sentir l'impossibilité croissante de généraliser sans abstraire à mesure que les spéculations se compliquent.

Il faut donc mesurer la difficulté réelle des efforts théoriques, non d'après le degré d'abstraction, mais suivant le degré de complication, des études correspondantes. Nulle science ne saurait être aussi facile que la plus abstraite, parce que les attributs considérés s'y trouvent naturellement simplifiés autant que possible, en vertu de leur entière universalité. Voilà comment s'expliquent les succès, même durables, qu'elle a souvent procurés à des esprits ailleurs incapables des moindres efforts. On doit pourtant reconnaître que la facilité supérieure des constructions mathématiques ne saurait aucunement diminuer leur mérite, quand elles offrent, avec la précision qui leur est propre, l'extension et la liaison que comporte un tel domaine. Ces triomphes de la Logique seraient vainement poursuivis en Physique, où la complication des phénomènes leur oppose des obstacles insurmontables, quoiqu'ils y devinssent, par cela même, plus recommandables, s'ils pouvaient s'y réaliser. A la Morale seule, sont naturellement réservées les constructions à la fois les plus vastes et les plus difficiles, qu'elle ne saurait

éluder, comme la science préparatoire, puisque son but synthétique et son office pratique les y rendent indispensables. Rapprochées des constructions mathématiques, elles ne leur cèdent qu'envers la précision, toujours décroissante à mesure que les spéculations se compliquent ; mais elle les surpassent en consistance, les liaisons partielles étant nécessairement factices et même précaires.

Nous pouvons maintenant aborder l'étude directe de la science fondamentale, sans y craindre le retour des divagations académiques. Obligée d'accepter une définition qu'elle est évidemment incapable de réaliser, elle se trouve autant disciplinée que consacrée par la qualification de Logique. Même les principaux triomphes de l'analyse sont nécessairement réservés à la Morale, où, sans attendre sa systématisation, les poëtes ont souvent produit, sur l'étude positive de la nature humaine, des chefs-d'œuvre analytiques qui surpassent tous ceux des géomètres. Bornée à son vrai domaine, la raison mathématique y peut admirablement remplir l'office universel de la saine logique : induire pour déduire, afin de construire. Renonçant à de vaines prétentions, elle sent que ses meilleurs succès restent toujours incapables de nous faire, partout ailleurs, induire, ou même déduire, et surtout construire. Elle se contente de former, dans le domaine le plus favorable, un type de clarté, de précision, et de consistance, dont la contemplation familière peut seule disposer l'esprit à rendre les autres conceptions aussi parfaites que le comporte leur nature. Sa réaction générale, plus négative que positive, doit surtout consister à nous inspirer partout une invincible répugnance pour le vague, l'incohérence, et l'obscurité, que nous pouvons réellement éviter envers des pensées quelconques, si nous y faisons assez d'efforts.

Outre son efficacité logique, qui doit toujours prévaloir, la science fondamentale comporte un office scieptifique, propre

à développer la consistance et la dignité de ses spéculations, en les préservant d'être seulement appréciées comme exercices théoriques. Rapportée à cette destination, son extension serait déterminée par la règle encyclopédique qui restreint le développement spécial de chaque science au degré qu'exige la préparation normale de la science suivante. A ce fond nécessaire, il faut finalement ajouter les théories qui, superflues pour la doctrine, importent à la méthode, comme types de rationalité. Cette adjonction permet à la Logique de conserver l'intérêt résulté de sa liaison spéciale avec la Physique, sans perdre la dignité propre à son office général envers la Morale. La condensation finale de la hiérarchie encyclopédique en une progression ternaire dispose la science initiale à mieux saisir le but général de l'essor abstrait, puisque l'étude de l'Espace n'est ainsi séparée de celle de l'Humanité que par l'interposition nécessaire de l'étude de la Terre. Elle peut toujours avoir en vue sa destination normale, si sa culture a dignement reçu l'impulsion résultée des larges conceptions et des nobles sentiments qui doivent y présider. Sa simplicité supérieure y rend plus blâmables des déviations plus faciles à prévenir ou rectifier, dans un domaine que son éloignement du centre de la synthèse laisse pourtant accessible à la sympathie, dont la puissance n'a d'autres limites que celle de la nature humaine.

Fondé sur la philosophie première, et préparé par l'éducation domestique, d'abord affective, puis esthétique, l'enseignement sacerdotal de la Logique doit et peut toujours offrir la profonde moralité qui manqua longtemps aux études mathématiques. La science la mieux démontrable ne saurait directement contester l'universalité normale du point de vue humain, comme source et but nécessaires de toutes nos saines recherches, tant théoriques que pratiques. Elle peut seulement subir des altérations indirectes, sous l'impulsion des instincts

personnels, dont sa nature moins sympathique facilite l'ascendant naturel. Une culture pleinement religieuse y doit aisément surmonter cette tendance, de manière à consolider l'essor altruiste d'après les études les mieux taxées de sécheresse morale tant qu'elles restèrent indisciplinées. Ramenées à leur vraie destination, elles peuvent toujours développer, non-seulement la vénération, active et passive, mais aussi l'attachement, et même la bonté, si leurs directeurs y savent assez représenter l'Humanité comme le résumé nécessaire de l'ordre universel.

On ne doit jamais craindre de rappeler le but moral des études mathématiques à des disciples convenablement préparés par l'affection, le culte, et l'art. Une réaction continue surgit de la science initiale pour développer une sincère et profonde soumission, en faisant spontanément ressortir l'irrésistible prépondérance de l'ordre immuable dont elle expose les lois les plus générales et les plus évidentes. Bientôt la vénération passe de l'abstrait au concret envers le Grand-Être qui sut instituer de telles contemplations, et l'attachement s'y joint pour l'organe individuel des traditions de l'Humanité. La bonté proprement dite, ou l'amour universel, ne tarde point à compléter la réaction morale d'une étude normalement vouée au Grand-Milieu, dont l'institution représente la sympathie la plus générale. Il est toujours possible d'invoquer, avec opportunité, ce triple fondement pour faire convenablement intervenir le sentiment dans l'éducation mathématique.

Rien n'a jamais empêché de reconnaître, malgré l'irréligion moderne, combien la vénération est indispensable au succès des études théoriques. Une irrésistible connexité doit ainsi conduire à sentir que les deux autres instincts sympathiques ne sauraient demeurer passifs quand l'instinct moyen se trouve excité. Si l'attachement et la bonté sont moins nécessaires à

l'efficacité didactique, leur essor y doit consolider et développer celui de la vénération. Toute émotion sympathique dispose à l'union, tant abstraite que concrète, de manière à faciliter les efforts synthétiques, et même les opérations analytiques, quand elles sont convenablement instituées. Il faut cependant reconnaître que le cœur, en cherchant partout des rapprochements, peut souvent susciter des inductions hasardées ou des déductions précipitées. C'est pourquoi l'esprit, en respectant ces précieux aperçus, d'où procèdent toutes nos découvertes, doit toujours les soumettre au contrôle normal de l'appréciation rationnelle qui résulte du concours des acquisitions antérieures, en complétant la foi par la démonstration. On se trouve ainsi conduit à ratifier les pressentiments des anciens philosophes sur le vrai régime didactique, où la méditation silencieuse et respectueuse des écoles positives remplace la discussion arrogante et bruyante des arènes métaphysiques.

Toutes les dispositions propres aux études dirigées doivent davantage convenir à l'élaboration originale, dont la nature est semblable et la difficulté supérieure. On peut regarder comme l'un des traits les plus caractéristiques de l'anarchie académique la tendance de la plupart des savants modernes à se dispenser, dans l'invention, des sentiments qu'ils reconnaissent nécessaires à l'instruction. Il sera toujours opportun de rappeler que si les héros du moyen âge, et même de l'antiquité, se préparaient à l'action par la prière, elle doit davantage disposer à la spéculation, dans un régime où tous les efforts convergent vers le Grand-Être.

Une institution pleinement religieuse des études théoriques permet d'y faire aisément obtenir au sentiment la prépondérance continue qu'exige leur efficacité normale. Sous l'impulsion résultée des dix-neuf leçons de philosophie première que j'ai systématiquement placées avant le début mathémathique, le prêtre

pourra toujours introduire les influences affectives qu'il jugera convenables au succès de l'enseignement. Après un tel préambule, directement relatif à l'ensemble du savoir humain, et qui lui-même offre le meilleur type de la logique abstraite, les jeunes disciples de l'Humanité devront spontanément accueillir tous les aperçus, synthétiques ou sympathiques, propres à seconder leurs efforts. Graduellement combinées avec l'exposition dogmatique, les indications historiques y préviendront la sécheresse et l'isolement, en ramenant le point de vue humain au milieu des travaux qui s'en éloignent le plus. Elles préserveront des tendances absolues, en faisant spécialement sentir que toutes les spéculations objectives, tant logiques que physiques, ne peuvent former que des ébauches provisoires, dont l'institution définitive appartient à l'unique science qui soit vraiment synthétique.

Non-seulement l'influence sympathique pourra toujours ranimer et rectifier les études mathématiques, si le prêtre est au niveau de sa fonction, mais elle y sera directement proclamée comme le meilleur guide des travaux théoriques. Une comparaison systématique des divers moyens propres à seconder l'essor mental fait aisément reconnaître la prééminence des impulsions affectives. Même en terminant la philosophie première par la construction de la hiérarchie encyclopédique, on est directement conduit à caractériser l'irrationnalité radicale du matérialisme théorique, tendant toujours à subordonner le supérieur à l'inférieur. Écartant l'empirisme médical, la théorie cérébrale représente l'influence sympathique comme le meilleur stimulant et régulateur de l'élaboration intellectuelle. Rien ne saurait être plus efficace pour bien penser, davantage que pour bien agir, que de bien aimer, quelle que soit d'ailleurs l'utilité réelle des moyens accessoires qui peuvent résulter de la vie végétative. A l'influence sympathique, on ne peut rationnellement opposer

que l'impulsion, plus énergique et plus rapide, mais moins homogène et moins durable, que fournissent les instincts personnels. La prétendue liberté de l'esprit révolté contre le cœur se borne réellement à préférer le maître le moins noble et le plus capricieux, qui finalement devient le moins efficace, malgré son aptitude initiale à surmonter la torpeur intellectuelle.

Ayant ainsi conduit le préambule général qu'exigeait le début spécial des études mathématiques jusqu'à les subordonner au sentiment, leur essor normal peut-être directement institué. Guidés par la philosophie première, dont ce préambule résume la conclusion, nous pouvons établir une pleine continuité dans l'ensemble de l'initiation abstraite. Entièrement généralisées en appréciant les seules lois qui soient vraiment universelles, les conceptions théoriques abordent la philosophie seconde en y considérant le domaine le moins spécial, dont la simplicité compense la froideur. Nous y pénétrons par l'élément le plus général, où nous devons même apprécier d'abord l'essor le plus synthétique et le plus ancien, le mieux rapproché de la philosophie première, comme étant plus subjectif qu'objectif. Telle est l'éducation continue où la raison abstraite devient moins générale objectivement et plus générale subjectivement, jusqu'à ce qu'elle atteigne l'état normal qui la rend synthétiquement équivalente à la raison concrète en systématisant la sympathie.

Graduellement altérées à mesure que l'indiscipline augmenta, les spéculations numériques sont bientôt devenues essentiellement objectives. Reportées à leur origine fétichique, elles furent surtout subjectives ; et cette culture primitive a toujours laissé des traces appréciables chez les principaux philosophes. A l'état final de la raison humaine, il appartient de systématiser et de développer ces conceptions initiales du génie abstrait, négligées pendant toute l'évolution accomplie sous le théologisme,

sauf de rares intermittences, d'ailleurs viciées par l'ontologisme. Dès le début de l'éducation encyclopédique, la discipline positive se montre ainsi disposée à consacrer et cultiver tous les dignes germes que fit surgir l'empirisme théorique. Elle n'écarte que les vicieuses spéculations dont la vraie science fut graduellement encombrée, surtout en mathématique, par l'anarchie académique, principalement développée au dix-neuvième siècle.

Le domaine arithmétique constitue l'élément le plus général, le plus simple, et le plus abstrait, de la Logique, et, dès lors, de toute la philosophie seconde. Il a longtemps semblé, sous ce triple aspect, inférieur au calcul algébrique, qui, dégagé de tout attribut géométrique, spécule sur des nombres indéterminés. Néanmoins, une appréciation philosophique a finalement montré que l'algèbre, malgré son essor spécial, reste toujours subordonnée, au moins implicitement, soit à l'arithmétique, soit à la géométrie, ses deux sources nécessaires. Dans le système mathématique, le calcul algébrique ne constitue jamais une doctrine proprement dite ; il n'intervient que comme méthode, quoique sa culture isolée ait souvent fait illusion. A chaque spéculation un peu compliquée, arithmétique ou géométrique, il fournit ou prépare des moyens d'élaboration, sans pouvoir lui-même offrir un aspect scientifique qui soit vraiment distinct.

On doit donc regarder le calcul comme consistant surtout dans l'arithmétique, qui constitue son domaine le plus net et le mieux caractérisé, quoique le moins développé, par suite même de son indépendance envers la géométrie et la mécanique. Mais, en suscitant l'algèbre, dont son propre essor devient finalement inséparable, elle se trouve profondément mêlée aux deux autres éléments de la Logique. Bientôt elle y serait absorbée si ses attributions nécessaires ne devaient pas lui faire tou-

jours obtenir une culture distincte et directe au début des études mathématiques. Réduite aux notions numériques qui peuvent être convenablement établies sans algèbre, cette culture initiale ne peut jamais cesser de conserver un caractère indépendant, d'après lequel on pourra nettement apprécier l'arithmétique, malgré sa confusion ultérieure avec l'autre calcul. Afin de mieux manifester sa constitution propre, le plan général de l'éducation encyclopédique consacre le même nombre de leçons à l'étude isolée et fondamentale de chacun des deux éléments du calcul.

Rationnellement considérée, l'arithmétique offre, par sa nature, et dès son début, un profond intérêt aux vrais philosophes, qui ne cesseront jamais d'y voir, chez l'individu comme dans l'espèce, la première source du sentiment général des lois réelles, tant subjectives qu'objectives. Il doit spontanément résulter du moindre calcul numérique, où la science se montre déjà caractérisée d'après la prévision, dont la conformité directe avec l'événement nous fait aussitôt apercevoir un ordre immuable, non-seulement hors de nous, mais en nous. Voilà comment, dès son berceau, la positivité rationnelle manifeste l'harmonie nécessaire entre le dedans et le dehors, sur laquelle repose l'ensemble de notre existence, tant active, et même affective, que spéculative. Antérieure à tout théologisme, cette notion fondamentale surgit du fétichisme le plus spontané, quoique son développement et sa systématisation ne puissent appartenir qu'au positivisme le plus complet. La première manifestation d'un tel principe est nécessairement propre à l'arithmétique, avant qu'aucun mélange d'algèbre puisse y susciter quelque équivoque sur la vraie source d'une notion directement émanée des prévisions les plus simples et les moins douteuses.

Il faut aussi regarder l'arithmétique comme supérieure à l'al-

gèbre par sa pureté logique, restée toujours exempte des altérations résultées de l'indiscipline métaphysique, qui laissa l'orgueil algébrique aspirer à la présidence encyclopédique. Restreinte à son domaine indépendant, l'arithmétique se trouva constamment préservée des contacts qui disposèrent l'algèbre aux usurpations scientifiques, où le moyen était pris pour le but. A ce point de vue, on reconnaît que, quoique le matérialisme théorique soit nécessairement émané du calcul, c'est de l'algèbre qu'il dut résulter, sans que l'arithmétique y pût jamais participer ; son caractère la rapprocha de la théologie, tandis que l'algèbre inclina vers la métaphysique.

A l'aide des conceptions numériques, des rapprochements quelquefois chimériques, mais souvent précieux, peuvent spontanément surgir dans tous les domaines accessibles à l'esprit humain. Cette aptitude résulte de l'entière universalité que comportent les notions de nombre, seules communes, non-seulement aux êtres quelconques, mais à leurs divers phénomènes, depuis les plus grossiers jusqu'aux plus sublimes. Tout ce que nous pouvons concevoir étant nécessairement susceptible de degré, les nombres ont partout un accès spontané, qui peut cesser d'offrir aucun danger quand ils sont davantage employés subjectivement qu'objectivement. Ils fournissent alors, suivant une appréciation heureusement vulgaire, de précieux moyens pour fixer nos pensées, sans susciter d'illusion sérieuse sur la précision qu'ils semblent indiquer. On peut, par leur entremise, instituer avec facilité des contacts quelconques, parmi lesquels tout bon esprit sait promptement discerner ceux qui méritent une véritable attention, en écartant les rapprochements arbitraires ou vagues. Notre enfance, et même notre adolescence, ont souvent utilisé cette aptitude pour suppléer aux rapports directs qui ne pouvaient alors être assez appréciés. Sous le régime normal, nous devons d'autant moins négliger

une telle assistance qu'elle y devient directement systématisable, surtout d'après les propriétés subjectives qui caractérisent les petits nombres dont elle fait principalement usage.

Son heureuse application peut toujours aider à régler la vie humaine, en dirigeant vers l'homme une institution qui fut surtout transportée au monde depuis que le théologisme prévalut sur le fétichisme. Une impulsion religieuse doit sagement employer les nombres pour éviter, dans tous les modes de notre existence, un arbitraire constamment favorable à l'égoïsme. Par leurs secours, le Grand-Être, malgré sa complication, que son intelligence doit finalement compenser, rendra sa propre économie plus régulière que celle du Grand-Fétiche, quand tous ses moyens de perfectionnement seront assez développés. Réciproquement, l'institution de la synthèse subjective permet aux spéculations numériques d'acquérir plus de consistance et de pureté qu'elles n'en ont jamais comporté sous le théologisme et l'ontologisme. Elles y trouvent, avec une destination plus éminente et plus directe, des ressources plus systématiques, d'après la constitution propre au Grand-Milieu qui complète le triumvirat religieux. Mieux appréciée, l'institution de l'espace, qui ne fut longtemps utilisée que pour la géométrie et la mécanique, peut pareillement assister le calcul, d'abord arithmétique, puis algébrique. Outre les figures et les mouvements, le milieu subjectif est directement propre à conserver et reproduire les nombres indéterminés, ou déterminés, dont les signes n'ont jusqu'ci que des siéges concrets, ordinairement liés aux corps sur lesquels ils sont tracés.

Historiquement considérée, la théorie subjective des nombres a certainement précédé le plus ancien essor vulgairement apprécié dans l'artihmétique, puisqu'elle fut antérieure à toute numération, dont elle fournit même la véritable origine. Il est encore possible de retrouver une trace irrécusable de sa cul-

ture initiale, d'après une antique dénomination que l'anarchie moderne n'a pu jamais effacer du langage occidental, quoique l'empirisme scientifique l'ait toujours dédaignée. Même aujourd'hui, les nombres sont normalement distingués en *ordinaux* et *cardinaux* : or ce contraste, sans rentrer dans celui du subjectif à l'objectif, suffit à sa représentation arithmétique. Nous y pouvons trouver la preuve que les nombres furent surtout employés comme moyens de classement avant de fournir des ressources pour fixer et préciser les mesures. Outre les témoignages généraux qui peuvent indirectement résulter d'une saine appréciation de l'enfant, un indice spécial est directement fourni par le nombre *deux*, dont le double nom ordinal rappelle qu'il ne désigna pas d'abord le degré, mais l'arrangement et la dépendance.

Il faut regarder la théorie subjective des nombres comme étant surtout fondée sur les propriétes philosophiques et religieuses des trois premiers, seuls communs à tous les animaux, et seuls susceptibles, même chez l'homme, d'être abstraitement conçus sans aucun langage. Mon principal ouvrage a suffisamment expliqué leur aptitude respective à représenter spontanément l'harmonie sympathique, l'ordre synthétique, et le progrès synergique; en sorte que leur succession symbolise la formule sacrée du positivisme. Par un tel privilège, ces nombres méritent la qualification que je leur ai finalement attribuée, et qui fut dignement pressentie dans les premières inspirations du génie philosophique, même à travers les illusions métaphysiques. Une progression n'est vraiment normale que quand elle se réduit à trois termes; une combinaison ne peut jamais admettre plus de deux éléments, tout rapport étant binaire; une synthèse devient illusoire quand elle ne procède pas d'un seul principe. L'ensemble de la préparation théorique était indispensable pour que la raison abstraite pût suffisamment appré-

cier cette triple nécessité, tant au dehors qu'au dedans. Sous l'impulsion directe du sentiment, la raison concrète l'avait spontanément saisie, dès le premier essor fétichique, surtout d'après la constitution fondamentale de la famille humaine, où la femme, l'homme, et l'enfant représentent respectivement l'amour, l'ordre, et le progrès. On ne saurait comprendre l'état initial, ni la constitution finale, sans renverser la marche propre à l'évolution intermédiaire, qui puisait au dehors le type du dedans, tandis que celui-ci fournit, primitivement et définitivement, le modèle de celui-là.

Sous l'impulsion résultée des nombres sacrés, les plus voisins suscitèrent aussi des appréciations subjectives, avant que la numération fût instituée. Toutefois, une telle extension dut bientôt exiger l'assistance du langage, sans lequel la pluralité devient toujours confuse en l'absence des objets, même à partir de quatre, qui surgit tardivement. Il faut pourtant noter que les spéculations numériques purent longtemps se dispenser des mots, en s'aidant de signes spéciaux, qu'elles durent bientôt instituer. Reconnues indépendantes de la nature des êtres considérés, elles furent promptement conduites à représenter les objets absents par d'autres toujours présents, tels que nos doigts, et même leurs phalanges. On doit regarder cet usage universel comme ayant longtemps dispensé de la numération systématique, et beaucoup influé sur sa constitution habituelle, quand elle devint nécessaire au développement des combinaisons numériques. Une fois étendue au delà des nombres sacrés, les relations objectives s'y mêlèrent de plus en plus aux rapports subjectifs ; de là résultera toujours l'importance justement attachée à la propriété du nombre quatre, longtemps inconnue à notre enfance, individuelle ou collective. Mieux apprécié par la raison vulgaire que d'après l'empirisme académique, qui le rend purement verbal, ce type initial des

théorèmes numériques fait aussi surgir l'esprit algébrique, en reconnaissant la fixité d'une somme dont les parties varient également, l'une en plus, l'autre en moins.

Puisque l'Humanité constitue finalement le résumé systématique de l'ordre universel, on ne doit jamais s'étonner qu'elle en ait spontanément fourni l'aperçu primitif. Un esprit vraiment philosophique étend au delà des nombres sacrés l'origine sociale, surtout domestique, puis même civique, des appréciations numériques. Rattaché d'abord à l'organisme individuel, le plus petit des nombres composés dut sa principale importance à sa représentation spontanée de la plus simple combinaison de familles. Il faut aussi reconnaître un motif social dans l'attention accordée au nombre suivant, où l'imparité manifeste son aptitude à résoudre les conflits collectifs, quand deux couples se réunissent sous un chef distinct. Toutes ces explications conviennent aux nombres six et sept, en ayant égard au troisième élément domestique, dont la pluralité naturelle permettrait de prolonger davantage une telle appréciation, si les divers enfants n'étaient pas considérés uniformément. Après sept, la famille cesse de comporter l'interprétation numérique, même dans l'état final, où ce nombre indique sa composition normale. Sous l'aspect social, comme au point de vue intellectuel, il pose une limite naturelle, au delà de laquelle on ne peut plus compter sans effort par la combinaison des nombres sacrés.

A partir de cinq, surgit une distinction d'où résulte le second élément de la théorie subjective des nombres, d'après la séparation de ceux qu'on a justement qualifiés de *premiers*, en tant qu'irréductibles à d'autres, et fournissant les racines des pluralités moins pures. Ceux-là sont les plus comparables aux nombres sacrés, dont ils dérivent par addition, et qui constituent les meilleurs types de l'irréductibilité. Toutefois l'échelle des nombres premiers ne pouvait assez développer son efficacité

subjective que quand la synthèse finale aurait rendu relative une notion toujours jugée absolue. Une juste appréciation de l'ordinalité suffit pour introduire entre eux une distinction susceptible de degrés indéfinis, en les qualifiant de *doublement premiers* quand leur rang est premier, et dès lors *triplement premiers* si lui-même est doublement premier, ainsi de suite. Mais l'aptitude subjective doit surtout appartenir au début d'une telle hiérarchie ; *sept* et *treize* y deviennent prépondérants, comme étant les plus petits des nombres doublement et triplement premiers, sauf les nombres sacrés, où cet attribut n'a pas de bornes.

Notre maturité ne diffère essentiellement de notre enfance qu'en substituant la systématisation à la spontanéité dans le développement universel d'une existence dont le fond reste nécessairement identique sous des modifications quelconques. Aspirant à la synthèse par la sympathie, l'esprit fétichique avait déjà senti le privilège normal des nombres premiers pour circonscrire, mieux que les autres, nos divagations spéculatives, en posant des limites naturelles à la décomposition. Cette ébauche de discipline mentale fut de plus en plus négligée pendant tout le cours de la préparation accomplie sous le théologisme et l'ontologisme, quoique les principaux penseurs, et surtout les poëtes, l'aient toujours respectée, et même appliquée, mais confusément. Il appartenait au positivisme de la compléter et de la systématiser, afin de mieux régler le plus perturbateur des éléments humains, en lui posant un frein émané de ses aspirations harmoniques. Déjà la positivité spontanée a fait irrévocablement prévaloir le nombre doublement premier d'après lequel la fétichité primitive avait institué le groupement usuel des jours : le public occidental fut plus sage que ses chefs métaphysiques, et même scientifiques. On peut regarder ce conflit comme le début décisif d'une régularisation

numérique de toute l'existence humaine, tant privée que publique, sous l'impulsion systématique de la synthèse subjective qui caractérise la religion universelle. Sous aucun aspect, l'institution des nombres, plus appliquée au dehors qu'au dedans, n'a pu jusqu'ici développer sa principale aptitude, qui, d'après un libre essor des convictions individuelles et collectives, assistera le cœur pour régler, non-seulement le caractère, mais surtout l'esprit.

On doit d'autant mieux prévoir l'avènement universel et rapide d'une telle discipline qu'elle n'emploiera presque jamais, parmi les nombres premiers, que les sept plus petits, où surgissent les trois degrés principaux de leur hiérarchie relative. Il faut déjà regarder les moindres nombres doublement et triplement premiers comme normalement propres à fixer la répartition générale d'un traité méthodique et d'un poëme systématique, tandis que les nombres antérieurs en régularisent l'élaboration spéciale. Rapprochée des indications précédentes, cette décision de la synthèse subjective doit déjà sembler assez justifiée pour quiconque a dignement admiré la soumission spontanée des meilleurs génies, surtout poétiques, à des entraves plus gênantes et moins motivées, afin d'éviter, à tout prix, l'arbitraire.

Institution fondamentale. Appréciée dans son ensemble, la théorie subjective des nombres inaugure la philosophie seconde en la liant à la philosophie première par la nature et la généralité des conceptions. Mais elle est spécialement propre à caractériser la supériorité philosophique et religieuse de l'arithmétique sur l'algèbre, qui ne saurait jamais avoir qu'une destination objective, sans pouvoir directement concourir à régler la vie humaine. Intermédiaire entre l'arithmétique et la géométrie, l'algèbre ne comporte point une efficacité scientifique vraiment indépendante des secours qu'elle leur fournit. Ce calcul ne put

distinctement surgir, suivant la quinzième loi de la philosophie première, qu'après une suffisante culture des deux doctrines qu'il réunit. On ne le voit aucunement figurer dans les classifications encyclopédiques de l'antiquité, ni même du moyen âge, quoiqu'elles aient toujours embrassé ses deux souches.

Bornée à fournir des moyens de classement, l'échelle numérique reste tellement restreinte qu'elle peut remplir son office avec des noms quelconques, et même sans aucuns mots, d'après les signes naturels ci-dessus indiqués. Elle n'a besoin d'être systématisée que quand les nombres sont surtout employés à mesurer, de manière à devenir souvent considérables ; ce qui suppose un essor décisif de l'existence pratique, ordinairement résulté de l'avénement du régime sédentaire, vers la fin de l'âge fétichique.

On doit donc regarder la théorie subjective des nombres comme naturellement antérieure à la numération, quoique n'étant systématisable que dans la régénération finale, avant laquelle on ne pouvait assez connaître la nature humaine pour y concevoir des lois numériques. Rien n'est plus propre à caractériser la dignité, tant dogmatique qu'historique, d'une telle étude, où le début de la Logique se lie au terme de la Morale, et la spontanéité fétichique à la systématisation positive. Garantie des aberrations métaphysiques jadis résultées du régime absolu, la théorie subjective des nombres doit désormais inaugurer l'éducation encyclopédique en y développant le caractère synthétique émané de la philosophie première. Alors l'esprit peut nettement sentir l'aptitude intellectuelle, et même morale, des nombres comme auxiliaires directs, à la fois spontanés et systématiques, de la discipline religieuse. Nul concours hétérogène n'empêche d'apprécier une doctrine indépendante de toute instruction spéciale, et seulement fondée sur la culture mentale universellement résultée de l'éducation domestique.

Elle fait directement prévaloir la meilleure destination des nombres, en les rapportant au dedans plus qu'au dehors; tandis que leur usage est plus objectif que subjectif dans tout le reste des études mathématiques. Sous ces divers aspects, elle doit faire entièrement oublier l'incohérent assemblage de spéculations stériles qui fut spécialement cultivé, comme *théorie des nombres*, pendant l'anarchie académique.

Une saine appréciation d'un tel début conduit à sentir combien la raison s'honore en puisant, dans les conception le plus grossières, des moyens de consolider, et même d'ennoblir, l'existence humaine. Moralement envisagés, les nombres sont directement rejetés au dernier rang des abstractions positives, comme résultant d'un examen où l'on écarte toutes les qualités pour ne considérer que les quantités. Ils doivent pourtant obtenir une dignité, durable quoique indirecte, quand la sagesse humaine applique leurs propriétés au perfectionnement de ses institutions quelconques. L'universalité qui les caractérise leur procure une simplicité d'où résultent l'évidence et la fixité des notions correspondantes, toujours inaltérables au milieu de nos variations normales. Elles surmontent même les perturbations ordinairement résultées de la maladie, qui, dans les plus grands troubles du cerveau, fait rarement méconnaître les quantités, quoique elle dispose souvent à mal apprécier les qualités.

Toute notre sagesse, théorique et pratique, consiste à profiter de la subordination naturelle des phénomènes les plus nobles envers les plus grossiers pour instituer le perfectionnement universel en augmentant la consistance des uns et la dignité des autres. Un tel caractère se manifeste, de la manière la plus décisive, dès le début de l'éducation encyclopédique, en étudiant la théorie subjective des nombres.

Il faut donc accorder à cette étude une place distincte et régulière dans l'instruction mathématique, quoique son princi-

pal essor ne puisse appartenir qu'à la morale. Rapportée à sa destination, la théorie subjective des nombres ne saurait être pleinement appréciée que quand on a suffisamment étudié les lois de l'existence qu'elle doit aider à régler. Elle peut cependant offrir assez d'intérêt, dès le début de l'initiation encyclopédique, pour y devenir distinctement saisissable, puisque l'ensemble des antécédents, affectifs et poétiques, toujours résumé par le culte intime, y fait synthétiquement comprendre les institutions morales.

Rien ne doit donc empêcher un tel début d'agrandir les pensées et d'élever les sentiments des jeunes disciples de l'Humanité, dont les études mathématiques seront mieux préservées des dégénérations correspondantes. Avec l'anarchie métaphysique, surgit la disposition, dissimulée sous la discipline théologique, à concevoir l'enchaînement dogmatique indépendamment de la filiation historique. Cette tendance, autant irrationnelle qu'immorale, fut consacrée et développée par l'empirisme académique, surtout à l'égard des études mathématiques, dont la marche classique devint honteusement étrangère à toute considération sociale. Il faut normalement éviter que l'initiation individuelle soit jamais instituée séparément de l'évolution collective, dont les lois fondamentales sont assez établies par la philosophie première pour présider à la philosophie seconde, même dès son début. Nous y devons entièrement écarter le scrupule théorique qui, sous prétexte d'enchaîner les notions suivant leur ordre de dépendance, interdit d'ennoblir et d'éclairer l'essor abstrait d'après aucun aperçu de ses conclusions morales. Elles y peuvent toujours pénétrer sans confusion, en vertu de la préparation synthétique sur laquelle est spontanément fondé l'ensemble des études analytiques. Sous un régime où la foi devient plus complète et plus stable que quand le théologisme prévalait, il faut dignement invoquer la confiance

due aux instructions de l'Humanité, pourvu qu'on n'introduise ainsi que des notions actuellement intelligibles sans être immédiatement démontrables.

Bien que l'institution des nombres se soit davantage développée pour mesurer que pour classer, leur destination la plus ancienne, comme la plus noble, consiste à marquer les rangs. Il faut même reconnaître que la mesure suppose le classement, qui l'institue et qu'elle complète; sous la seule condition, spontanément remplie dans l'échelle numérique, que les degrés soient toujours équidistants. C'est ainsi que les nombres, restés longtemps ordinaux, devinrent habituellement cardinaux, quand on eut assez senti l'aptitude résultée de leur nature abstraite, où, les qualités étant écartées, les quantités peuvent aisément offrir une succession continue. Historiquement, la numération, qui développe la destination objective des nombres, ne put donc surgir qu'après un suffisant essor de leur théorie subjective. Appliqué d'abord au dedans, leur usage dut ensuite s'étendre au dehors, à mesure que l'essor du langage le permettait et que le service social le demandait, suivant la marche générale des progrès primitifs.

On doit systématiquement reproduire un tel enchaînement dans le cours normal des études mathématiques, où la théorie de la numération serait autrement inexplicable. Nous devons y voir un lien nécessaire, autant dogmatique qu'historique, entre l'appréciation subjective des nombres, où la Logique se rattache à la philosophie première ainsi qu'à la Morale, et leur appréciation objective, d'où résulte sa relation spéciale avec la Physique. Elle institue le principal développement des combinaisons numériques, qui, plus relatives à la mesure qu'au classement, n'offrent, dans leurs modes quelconques, que des conséquences ou des transformations de la numération, toute évaluation pouvant, au besoin, s'accomplir par dénombrement. Rattachées à

cette origine, les opérations arithmétiques se lient à l'ensemble de l'éducation positive, tant antérieure que postérieure, et comportent une systématisation qui serait autrement impossible. A quelque complication qu'elles parviennent, et malgré la confusion suscitée par leur combinaison finale avec les spéculations algébriques, nous pouvons ainsi concevoir une suffisante continuité dans la succession normale des évaluations quelconques.

Nous devons, historiquement, regarder la numération comme séparant et combinant les deux parties du domaine arithmétique qui furent respectivement cultivées sous le fétichisme et le théologisme. Une éducation où chacun s'assimile l'ensemble des antécédents humains est non-seulement conduite à l'invoquer, mais obligée d'en reproduire les phases essentielles. Elle doit donc accorder au calcul fétichique une extension capable de lui procurer assez d'attention, quoique son développement didactique ne puisse correspondre à son importance réelle. Sous ces conditions, la sagesse sacerdotale pourra déjà faire spécialement sentir aux jeunes disciples de l'Humanité que les diverses parties du système encyclopédique ne sauraient être comparativement appréciées d'après la durée de leurs études. Tous les degrés de l'instruction abstraite constituent seulement des préambules nécessaires pour l'enseignement moral, qui pourtant n'occupe que la dernière des sept années normalement consacrées au noviciat systématique. Rien n'a mieux caractérisé le matérialisme théorique que la disposition universelle, plus propre aux professeurs qu'aux élèves, à mesurer la valeur des études par le nombre des leçons, écrites ou verbales. On doit promptement habituer chaque novice à regarder la préparation septennale comme une phase exceptionnelle, où les rapports normaux sont nécessairement altérés, et dont il faut finalement oublier les détails pour en mieux utiliser l'ensemble.

Toutes les dignes occasions doivent être soigneusement sai-

sies afin de signaler et de réparer les vices, intellectuels et moraux, d'une telle initiation où notre chétif entendement tend à perdre de vue le but en élaborant les moyens. Elle comporte une fréquente intervention de l'esprit historique et de nombreux appels à l'instinct sympathique, chez des âmes ordinairement disposées à bien accueillir cette double influence, par les impulsions juvéniles et la préparation domestique. Nous pouvons donc espérer de surmonter les dangers propres à l'initiation abstraite si le sacerdoce est aussi capable de la diriger que les disciples d'en profiter. Il trouvera, dans les incidents synthétiques et sympathiques, de puissantes ressources pour exciter et soutenir l'attention du jeune auditoire, sans altérer l'enchainement didactique. Réciproquement, ils répandront sur son office un charme inépuisable, et fourniront des moyens spéciaux de manifester le mérite individuel en développant l'influence collective.

Afin que l'étude subjective des nombres soit pleinement instituée, il importe d'y faire déjà concourir l'aptitude théorique du milieu fictif qui complète la synthèse relative. C'est dans l'Espace qu'il faut normalement contempler toutes les images qui n'ont pas besoin d'un siége spécial, à quelque sens qu'appartiennent leurs sources. Toujours cette résidence abstraite les rendra plus fixes, plus nettes, et même plus vives, quand les habitudes seront convenablement formées; ce qui demande peu de temps chez les esprits bien disposés. Elle a tant facilité l'étude des figures et des mouvements que, sans l'empirisme scientifique, elle aurait été spontanément étendue aux nombres, surtout déterminés, avant que le positivisme eût systématisé le milieu subjectif. Sous le régime normal, l'art aura naturellement préparé la science à faire convenablement usage de l'Espace, et les chiffres y seront habituellement gravés dès le début de l'éducation encyclopédique.

Destinée à s'exercer souvent, cette attribution sera mieux instituées si la consitution du milieu subjectif est déterminée avec la précision que comporte une telle fiction. Il faut donc assigner une couleur à l'Espace ainsi qu'à ses empreintes, afin que les images visuelles deviennent plus distinctes et plus stables. Mais, quoique le choix en semble d'abord indifférent, on doit y procéder de manière à mieux développer l'esprit synthétique et l'instinct sympathique, en y transportant les habitudes résultées du culte universel. Une saine appréciation des convenances religieuses fait bientôt sentir que le meilleur mode consiste à former des empreintes vertes sur un fond blanc. Sous une telle constitution, la nature sympathiquement passive du Grand-Milieu sera mieux caracterisée d'après une relation spéciale avec le Grand-Fétiche et le Grand-Être, dont ces couleurs représentent les principaux attributs, à la fois physiques et moraux.

Étendue aux nombres avec ce complément, l'aptitude théorique de l'Espace doit directement faciliter leurs combinaisons quelconques, et rendre moins fréquentes les méprises du calcul mental en améliorant les signes abstraits, qui, sans un tel secours, restent vagues ou confus. Pour en apprécier l'influence, il suffira d'instituer ainsi l'étude subjective des nombres, qui, demandant une attention plus profonde et mieux soutenue, utilisera davantage cette assistance que les travaux d'évaluation. On doit d'ailleurs noter que la détermination précédente a seulement complété la constitution de l'Espace envers les images ordinairement préférées dans la méditation humaine, où le sens le plus synthétique prévaut sur le plus sympathique. Ce mode, philosophiquement apprécié, suffit pour faire aisément concevoir celui qui conviendrait à la prépondérance de l'ouïe, ou même du toucher. A chaque sens correspond un système de méditation que la constitution du milieu subjectif peut toujours seconder

pourvu qu'elle ait d'abord reçu les compléments spéciaux qu'il serait superflu d'instituer avant le besoin, sauf envers le cas le plus usuel.

Ces diverses indications doivent ici suffire pour caractériser la nature et signaler l'importance de la vraie *théorie des nombres*, qui, normalement placée au début de la Logique, y fait directement ressortir la destination synthétique de l'essor analytique. Il n'appartient qu'à la Morale de rendre pleinement appréciable une étude qui réellement consiste à saisir les lois numériques de l'existence humaine. Déjà la philosophie première a naturellement préparé cette manière de considérer la théorie subjective des nombres, quoique une telle conception ne puisse être convenablement suivie que quand l'accomplissement du noviciat encyclopédique dispose à systématiser la vie réelle.

Étendue jusqu'à la numération, la synthèse arithmétique peut maintenant régler cette institution fondamentale, d'après sa subordination nécessaire à l'ensemble de la doctrine précédente. Pour cela, l'attention doit d'abord se fixer sur la relation, ci-dessus indiquée, entre le classement et la mesure. Il est autant impossible de mesurer sans avoir classé que de classer sans produire une mesure quelconque, qui d'ailleurs peut souvent manquer de la précision convenable. Cette lacune ne saurait avoir lieu quant aux nombres, parmi lesquels le rang détermine la valeur, pourvu qu'aucun degré ne soit omis. A l'égard des grandeurs continues, le classement ne suffit à la mesure que quand les intervalles ont été spécialement égalisés.

Rattachée à la théorie des nombres, la numération y trouve ses racines spontanées, et même ses principes systématiques, d'après la transformation graduelle de la spéculation ordinale en appréciation cardinale. On doit regarder toute évaluation, quelque compliquée qu'elle soit, comme consistant à déterminer le rang d'un nombre dans l'échelle arithmétique. Mais cette

échelle ne peut être directement instituée d'après un dénombrement spontané que quand elle demeure tellement restreinte qu'il ne suscite aucune omission ni répétition. Alors des noms incohérents suffisent pour que les rangs ne soient jamais confondus, comme le montre encore la coutume universelle des populations les mieux cultivées. Nous pouvons ainsi sentir que le même mode comporterait, au besoin, un plus vaste usage, chez des peuplades restées étrangères à la numération systématique. Elles en ont souvent offert l'exemple, quand les exigences pratiques s'y sont plus développées que les inspirations théoriques, surtout parmi les tribus guerrières où le sacerdoce n'a point surgi. Si l'on remarque avec quelle facilité nous retenons, pour divers usages, beaucoup de mots incohérents, on sentira que la numération spontanée peut atteindre fort au delà du terme propre aux habitudes régulières de la civilisation occidentale.

Vouée au dénombrement direct, la numération pourrait longtemps conserver sa constitution primitive, à moins que les besoins pratiques, industriels ou militaires, ne vinssent habituellement susciter des nombres très-considérables. On ne peut plus se borner à ce mode quand on doit, non-seulement *compter*, c'est-à-dire distinguer chaque nombre du précédent et du suivant, mais aussi *calculer*, c'est-à-dire évaluer une combinaison numérique dont tous les éléments sont déjà connus. La moins compliquée, même une addition, exigerait de longs et fastidieux efforts, bientôt exposés à d'inévitables méprises, s'il fallait toujours y procéder par dénombrement direct, sans que les nombres y fussent supérieurs à ceux que nous pourrions séparément apprécier. Une systématisation de l'échelle numérique devient donc indispensable, non pour compter, mais pour calculer, aussitôt que le domaine arithmétique se developpe distinctement, vers la fin de l'âge fétichique, par l'avénement de

l'existence sédentaire. Nous ne devons attribuer qu'à l'anarchie académique le grossier empirisme qui disposa la plupart des mathématiciens à regarder la numération comme essentiellement destinée à noter les nombres, tandis qu'elle fut surtout instituée afin de les combiner. Toutefois, les deux aptitudes étant naturellement connexes, la seconde n'a pu surgir sans faire aussi développer la première, quand des motifs quelconques, même de simple curiosité, l'ont spontanément demandé, quoique cette extension fût ordinairement dépourvue d'intérêt. A travers les efforts du plus grand géomètre de l'antiquité pour instituer un immense dénombrement, on sent qu'il avait surtout en vue de rendre l'échelle arithmétique suffisamment capable d'assister les calculs suscités par ses découvertes géométriques.

Après avoir directement institué la numération spontanée, l'arithmétique ordinale ou subjective fit indirectement surgir la numération systématique. Rangeant les nombres par groupes égaux, cette systématisation rend finalement composés les noms primitivement simples, pour désigner d'abord à quel groupe chaque nombre appartient, puis le rang qu'il y tient. Toutefois, cette institution fut moins destinée à diminuer la quantité des noms usités qu'à permettre de compter plus loin sans en introduire d'autres. Elle ne les réduit aux nombres inférieurs à la base adoptée que quand un tel système s'est pleinement développé, d'après un redoublement continu des groupements successifs. Son premier état se borne au groupement immédiat, qui peut, sans confusion, être utilisé fort au delà des limites devenues familières aux Occidentaux, en ne composant chaque nom que de deux parties.

Nous devons regarder une telle institution comme spontanément suscitée par le spectacle social, où l'on voit les nations résulter, non de l'agrégation directe des individus, mais du concours des familles, ce qui demande une double désignation pour

chacun. Une observation analogue inspire aussi le redoublement de l'artifice numéral, quand plusieurs tribus se réunissent en expéditions temporaires, de manière à motiver une triple dénomination. Effectivement, la numération reste longtemps bornée à deux degrés successifs de composition, qui n'offrent que trois ordres d'unités, tant que l'essor pratique, industriel ou militaire, n'exige pas des combinaisons ou des dénombrements trop considérables. Voilà comment surgit, sous le fétichisme, avant l'existence sédentaire, une institution qui fut bientôt développée quand le sacerdoce vint systématiser l'élaboration spontanée. Après les deux degrés habituels de composition, il lui devint facile d'en introduire une succession quelconque, qu'il dut seulement régulariser en rendant toujours uniforme le taux du groupement graduel.

Tous les nombres se trouvent ainsi décomposés en unités progressivement complexes, qui n'ont jamais besoin, dans chaque ordre, d'être multipliés au delà de la base adoptée. Il en résulte, sans aucun artifice spécial, une écriture directe, encore usitée quelquefois quand on doit davantage garantir qu'abréger, en notant la momenclature numérique comme toute autre branche de la même langue. Elle a finalement besoin de deux contractions, mal distinguées par la science moderne, pour y simplifier l'indication de la valeur et du nombre des diverses unités. Respectivement dues aux populations militaires et théocratiques ou fétichocratiques, ces deux simplifications sont séparément suggérées par l'écriture alphabétique ou les hieroglyphes. Sous le premier mode, on abrège l'inscription spontanée en y réduisant à leurs initiales les noms des divers ordres, sauf à répéter convenablement chacune d'elles ; le second institue des signes spéciaux pour les nombres élémentaires et désigne le degré de composition d'après le rang du chiffre.

Dans cet essor, la sagesse sacerdotale sut admirablement

utiliser l'aptitude spéciale des habitudes hiéroglyphiques, malgré leurs inconvénients généraux. On voit, au contraire, l'instinct guerrier, sous le meilleur système d'écriture universelle, produire la plus imparfaite des notations numériques, qui pourtant suffit à des peuples plus occupés de dénombrements que de combinaisons. Toutefois, quand l'évolution théorique y surgit, surtout d'après l'exception grecque, elle aboutit à des tentatives suivies qui devaient spontanément conduire les Occidentaux à la notation orientale, si celle-ci ne leur eût pas été transmise à temps. Elle y devint graduellement prépondérante, à mesure que l'essor industriel fit universellement ressortir son aptitude, non seulement à compter, mais principalement à calculer. Son établissement s'y trouva bientôt complété par l'extension fractionnaire, dont les castes sacerdotales n'avaient pu sentir le besoin, qui ne dut surgir qu'après l'abolition du servage.

Étudiée dogmatiquement, la notation qui distingue les unités numériques d'après la place qu'occupent leurs chiffres se montre pleinement conforme à son origine historique. Généralisant les observations résultées d'un classement quelconque, et surtout appréciables, dans la hiérarchie sociale, le sacerdoce dut bientôt sentir que partout la position mesure la dignité, comme l'indique, encore aujourd'hui, l'heureuse équivoque propre au mot *grade*. Alors il fut naturellement conduit à reconnaître que, réciproquement, la place peut suffire pour désigner la classe, conformément à la notion fondamentale de l'ordre, où les notions d'arrangement et d'autorité coïncident. Rien n'empêchait d'étendre aux nombres une telle appréciation, surtout d'après les habitudes spontanément résultées de leur étude ordinale. Dès lors, il devint facile de réduire l'indication du rang à la seule position du signe, sans craindre aucune confusion envers le plus simple de tous les classements.

Guidée par la nomenclature, la notation fut ainsi perfec-

tionnée d'après la tendance constante de l'entendement à procéder du général au particulier dans l'énonciation, et surtout l'application, d'une classification quelconque, en vertu de la loi de continuité, qui résume la philosophie. Réalisée envers les nombres, cette disposition fit bientôt naître l'habitude de nommer d'abord les unités les plus élevées, en descendant toujours vers les moindres. Avec tout autre arrangement, l'esprit se trouverait brusquement conduit à préciser le nombre sans avoir graduellement rapproché ses deux limites. Nous voyons cette tendance spontanément surmonter, envers les nombres, la constitution inversive des langues anciennes, quoique l'emploi des des initiales eût alors permis de changer, sans méprise, la succession écrite des différentes parties d'une dénomination numérique. Dans l'éducation individuelle, comme d'après l'évolution collective, plusieurs cas décisifs ont déjà fourni la vérification spéciale de la loi générale, avant le début de l'essor théorique. Elle y peut donc être directement invoquée pour expliquer l'avénement, dogmatique autant qu'historique, de la notation numérique que les Occidentaux doivent aux castes orientales. Sous une telle impression, les jeunes disciples de l'Humanité se sentiront spécialement liés aux deux âges de l'évolution universelle, d'après une institution que le fétichisme et la théocratie ont successivement élaborée, la transition occidentale l'ayant seulement utilisée.

Nous pouvons ainsi concevoir la constitution numérale sans aucune détermination du taux uniforme des groupements successifs. Avec un module quelconque, la numération, sa nomenclature, et sa notation, sont pleinement systématiques, quand il s'y trouve invariablement appliqué dans tous les degrés d'ascension. Cependant, il faut achever d'instituer la systématisation numérale en y réglant le choix de cette base, naturellement comprise entre des limites peu distantes. Elle ne saurait aug-

menter sans accroître, non-seulement le nombre des caractères, mais surtout celui des combinaisons élémentaires, tant sommes que produits, toujours équivalent au carré de l'avant-dernier chiffre. Réciproquement, sa diminution, quoique facilitant les calculs, pourrait surcharger les écritures numériques, et même y susciter de fréquentes méprises, d'après une excessive répétition des signes conservés.

Il serait étrange que, dans un tel choix, le nombre empiriquement adopté pendant la préparation spontanée pût finalement convenir à l'état systématique, sans que cet examen eût été jamais institué. Même il faut reconnaître qu'une pareille question n'était point jugeable avant que l'accomplissement de l'initiation absolue en eût assez manifesté les divers éléments, et que l'avénement de la synthèse relative permît d'apprécier leur ensemble. Pour faire assez sentir ces deux conditions connexes, il suffit d'indiquer l'accord nécessaire entre la numération abstraite et la numération concrète, dont la première doit être systématiquement subordonnée à la seconde, comme la théorie à la pratique. Rien ne peut mieux vérifier l'indivisibilité de la vraie synthèse, ou l'impossibilité des systématisations partielles, que le mémorable effort, accompli pendant la crise française, pour instituer un système universel des mesures décimales. Élaborée à grands frais de tous genres, et scrupuleusement exécutée après de longs préparatifs, cette opération n'a pu cependant produire qu'une construction provisoire, faute de vues synthétiques, qui n'étaient pas mûres alors. Sous des apparences systématiques envers les détails, on y voit l'ensemble dominé par une résolution purement empirique, dont personne n'osa même concevoir l'examen. Avant de subordonner toutes les divisions de mesures à la numération décimale, il fallait pourtant reconnaître que l'abstrait doit s'adapter au concret, tandis qu'on a passivement suivi la marche inverse.

Tous les travaux analytiques ainsi dépourvus de présidence synthétique ne peuvent aboutir qu'à faciliter une construction durable, en préparant ses matériaux, et surtout en manifestant ses conditions. Rattachées à la numération décimale, les mesures de tout genre ont fait mieux ressortir le besoin général d'une suffisante harmonie entre les deux modes, abstrait et concret, du dénombrement fondamental. Alors on s'est trouvé graduellement conduit à des conflits qui ne peuvent se résoudre qu'en renouvelant à la fois la numération abstraite et la numération concrète. Ce cas s'est surtout réalisé quant au groupement le plus usuel des jours, que la systématisation analytique a voulu rendre aussi décimal. Elle a tellement échoué dans cette tentative que son avortement a suscité, quand la synthèse finale a surgi, des réflexions qui doivent bientôt faire universellement changer la base empirique de la numération abstraite et concrète.

A la vérité, ce changement nécessaire se trouvera notablement entravé par la prépondérance, quoique plus officielle que réelle, de la construction provisoire chez le peuple investi de l'initiative occidentale. Voilà comment toute réforme prématurée tend à retarder l'avénement général de la vraie régénération, même quand elle en facilite la préparation spéciale. Il faut cependant compter pour le peu de consistance des constructions purement partielles, toujours incapables de résister à la systématisation universelle, surtout en un cas où le succès doit seulement résulter de l'éducation.

Formé de deux progressions suivies d'une synthèse, ou d'une progression entre deux couples, le nombre sept, succédant à la somme des trois nombres sacrés, détermine le plus vaste groupe que nous puissions distinctement imaginer. Réciproquement, il pose la limite des divisions que nous pouvons directement concevoir dans une grandeur quelconque. Un tel privilége

doit systématiquement conduire à le prendre pour base de la numération finale, tant concrète qu'abstraite. Il faut que cette base soit un nombre premier, surtout en vertu du besoin général d'irréductibilité, mais aussi d'après l'avantage spécial d'une pleine périodicité dans les transformations fractionnaires. Tous les nombres inférieurs à sept seraient d'ailleurs trop petits pour un tel office.

Étudiée dans son ensemble, abstrait et concret, l'incohérente constitution de la numération préliminaire a toujours contenu le germe de la numération finale. Par l'universelle institution de la semaine, la systématisation positive se trouve spécialement liée à la spontanéité fétichique envers les dénombrements quelconques. Avec un tel concours, le sacerdoce régénérateur doit graduellement obtenir l'uniforme prépondérance de la numération septimale chez toutes les branches de la famille humaine. Rien ne peut mieux indiquer cette issue normale que le conflit spontanément terminé par le peuple central entre la semaine et la décade. Sans aucune assistance systématique, la raison populaire a fait irrévocablement avorter une vicieuse réforme que la science officielle avait vainement prônée.

Tel est le débat spontané d'où la postérité datera le choix décisif entre les deux bases opposées qui coexistaient dans la numération préliminaire. Rendue uniforme, sa constitution, abstraite et concrète, fut ainsi conduite à manifester l'irrationalité d'une base qui ne pouvait partout prévaloir. Il eût fallu beaucoup de temps pour faire spontanément surgir une telle conviction, si, par une coïncidence nullement fortuite, ce conflit n'avait très-peu précédé l'avénement direct de la synthèse finale. Bientôt le positivisme a systématiquement consacré la résistance populaire aux impulsions métaphysiques, ou même scientifiques, en subordonnant à la semaine l'ensemble du ca-

lendrier relatif au culte public de l'Humanité, tant concret qu'abstrait. Une solidarité déjà familière entre toutes les parties de la numération préliminaire a dès lors conduit à changer la base empirique de la constitution numérale.

Il faut regarder ce changement comme ayant été philosophiquement préparé par la mémorable proposition du dernier organe de l'universalité théorique à travers l'anarchie moderne. Nous ne pouvons autrement expliquer son projet de numération binaire qu'en y voyant une impulsion systématique pour disposer à diminuer la base de la numération abstraite. Toutefois, cette question était tellement prématurée que l'éminent philosophe s'est sagement abstenu de déterminer le mode convenable. Elle ne pouvait devenir pleinement jugeable que quand les besoins pratiques auraient préalablement inspiré des tentatives pour établir l'harmonie entre la numération abstraite et la numération concrète. Guidé par les efforts spontanément surgis à cet égard depuis la fin du moyen âge, le penseur germanique a voulu d'avance indiquer la voie normale en régénérant la numération abstraite. Rien n'autorise à supposer qu'il fût assez préocupé des avantages arithmétiques de la numération binaire pour en méconnaître les inconvénients usuels. On ne peut donc motiver sa proposition que d'après le désir d'instituer un contraste capable de caractériser la nature et le sens d'une régénération qu'il avait systématiquement pressentie sans pouvoir en déterminer le mode effectif.

Cette invitation philosophique vient finalement concourir avec une impulsion populaire pour faire normalement prévaloir la numération septimale, tant abstraite que concrète. Il a suffi que la synthèse relative fût directement conduite à concilier le besoin de consacrer la semaine avec celui d'établir une suffisante harmonie entre toutes les parties de la constitution numérale. Elle a bientôt reconnu que cette conciliation obligeait, non-

seulement d'introduire l'uniformité parmi les dénombrements concrets, mais aussi de changer la base empiriquement adoptée envers les dénombrements abstraits. La solution subjective est aussi favorable pour calculer que pour compter, vu les diverses simplifications qu'elle apporte aux opérations usuelles. Outre l'avantage ci-dessus indiqué quant aux fractions, la numération septimale réduit à vingt-cinq les soixante-quatre combinaisons élémentaires que l'arithmétique décimale impose à toute mémoire.

Historiquement envisagée, cette régénération des dénombrements et des calculs vient directement lier la systématisation finale et la spontanéité primitive. Un tel concours doit partout fournir le critérium dynamique des inspirations statiques sur l'état normal des institutions quelconques. Malgré la décision systématiquement émanée des propriétés subjectives du nombre sept, il fallait que la philosophie de l'histoire confirmât sa destination finale en le représentant comme seul apte à combiner les deux âges extrêmes de la préparation humaine. On voit combien cette condition se trouve remplie dans une institution où les dispositions spontanées des populations les plus distantes concourent avec les pressentiments systématiques du dernier philosophe. Rien ne peut mieux dissiper l'hésitation empirique qui doit naturellement entraver l'avénement d'une telle régénération, jusqu'à ce que l'éducation universelle l'ait irrévocablement installée.

On ne saurait essentiellement attribuer la base décimale qu'au besoin d'augmenter le taux des groupements tant que la systématisation numérale resta bornée à ses premiers degrés. Rattachée à l'arithmétique ordinale, la base primitive semble directement émanée des nombres sacrés, comme la base définitive, par une combinaison où le second devient l'exposant du troisième, au lieu d'en être le coëfficient, en ajoutant au produit le

premier. Appréciée plus profondément, cette hypothèse est bientôt écartée d'après la difficulté subjective de faire ainsi succéder trois progressions. L'antériorité de la semaine fournit une meilleure explication, où dix dérive de sept en y joignant le dernier nombre sacré, pour instituer un taux de groupement capable de suffire aux besoins naissants sans trop redoubler les degrés. Elle convient d'autant mieux que le même motif a souvent suscité l'emploi provisoire de bases encore supérieures, dont l'usage laisse aujourd'hui des traces appréciables dans les habitudes occidentales.

Guidés par cette appréciation, nous pouvons historiquement regarder l'institution septimale comme la systématisation finale d'une tendance antérieure à l'institution décimale. Un besoin empiriquement satisfait comprima cette disposition dès le début, en faisant provisoirement prévaloir une base trop grande. Il aissa pourtant subsister la tendance primitive envers le dénombrement qui s'est toujours lié le mieux au culte ainsi qu'au régime. De cette coexistence a finalement surgi le conflit décisif qui conduit la religion universelle à consacrer le mode initial. Elle le fait irrévocablement prévaloir dans l'ensemble de la constitution numérale, tant abstraite que concrète, uniformément rattachée à la base sept.

A bien juger cet avénement, il fournit une éclatante manifestation de la prépondérance croissante des motifs religieux sur les impulsions théoriques et même pratiques. Nous y voyons la numération septimale historiquement surgir des réactions systématiques du conflit décisif entre la semaine et la décade. Guidé par l'instinct religieux, le catholicisme servit alors d'organe passif aux actives répugnances du peuple central contre la constitution décimale. Elle continua pourtant de prévaloir officiellement envers tous les autres dénombrements, en aspirant toujours à s'étendre au calendrier, au nom de l'harmonie

arithmétique. Sous l'impulsion positiviste, suppléant à l'impuissance théorique et pratique du catholicisme, l'instinct religieux a systématiquement prévalu partout, en instituant l'unité numérale d'après le mode consacré par le culte.

Relativement à l'état normal, l'ensemble des indications précédentes pourrait ici suffire pour dissiper toute hésitation envers la numération septimale. Elle ne doit habituellement exiger, dans l'éducation encyclopédique, que le développement spécial des motifs généraux, tant historiques que dogmatiques, que je viens d'assigner à l'usage devenu prépondérant dès l'enfance. Fondée sur des habitudes universelles, la numération abstraite sera finalement exposée sans être spécialement accompagnée de la numération concrète, sauf l'explication systématique de leur harmonie nécessaire. Une telle marche doit ici recevoir une modification exceptionnelle envers la situation transitoire des occidentaux, qu'il faut directement conduire à l'institution septimale. Graduellement préparée par les indications précédentes, une sommaire exposition de la numération concrète devient maintenant nécessaire pour compléter l'explication de la numération abstraite, afin de constater l'avénement d'une pleine unité numérale. Il faut pourtant regarder un tel complément comme propre à l'élément pratique de la *Synthèse subjective* dont ce volume constitue l'élément théorique. On ne doit donc trouver ici qu'un aperçu suffisant pour caractériser l'extension concrète de la numération septimale, en réservant au tome final les explications spéciales qui conviennent davantage au *Système d'industrie positive* qu'au *Système de logique positive*.

D'après les habitudes récemment consacrées par la réforme décimale, je puis essentiellement réduire cette indication aux mesures linéaires, tant circulaires que rectilignes. Il faut d'abord les lier entre elles en perfectionnant la relation actuelle du

module fondamental à la circonférence terrestre, conformément à la préférence universelle que méritent les nombres premiers. Voilà comment je me suis trouvé conduit à diviser le quart du méridien en un nombre de parties égal au produit des sept moindres facteurs premiers, tous élevés seulement à la première puissance, sauf le second *deux* et le cinquième *sept*, qui s'y trouvent cubés. Un tel partage fournit un module rectiligne plus grand que le mètre français, et presque équivalent aux six septièmes de l'ancienne toise. Sans m'occuper ici d'une nomenclature réservée à mon volume final, je me borne à cette définition, qui, d'après les indications suivantes, permettra de rattacher à la planète humaine toutes nos mesures linéaires, et, dès lors, leurs dérivations quelconques.

Il faut, de ce module, faire directement émaner six autres unités de longueur, trois au-dessus et trois au-dessous, en multipliant ou divisant par quatorze pour passer de chacune à la suivante. Selon cette règle on formera les sept unités respectivement propres aux aires, aux volumes, et même aux poids, quand le centre de chaque groupe sera convenablement dérivé, suivant les lois géométriques, de la base linéaire, ou de ses annexes normales. On doit ensuite concevoir le jour composé de vingt-huit heures, dont chacune comprend cinquante six minutes, pareillement subdivisées. Le quart de cercle, qui doit être astronomiquement divisé comme le temps, se partage en nonante-un degrés, composés chacun de cinquante-six minutes, semblablement décomposables. Étendue jusqu'au thermomètre, la numération concrète y fait encore prévaloir les facteurs premiers, en attribuant aussi nonante-un degrés à l'intervalle compris entre la glace fondante et l'eau bouillante.

Etudiée dans son ensemble, cette constitution numérale se montre directement supérieure à celle qui se trouve officiellement installée chez le peuple central. Pour motiver la préfé-

rence, il suffit de remarquer l'aptitude de l'institution septimale, non-seulement à faire, mieux que la décimale, concorder l'abstrait et le concret, mais à fonder l'unité numérale en perfectionnant l'harmonie concrète. Rien n'a jamais pu déterminer l'extension officielle de la réforme française aux divisions connexes du jour et du cercle, naturellement liées à la constitution du calendrier d'où surgit le conflit qui la fit avorter. Il suffirait d'un tel cas pour confirmer spécialement la supériorité générale des plans librement émanés d'un penseur synthétique sur les projets analytiques d'un comité temporellement puissant. Sous la seule influence de l'éducation encyclopédique, le sacerdoce régénérateur aura bientôt obtenu, sans appui politique, l'adoption occidentale de la numération positiviste, tandis que l'institution révolutionnaire ne put jamais prévaloir qu'officiellement.

Notre constitution numérale semble d'abord inférieure à celle qui l'a provisoirement préparée en ce que les diverses mesures de chaque espèce n'y sont pas des fractions septimales les unes des autres. A l'inspection d'un tel reproche, on doit présumer qu'il n'est aucunement fondé, puisque je pouvais aisément l'éviter en choisissant sept au lieu de quatorze pour la subordination mutuelle des unités homogènes. Toutefois, outre la bissection, j'ai surtout voulu rendre ainsi ces unités plus distinctes qu'elles ne le sont dans l'institution décimale, où l'excessive facilité de ramener l'une à l'autre neutralise le principal office d'une diversité directement destinée à multiplier les points de départ. Il faut attacher plus de prix à la netteté de ces types qu'à la simplification, moins réelle qu'apparente, de calculs qui sont rarement compliqués, et dont les difficultés ne sauraient jamais affecter des esprits normalement élevés. Faute de prévoir l'universelle extension de l'éducation encyclopédique, la construction provisoire s'est aveuglément préoccupée de consi-

dérations secondaires, en méconnaissant la principale destination de la réforme numérale.

Historiquement appréciée, une telle rénovation doit spécialement manifester l'irrévocable avénement du vrai sacerdoce, seul apte à faire normalement prévaloir toute institution susceptible d'universalité réelle. On y voit l'esprit positif, finalement devenu synthétique, obtenir un ascendant incompatible avec sa préparation analytique, qui le subordonnait toujours aux gouvernements mêmes auxquels il inspirait trop de confiance. Régénérées par la religion relative, la véritable science et la saine philosophie auront ainsi constaté leur aptitude à reconstruire le pouvoir théorique, en surmontant, dans un cas spécialement décisif, les résistances obstinément émanées des débris académiques et métaphysiques. Après avoir dignement consacré les aspirations populaires de tous les temps et de tous les lieux, le culte de l'Humanité réalise aussi les vœux d'élite, spontanément condensés chez le dernier penseur auquel l'anarchie moderne permit l'universalité systématique. Son double programme envers le langage et la numération se trouve normalement absorbé dans le positivisme, qui lui fournit une solution décisive, nécessairement différente du projet provisoire dont l'efficacité dut se borner à signaler la question.

Afin que le domaine numéral soit pleinement systématisé, j'y dois normalement incorporer une doctrine empiriquement ravie à l'arithmétique par l'algèbre. Voilà comment je suis ici conduit à placer, comme complément essentiel de la numération abstraite, le dénombrement régulier des combinaisons, arrangements, et permutations, envers des objets quelconques. On ne peut y voir qu'une question naturellement analogue à celle de la construction de l'échelle numérique, sauf la difficulté plus grande d'éviter toute omission et répétition. Irréductible à d'autres, ce triple problème ne comporte de solution qu'en in-

stituant un mode général pour ramener à la numération un dénombrement qui ne saurait être directement accompli que dans les cas les plus simples. Réduites aux inspirations spontanées, cette transformation n'exige aucune instruction spéciale, et doit normalement compléter le début de l'arithmétique.

Bien appréciées suivant leur nature et leur connexité, ces trois questions peuvent être chacune directement traitées, et rentrer aussi l'une dans l'autre, en constituant, par leur ensemble, la théorie numérique de l'ordre. Établie normalement, leur succession consiste à ramener les combinaisons aux permutations, sous l'entremise des arrangements, afin de borner le dénombrement immédiat au cas le plus simple. Nous pouvons d'abord lier les combinaisons aux arrangements, en considérant que, si les unes étaient formées, chacune produirait autant de ceux-ci qu'elle comporte de permutations. Il faut donc regarder le nombre des combinaisons quelconques comme égal à celui des arrangements analogues divisé par celui des permutations correspondantes. Rationnellement appréciée, cette transformation ébauche la solution, puisque les arrangements, quoique plus nombreux que les combinaisons, sont plus faciles à compter, comme comportant mieux un classement exempt de méprise.

Il faut ensuite ramener le dénombrement des arrangements à celui des permutations, d'après une considération entièrement semblable à celle qui fournit la première réduction du triple problème. Mettant à la suite de chaque arrangement toutes les permutations des objets qu'il n'embrasse pas, on produirait toutes celles que comporte le nombre total des objets. Par conséquent, le nombre des arrangements quelconques équivaut à celui des permutations de la totalité divisé par celui de celles du groupement. On peut donc regarder le nombre des combinaisons comme égal à celui des permutations to-

tales divisé par le produit des deux nombres de permutations partielles qui correspondent, d'abord aux objets groupés, puis aux objets non groupés. Nous devons maintenant compléter la solution en instituant la loi des permutations, qui ne présente aucune difficulté, d'après la subordination graduelle des différents cas. Elle consiste en ce que chaque permutation d'un ordre quelconque en fournit, au degré suivant, un nombre égal à celui des objets finalement permutés. Rattachée au cas binaire, la formule générale des permutations devient ainsi le produit de toute l'échelle numérique jusque et compris le nombre total des objets à permuter.

Tel est le dénombrement immédiat d'où l'on doit, en sens inverse, remonter d'abord aux arrangements, puis aux combinaisons, suivant les lois ci-dessus établies. A l'inspection de la formule ainsi trouvée, sous forme fractionnaire, pour les arrangements, on voit qu'elle peut finalement prendre la forme entière, puisque tous les facteurs du dénominateur y sont nécessairement reproduits au numérateur. Réduit à sa plus simple expression, le nombre des arrangements quelconques équivaut au produit d'une suite continue de facteurs décroissants, à partir du nombre total des objets, jusqu'à ce que celui des multiplicateurs atteigne le taux du groupement. De là résulte la formule finale des combinaisons, qui doit toujours garder sa constitution fractionnaire, malgré sa valeur nécessairement entière. Il convient d'apprécier ces divers enchaînements, et ceux que susciteraient les deux autres manières de traiter ce triple problème, sans y faire aucun usage des signes spécialement adaptés aux raisonnements généraux sur les nombres, quand les déductions, ou même les inductions ont besoin d'assistance. Faute de ces notations, seulement nécessaires aux spéculations prolongées, on peut pleinement saisir, avec moins de facilité, mais plus profondément, des relations ainsi dépour-

vues de toute dépendance envers des notions antérieures. Sous un tel régime, qu'il faut introduire dès le début des études mathématiques, on doit mieux sentir comment l'institution d'un dénombrement quelconque consiste à le ramener au classement.

Un théorème numérique, assez précieux pour être ici noté, surgit spontanément de la loi des combinaisons, quand on y compare sa forme naturellement fractionnaire avec ses résultats nécessairements entiers. Nous voyons ainsi que tout produit de facteurs consécutifs, en nombre quelconque, doit être exactement divisible par celui d'un pareil nombre de termes de la série numérique. Il serait directement impossible de saisir cette relation au delà de trois facteurs : mais cela suffit à sa vérification générale, en étudiant la dépendance de chaque cas envers le précédent. Cette subordination ressort en isolant et comparant les plus grands facteurs respectifs du numérateur et du dénominateur de la formule des combinaisons. On aperçoit ainsi que chaque évaluation de cette formule équivaut à la somme de celles que l'on obtiendrait en diminuant séparément d'une unité, tantôt le nombre, tantôt la grandeur, des facteurs du produit que l'on considère.

Sous une telle décomposition, on peut aussi reconnaître la connexité générale du problème des combinaisons avec celui des répartitions, où l'on cherche combien de partages, soit binaires, soit ternaires, etc., comporte un nombre quelconque, sans écarter les termes nuls. On peut directement saisir la loi suivant laquelle chaque espèce de partages se ramène à la précédente, en attribuant à la nouvelle partie toutes les valeurs qu'elle peut successivement avoir. Une telle disposition fait aussitôt reconnaître que toute répartition équivaut à l'ensemble des applications de la précédente envers le nombre qu'on veut partager et tous ceux qui le précèdent. Toutefois, cette

rédaction provisoire peut seulement servir à préparer la conclusion où chaque répartition devient la somme des deux que l'on obtiendrait en diminuant séparément d'une unité tantôt le nombre des parties, tantôt le nombre à partager. Il suffit de rapprocher cette subordination mutuelle de celle qui convient à la loi des combinaisons pour apercevoir leur identité complète. Elle autorise à regarder la formule des répartitions comme consistant à diviser, par tous les termes de la série numérique jusqu'au taux du partage, le produit d'un pareil groupe de facteurs consécutifs après le nombre à partager. Nous ne pouvons méconnaître la légitimité d'une conclusion directement résultée de l'identité saisie entre deux lois de subordination dont chacune est nécessairement caractéristique du cas correspondant, ce qui permet d'étendre à l'un la règle de l'autre.

Coordination spéciale.

Après avoir assez systématisé la numération et ses annexes naturelles, il faut consacrer le dernier tiers de ce chapitre à la coordination spéciale du calcul arithmétique, réduit au développement qui doit normalement précéder l'algèbre. Mais une telle appréciation ne saurait être mieux accomplie qu'en indiquant l'objet et l'esprit de chacune des seize leçons consacrées à cette étude dans le plan général de l'éducation encyclopédique, comme je le ferai successivement envers les autres parties de la Logique. Il faut d'abord écarter les sept leçons caractérisées d'après les deux autres tiers de ce chapitre, la première pour l'introduction générale, les trois suivantes à l'égard de la théorie subjective des nombres, et les trois dernières quant à la numération.

Des neuf leçons qui restent, la finale doit être entièrement consacrée au résumé synthétique qu'exige tout enseignement normal. On voit ainsi la partie fondamentale du calcul arithmétique se condenser en huit leçons spéciales, qui peuvent pleinement suffire à son étude systématique, sous un régime où les

professeurs doivent seulement alimenter et guider les méditations et les exercices des élèves. Une seule de ces leçons sera consacrée aux trois premières opérations de l'arithmétique, et la suivante à la division, dont la séparation est aussi motivée dogmatiquement qu'historiquement. Toute la théorie des fractions, y compris son appendice septimal, se trouvera suffisamment expliquée dans les trois leçons qui succéderont au calcul des nombres entiers. Elle sera suivie de trois autres leçons, respectivement consacrées à l'extraction des racines carrées, aux progressions arithmétiques, et finalement aux nombres figurés.

Je dois d'abord indiquer, envers le calcul élementaire, une réflexion générale sur sa relation fondamentale avec la numération. Une appréciation empirique fait maintenant regarder celle-ci comme n'ayant d'autre office que de guider et résumer les dénombrements, tandis qu'elle fut surtout instituée pour faciliter les combinaisons, dont elle a d'avance écarté la principale difficulté. Son intervention y résulte de la décomposition normale qu'elle fournit envers chacun des nombres considérés, ainsi décomposé constamment en puissances successives de la base, affectées chacune d'un coefficient inférieur à sept. Tel est le préambule fondamental d'après lequel on peut normalement réduire chaque combinaison à n'exiger d'accomplissement direct qu'envers les nombres d'un seul chiffre. Il faut toujours reconnaître que, si cette préparation ne se trouvait spontanément réalisée d'aprés la constitution numérale, son équivalent deviendrait la portion habituellement prépondérante de toute élaboration arithmétique. Cela fait assez sentir l'influence générale d'une institution sans laquelle tout calcul devrait s'opérer par un dénombrement immédiat, qui n'est jamais praticable qu'envers des nombres suffisamment petits. Elle doit donc être appréciée comme la source nécessaire de toutes les opérations

arithmétiques, dont chacune consiste à faire toujours dépendre les cas les plus compliqués des plus simples, suivant l'esprit universel des solutions mathématiques.

On peut spécialement saisir cette filiation générale envers l'addition et la soustraction, qui pourraient toujours s'accomplir en parcourant, dans l'échelle numérique, à partir du premier nombre, autant de degrés, ascendants ou descendants, que l'indique le second. Bornée à ce mode naturel, l'opération deviendrait impraticable, et d'ailleurs sujette à méprises, aussitôt que les nombres seraient un peu grands. Rien n'est plus propre à faire nettement ressortir l'aptitude générale de la constitution numérale à faciliter les combinaisons numériques. Avec son secours, on voit journellement les moindres intelligences accomplir, rapidement et correctement, ces deux premiers pas du calcul arithmétique. Sans une telle assistance, ces calculs seraient ordinairement interdits aux meilleurs esprits, alors forcés d'y procéder par un dénombrement direct.

Il faut pourtant reconnaître que ce mode, quelque pénible qu'il devînt, reste la base nécessaire de l'addition et de la soustraction après qu'elles sont systématisées. Toujours l'acte élémentaire y consiste à faire augmenter ou diminuer le premier nombre d'une seule unité, par le passage au terme suivant ou précédent de la série numérique. A cet immuable début de toute l'arithmétique, il est aisé d'apprécier la vraie distinction et l'enchaînement normal entre compter et calculer.

Nous pouvons ainsi réduire la théorie de l'addition et de la soustraction à décomposer l'opération totale en actes analogues séparément relatifs aux unités correspondantes des divers ordres. Outre que le projet d'un tel partage est naturellement suggéré par la formule numérale des données, elle peut seule conduire à le réaliser, d'après la décomposition qu'elle fournit. Voilà comment les additions ou soustractions des nombres quel-

autres domaines doivent séparément confirmer, entre la fréquence et l'intensité des changements quelconques. On doit spécialement reconnaître que rien ne peut déterminer la valeur finale d'un produit dont les facteurs varient, en sens inverse, au delà de toutes limites, si la loi de leurs variations relatives reste indéterminée. Sans aucune autre explication, l'arithmétique dissipe ou prévient un prétendu mystère algébrique qui ne dut sa célébrité qu'à l'aspect métaphysique sous lequel il fut considéré.

Ce développement du calcul fétichique conduit au calcul théocratique, essentiellement caractérisé par la division, suivie des fractions. Étudiée convenablement, cette seconde phase de l'arithmétique constitue un progrès aussi décisif chez l'individu que dans l'espèce. Rapprochée des opérations antérieures, la division offre un accroissement de difficulté plus brusque qu'en aucun autre cas mathématique. Tous les observateurs didactiques ont spécialement confirmé la judicieuse remarque de mon père spirituel, qui, sans avoir jamais enseigné, fut philosophiquement conduit à représenter ce pas comme suscitant un triage décisif entre les divers esprits. On peut assurer que quiconque a dignement subi cette épreuve est vraiment capable de bien accomplir l'initiation mathématique, et même tout le noviciat encyclopédique.

La difficulté d'une telle théorie doit surtout être attribuée à l'obligation de l'ordonner par rapport au résultat de l'opération, au lieu de n'y considérer que les données, comme dans les trois cas antérieurs. On peut ainsi sentir comment, au milieu du dix-neuvième siècle, les géomètres restaient ordinairement incapables de la bien concevoir et de l'exposer convenablement, tant l'anarchie académique les avait dégradés. Une telle étude ne fut philosophiquement considérée que dans la touchante ébauche où le précurseur immédiat du positivisme consacra ses der-

niers instants à faciliter la régénération finale de l'éducation universelle en instituant le début nécessaire de l'initiation abstraite. Il se trouva lui-même empêché, par la rapidité forcée de ce travail, d'établir la vraie théorie de la division, quoiqu'il en appréciât, mieux que personne, la nature et les conditions. Son noble exemple fut bientôt méconnu, d'après l'ascendant universel de l'empirisme scientifique, qui continua, là comme ailleurs, d'empêcher toute systématisation partielle jusqu'à l'avénement de la coordination générale.

A travers l'exposition vulgaire, l'obligation de justifier la règle effective fait confusément surgir la vraie théorie de la division, en conduisant à distinguer par le quotient les cas d'abord relatifs au diviseur. Reconnue prépondérante, cette distinction écarte l'autre, et l'institution reste uniquement subordonnée au quotient, comme elle l'aurait directement été sous l'impulsion philosophique, d'après l'ensemble des opérations antérieures. Dans une telle évaluation, le mode naturel consiste à retrancher le diviseur du dividende autant de fois de suite qu'il peut l'être. Une pareille marche ne devient impraticable que si le quotient est considérable et peut toujours s'appliquer quand il n'a qu'un chiffre. Elle reste le fondement nécessaire de l'opération générale, dont l'institution consiste à la décomposer en divisions partielles, respectivement destinées à faire successivement connaître les différents chiffres du quotient.

Rapportée à cette distinction, la théorie de la division suscite une détermination préalable, qui n'a point d'analogue dans les opérations antérieures, afin de connaître le nombre de chiffres du quotient, pour diriger sa recherche analytique. Étudié directement, ce préambule nécessaire consiste à discerner entre quelles puissances de sept le quotient se trouve compris ; ce qui peut aisément s'accomplir en comparant au dividende leur produit par le diviseur. La règle ainsi construite assigne au quo-

cédentes. Cependant l'office des formules numérales y devient moins direct, et même moins décisif, qu'en aucun cas antérieur. Elle doit donc former, dans le calcul fondamental, une phase entièrement distincte, contrastant avec celle qui résulte de l'ensemble des opérations antérieures.

D'après sa filiation directe envers l'addition, la multiplication peut être finalement regardée comme le cas le plus simple et le plus usuel d'une immense série d'institutions arithmétiques, dont la plupart sont autant oiseuses qu'inabordables. Afin de mieux saisir cette appréciation, il faut d'abord reconnaître que toute addition est aussi binaire que toute soustraction, suivant la loi fondamentale des combinaisons quelconques, objectives ou subjectives. Mais chaque somme obtenue peut ensuite devenir la source d'une addition nouvelle, dont le second élément est ordinairement indépendant du premier. Étendue autant qu'on voudra, cette succession ne comporte aucune institution spéciale, tant que les nombres graduellement ajoutés restent sans relation mutuelle. S'ils sont liés entre eux, on peut toujours se proposer d'utiliser leur loi quelconque pour évaluer la somme totale, en s'y dispensant des additions successives ; ce qui suscite autant de sommations distinctes que d'enchaînements différents.

Alors la multiplication proprement dite correspond à la série caractérisée par l'égalité de tous ses termes. Les autres lois de succession ne permettent d'instituer une sommation spéciale que quand elle devient réductible à ce cas fondamental, ce qui peut rarement s'accomplir. Tel est le vrai point de vue sous lequel il faut envisager la multiplication pour y saisir à la fois l'étendue et l'imperfection du calcul des valeurs. Elles y deviennent d'autant mieux appréciables que la même source peut aussi fournir une seconde série d'évaluations, non moins vaste et plus imparfaite que la première, en concevant une suite ré-

gulière de multiplications. Rien ne fait autant ressortir la difficulté supérieure de ce second système d'opérations arithmétiques que l'impossibilité d'évaluer un tel produit autrement qu'en exécutant les multiplications successives, même quand tous les facteurs sont égaux.

Guidée par l'appréciation précédente, la théorie de la multiplication consiste à l'ordonner relativement au multiplicateur, sans s'arrêter au multiplicande, dont la grandeur ne peut aucunement affecter l'institution du produit, uniquement subordonnée à l'autre facteur. Leur échange facultatif constitue une notion tardive, malgré son apparente évidence, et doit être finalement rattachée à la remarque générale sur l'invariabilité d'un produit quand ses facteurs varient simultanément en raison exactement inverse. Élaborée ainsi, la théorie de la multiplication devient essentiellement semblable à celle des opérations précédentes, puisque le mode naturel, par additions successives, y reste la base du calcul envers les mutiplicateurs d'un seul chiffre, auquels on ramène le cas général. Bientôt on reconnaît que tous les résultats de la répétition élémentaire peuvent être séparément retenus, de manière à dispenser de leur reproduction actuelle; ce qui constitue le complément théocratique de la multiplication fétichique. Alors la sommation d'une série dont tous les termes sont égaux se trouve finalement dépendre des quinze produits que fournissent les nombres inférieurs à sept.

Étudiée normalement, la théorie de la multiplication suscite une importante réflexion sur la relation générale entre la grandeur du produit et celle de chaque facteur. Ce qu'il y faut surtout remarquer consiste dans l'égale participation des deux facteurs, malgré leur inégalité quelconque, pourvu que leur taux de variation soit le même. La philosophie seconde commence ainsi la vérification d'une loi directement émanée de la philosophie première sur l'équivalence possible, que tous les

marche de l'esprit humain est déterminée, même envers ses moindres pas.

Dans la conception générale de la division, la notion fractionnaire se trouve nécessairement comprise, non seulement afin de compléter le quotient d'après le reste, mais surtout pour s'en former une idée également applicable à tous les cas. Elle ne surgit qu'en se représentant le quotient comme exprimant le *rapport* entre le dividende et le diviseur, quelles que soient leur composition numérique et leur grandeur relative. Bien que cette expression générale se trouve simplifiée autant que possible quand on y peut substituer un nombre entier, sa complication naturelle ne l'empêche pas de remplir son principal office dans tous les autres cas. Un esprit vraiment mathématique y voit toujours l'indication du nombre de parties du diviseur qui composent le dividende, pour caractériser une combinaison fondamentale, indépendamment de toute évaluation. Telle est la propre origine, à la fois numérique et géométrique, de la division, directement conçue sans recourir à la multiplication, qui pourrait même être dès lors instituée comme une opération inverse, si sa filiation envers l'addition n'était ordinairement préférable.

On doit ainsi rattacher à la division le premier germe distinct de l'algèbre, également liée, dès ce début, à ses deux souches nécessaires. Ravagé par l'anarchie académique, le langage mathématique a cessé d'employer la qualification de *géométrique* qu'une sagesse spontanée avait toujours attribuée au rapport par quotient, ainsi contrastant avec le rapport par différence qu'on qualifia d'*arithmétique*. Après la fusion décisive de ces deux notions, de telles expressions offraient l'avantage, autant dogmatique qu'historique, de rendre directement familière la double origine de l'algèbre, avant que son essor isolé fît également méconnaître ses deux sources. Nous devons finalement regarder

niers instants à faciliter la régénération finale de l'éducation universelle en instituant le début nécessaire de l'initiation abstraite. Il se trouva lui-même empêché, par la rapidité forcée de ce travail, d'établir la vraie théorie de la division, quoiqu'il en appréciât, mieux que personne, la nature et les conditions. Son noble exemple fut bientôt méconnu, d'après l'ascendant universel de l'empirisme scientifique, qui continua, là comme ailleurs, d'empêcher toute systématisation partielle jusqu'à l'avénement de la coordination générale.

A travers l'exposition vulgaire, l'obligation de justifier la règle effective fait confusément surgir la vraie théorie de la division, en conduisant à distinguer par le quotient les cas d'abord relatifs au diviseur. Reconnue prépondérante, cette distinction écarte l'autre, et l'institution reste uniquement subordonnée au quotient, comme elle l'aurait directement été sous l'impulsion philosophique, d'après l'ensemble des opérations antérieures. Dans une telle évaluation, le mode naturel consiste à retrancher le diviseur du dividende autant de fois de suite qu'il peut l'être. Une pareille marche ne devient impraticable que si le quotient est considérable et peut toujours s'appliquer quand il n'a qu'un chiffre. Elle reste le fondement nécessaire de l'opération générale, dont l'institution consiste à la décomposer en divisions partielles, respectivement destinées à faire successivement connaître les différents chiffres du quotient.

Rapportée à cette distinction, la théorie de la division suscite une détermination préalable, qui n'a point d'analogue dans les opérations antérieures, afin de connaître le nombre de chiffres du quotient, pour diriger sa recherche analytique. Étudié directement, ce préambule nécessaire consiste à discerner entre quelles puissances de sept le quotient se trouve compris ; ce qui peut aisément s'accomplir en comparant au dividende leur produit par le diviseur. La règle ainsi construite assigne au quo-

tient autant de chiffres que le dividende en a de plus que le diviseur, et ce nombre augmente d'une unité quand le premier chiffre du dividende surpasse celui du diviseur. A l'inspection d'une division quelconque, on peut ainsi reconnaître si le mode direct y suffit, ou quelle décomposition elle exige. Tant que le quotient n'a qu'un chiffre, il importe peu qu'on le détermine par soustraction successive ou moyennant un tâtonnement graduel. Il faut, en suivant ce dernier mode, y restreindre les essais inutiles, en assignant une limite supérieure du quotient, d'après la comparaison des premiers chiffres du diviseur et du dividende, d'où pourrait aussi surgir une limite inférieure, indiquée dans l'opuscule mentionné ci-dessus. On doit habituellement préférer les essais descendants aux ascendants, non comme moins multipliés, mais parce qu'ils s'accomplissent plus rapidement.

Toutefois, quelle que soit la coutume adoptée envers les quotients d'un seul chiffre, l'institution de la division doit surtout dispenser de suivre cette marche, par soustraction ou tâtonnement, quand le quotient devient quelconque. Ramener ce cas au précédent, telle est la difficulté principale, qui peut se réduire à déterminer les plus hautes unités de tout quotient, d'après la partie correspondante du dividende, isolément comparée au diviseur. On conçoit que, une fois trouvées, il suffira de retrancher du dividende leur produit par le diviseur pour instituer une nouvelle division où la même détermination fera connaître le second chiffre du quotient cherché, dont tous les autres seront pareillement assignables. Voilà comment le dividende se décompose, non simultanément, mais successivement, dans les divers produits qui correspondent aux différentes unités du quotient. Alors la recherche d'un quotient quelconque se résout en divisions partielles, où le diviseur est toujours le même, et dont chacune fait séparément connaître un des chiffres cherchés, en

y procédant suivant le mode adopté pour les quotients moindres que sept.

Étudiée convenablement, cette théorie fournit, au début de l'initiation abstraite, le type spécial d'un enchaînement nécessaire entre trois questions successives, qui doivent être séparément traitées en renversant l'ordre de leur génération. Mais l'examen dogmatique peut ici perfectionner l'appréciation historique, en y faisant mieux ressortir l'origine sacerdotale d'une telle institution. On doit ainsi reconnaître que ce premier essai d'analyse systématique fut nécessairement propre aux castes suprêmes qui coordonnèrent la numération. Il s'y trouva graduellement sollicité par les besoins naturels du calcul astronomique, surtout pour la détermination des révolutions sidérales d'après les révolutions synodiques envers les principales planètes. Sous cette impulsion, intimement liée au culte des astres, surgit un complément nécessaire sans lequel le calcul des valeurs n'aurait jamais pu s'incorporer à l'ensemble de la Logique.

Si j'ai particulièrement insisté sur la théorie précédente, ce n'est pas seulement en vertu de son importance propre, tant dogmatique qu'historique. A ce double motif, il faut spécialement joindre l'obligation d'instituer un type de rationnalité didactique dans le cas élémentaire où l'empirisme mathématique a le plus prévalu. Cette systématisation n'avait pu s'accomplir sous le régime qui fit surgir la division, parce qu'il détournait la caste dominante de tout enchaînement abstrait, et la dispensait de motiver ses préceptes scientifiques. Rattachée ensuite au libre essor du génie théorique, cette doctrine, transmise par une tradition presque empirique, s'y trouva plutôt considérée pour ses applications croissantes que dans sa propre constitution. Elle fut ainsi livrée à l'anarchie moderne, qui dut davantage y détourner d'une systématisation successivement ajournée jusqu'à la régénération positive de l'éducation universelle ; tant la

numérateurs. Regardées comme des nombres entiers dont les unités sont moindres, les fractions se distinguent par la diversité de cette dimunition. Mais, chacune d'elles comportant une infinité d'expressions différentes, deux quelconques peuvent toujours être ramenées au même dénominateur. On doit normalement rétablir, pour une telle préparation, la qualification d'*isomérie*, empiriquement écartée pendant l'anarchie académique.

Étudiée directement, cette transformation consiste à déterminer un multiple commun des deux dénominateurs comparés. Leur produit est ordinairement préféré parmi l'infinité de nombres capables de remplir cette condition, parce qu'il se présente plus spontanément qu'aucun autre, quoiqu'il doive souvent conduire à compliquer les expressions au delà de ce qu'exige l'isomérie. Afin de toujours obtenir le plus petit des nombres convenables, il suffit de décomposer en facteurs premiers les deux dénominateurs proposés. Nous pouvons alors former leur moindre multiple commun en y faisant concourir tous ces facteurs, pourvu que chacun y participe seulement autant de fois que dans le dénominateur qui le contient le plus. Suivant cette loi, le produit des deux dénominateurs complique trop l'isomérie, quand ils ont quelque élément commun.

Dans une telle transformation, il suffit de comparer deux fractions, soit parce qu'aucun calcul n'en saurait à la fois combiner davantage, soit d'après un motif propre à cette opération. Il est clair que, quand deux fractions sont ainsi devenues isomères, elles n'en forment plus qu'une seule pour toute extension ultérieure de la même préparation. Graduellement étendue à tant de fractions qu'on voudra, cette transformation peut toujours s'accomplir en généralisant l'un ou l'autre des deux modes propres au cas fondamental. Nous devons seulement remarquer que ces modes peuvent de plus en plus différer à

mesure que l'isomérie devient plus vaste. Elle fait ainsi croître l'importance de celui qui compense les embarras préliminaires par les simplifications définitives.

Rendues isomères, les fractions n'offrent aucune difficulté pour leur addition ou soustraction, qui s'accomplit, en ayant seulement égard aux numérateurs respectifs, dont la combinaison est ensuite affectée du dénominateur commun. Elles exigent, quant à la multiplication, une modification systématique de la notion qu'on s'en forme envers les nombres entiers. Fondée sur la répétition, la conception primitive de cette combinaison est trop étroite pour convenir aux multiplicateurs fractionnaires. On doit même sentir le besoin de la refondre à l'égard des nombres entiers, en remarquant que chacun d'eux peut aussi prendre une infinité de formes fractionnaires, souvent réalisées dans les transformations algébriques. Nous sommes donc obligés de concevoir la multiplication de manière à comporter des multiplicateurs quelconques, dont l'échange avec les multiplicandes serait d'ailleurs impossible sans cette généralisation. Directement instituée, elle consiste à prendre du multiplicande les parties marquées par le multiplicateur ; soit que ces parties équivalent à quelque nombre entier, d'où résulte une répétition, soit que leur expression doive rester fractionnaire, suivant le cas le plus fréquent. Une telle généralisation n'exige d'autre effort habituel que d'écarter, comme accessoire, l'idée d'accroissement d'abord attachée au mot *multiplier*, l'augmentation et la diminution pouvant également survenir selon les cas, sans que la combinaison change de nature.

Il serait aisé d'éviter ces difficultés en subordonnant à la division la conception primitive de la multiplication, au lieu de la tirer de l'addition. D'après la définition générale directement construite ci-dessus, le quotient de deux fractions est aussi

numérateurs. Regardées comme des nombres entiers dont les unités sont moindres, les fractions se distinguent par la diversité de cette dimunition. Mais, chacune d'elles comportant une infinité d'expressions différentes, deux quelconques peuvent toujours être ramenées au même dénominateur. On doit normalement rétablir, pour une telle préparation, la qualification d'*isomérie*, empiriquement écartée pendant l'anarchie académique.

Étudiée directement, cette transformation consiste à déterminer un multiple commun des deux dénominateurs comparés. Leur produit est ordinairement préféré parmi l'infinité de nombres capables de remplir cette condition, parce qu'il se présente plus spontanément qu'aucun autre, quoiqu'il doive souvent conduire à compliquer les expressions au delà de ce qu'exige l'isomérie. Afin de toujours obtenir le plus petit des nombres convenables, il suffit de décomposer en facteurs premiers les deux dénominateurs proposés. Nous pouvons alors former leur moindre multiple commun en y faisant concourir tous ces facteurs, pourvu que chacun y participe seulement autant de fois que dans le dénominateur qui le contient le plus. Suivant cette loi, le produit des deux dénominateurs complique trop l'isomérie, quand ils ont quelque élément commun.

Dans une telle transformation, il suffit de comparer deux fractions, soit parce qu'aucun calcul n'en saurait à la fois combiner davantage, soit d'après un motif propre à cette opération. Il est clair que, quand deux fractions sont ainsi devenues isomères, elles n'en forment plus qu'une seule pour toute extension ultérieure de la même préparation. Graduellement étendue à tant de fractions qu'on voudra, cette transformation peut toujours s'accomplir en généralisant l'un ou l'autre des deux modes propres au cas fondamental. Nous devons seulement remarquer que ces modes peuvent de plus en plus différer à

mesure que l'isomérie devient plus vaste. Elle fait ainsi croître l'importance de celui qui compense les embarras préliminaires par les simplifications définitives.

Rendues isomères, les fractions n'offrent aucune difficulté pour leur addition ou soustraction, qui s'accomplit, en ayant seulement égard aux numérateurs respectifs, dont la combinaison est ensuite affectée du dénominateur commun. Elles exigent, quant à la multiplication, une modification systématique de la notion qu'on s'en forme envers les nombres entiers. Fondée sur la répétition, la conception primitive de cette combinaison est trop étroite pour convenir aux multiplicateurs fractionnaires. On doit même sentir le besoin de la refondre à l'égard des nombres entiers, en remarquant que chacun d'eux peut aussi prendre une infinité de formes fractionnaires, souvent réalisées dans les transformations algébriques. Nous sommes donc obligés de concevoir la multiplication de manière à comporter des multiplicateurs quelconques, dont l'échange avec les multiplicandes serait d'ailleurs impossible sans cette généralisation. Directement instituée, elle consiste à prendre du multiplicande les parties marquées par le multiplicateur ; soit que ces parties équivalent à quelque nombre entier, d'où résulte une répétition, soit que leur expression doive rester fractionnaire, suivant le cas le plus fréquent. Une telle généralisation n'exige d'autre effort habituel que d'écarter, comme accessoire, l'idée d'accroissement d'abord attachée au mot *multiplier*, l'augmentation et la diminution pouvant également survenir selon les cas, sans que la combinaison change de nature.

Il serait aisé d'éviter ces difficultés en subordonnant à la division la conception primitive de la multiplication, au lieu de la tirer de l'addition. D'après la définition générale directement construite ci-dessus, le quotient de deux fractions est aussi

normal que celui de deux entiers, sauf les embarras d'évaluation. Etudiée comme l'inverse de la division, la multiplication pourrait donc être immédiatement conçue envers un cas quelconque. Alors destinée à déterminer le nombre dont le rapport avec l'un des facteurs est égal à l'autre, elle serait directement réductible à sa définition générale. Son cas le plus simple deviendrait ainsi le fondement nécessaire de l'évaluation de tous les produits, et devrait encore être spécialement institué d'après l'addition.

Cette indication suffit pour faire généralement sentir que les principales difficultés ordinairement attachées à l'étude de l'arithmétique sont plus philosophiques que scientifiques. Appréciées convenablement, elles résultent surtout d'une insuffisante comparaison du calcul des valeurs au calcul des relations. Nous devons toujours établir, entre ces deux points de vue, une harmonie qui, sans les confondre, les fasse normalement concourir à l'élaboration mathématique. Tous les nuages habituellement propres à la théorie des fractions n'y résultent que d'une disposition empirique à se préoccuper des évaluations avant que les combinaisons soient assez instituées. Il faut finalement reconnaître que l'harmonie normale de ces deux considérations est nécessairement liée à l'accord fondamental entre l'abstrait et le concret, pour lequel la philosophie mathématique se trouve directement subordonnée à la systématisation universelle.

On ne peut, quant à la division, rencontrer, dans les fractions, d'autre difficulté que celle de l'évaluation du quotient, dont la notion se forme de la même manière qu'envers les nombres entiers. Mais cet embarras devient alors semblable à celui que présente l'addition ou la soustraction ; il se trouve spontanément dissipé si les fractions sont isomères. Nous n'avons donc qu'à les rendre telles, suivant l'un quelconque des modes établis, et leur quotient sera le même que celui des numérateurs.

Il en résulte une règle ordinairement formulée en ramenant la division par une fraction à la multiplication par la fraction inverse ; ce qui d'ailleurs peut être directement aperçu, d'après la comparaison immédiate des deux définitions générales. A son tour, la multiplication deviendrait ainsi réductible à la division, de manière à ne plus exiger un précepte distinct pour l'évaluation du produit par une fraction, dès lors équivalent au quotient par la fraction inverse.

Généralisées convenablement, les notions et les règles fractionnaires ne sauraient offrir aucun embarras envers les dénominateurs qui sont des puissances exactes de la base numérale. Un tel cas n'a jamais suscité que les difficultés empiriquement résultées d'un vicieux rapprochement avec les nombres entiers, d'après une irrationnelle exagération des simplifications qu'il comporte. Son examen spécial doit toujours se réduire à l'appréciation directe de ces abréviations, en évitant tout retour inutile ou déplacé vers l'étude générale des fractions, à laquelle il faut normalement subordonner le calcul septimal. Toutes les modifications qu'il comporte sont directement relatives aux quatre combinaisons, sans pouvoir aucunement concerner ni la simplification ni l'isomérie. On doit regarder les fractions septimales comme naturellement irréductibles ; leurs dénominateurs ne différant que par l'exposant de la base, ils peuvent être aisément identifiés.

Rendues isomères, ces fractions sont immédiatement susceptibles d'addition, de soustraction, et même de division, sans que ces combinaisons y présentent d'autre spécialité que l'accomplissement spontané de la préparation fondamentale. A l'égard de leur multiplication, il suffit d'y suivre la règle générale ; sa simplification consiste alors à multiplier les dénominateurs en ajoutant les exposants respectifs de la base numérale. Vues pratiquement, ces abréviations peuvent se

normal que celui de deux entiers, sauf les embarras d'évaluation. Etudiée comme l'inverse de la division, la multiplication pourrait donc être immédiatement conçue envers un cas quelconque. Alors destinée à déterminer le nombre dont le rapport avec l'un des facteurs est égal à l'autre, elle serait directement réductible à sa définition générale. Son cas le plus simple deviendrait ainsi le fondement nécessaire de l'évaluation de tous les produits, et devrait encore être spécialement institué d'après l'addition.

Cette indication suffit pour faire généralement sentir que les principales difficultés ordinairement attachées à l'étude de l'arithmétique sont plus philosophiques que scientifiques. Appréciées convenablement, elles résultent surtout d'une insuffisante comparaison du calcul des valeurs au calcul des relations. Nous devons toujours établir, entre ces deux points de vue, une harmonie qui, sans les confondre, les fasse normalement concourir à l'élaboration mathématique. Tous les nuages habituellement propres à la théorie des fractions n'y résultent que d'une disposition empirique à se préoccuper des évaluations avant que les combinaisons soient assez instituées. Il faut finalement reconnaître que l'harmonie normale de ces deux considérations est nécessairement liée à l'accord fondamental entre l'abstrait et le concret, pour lequel la philosophie mathématique se trouve directement subordonnée à la systématisation universelle.

On ne peut, quant à la division, rencontrer
tions, d'autre difficulté que celle de
dont la notion se forme de la
nombres entiers. Mais cet
celui que présente
spontanément
donc qu'à les
établis, et leur

Il en résulte une règle ordinairement formulée en ramenant la division par une fraction à la multiplication par la fraction inverse ; ce qui d'ailleurs peut être directement aperçu, d'après la comparaison immédiate des deux définitions générales. A son tour, la multiplication deviendrait ainsi réductible à la division, de manière à ne plus exiger un précepte distinct pour l'évaluation du produit par une fraction, dès lors équivalent au quotient par la fraction inverse.

Généralisées convenablement, les notions et les règles fractionnaires ne sauraient offrir aucun embarras envers les dénominateurs qui sont des puissances exactes de la base numérique. Un tel cas n'a jamais suscité que les difficultés empiriquement résultées d'un vicieux rapprochement avec les nom[illegible] entiers, d'après une irrationnelle exagération des simpli[illegible] tions qu'il comporte. Son examen spécial doit [illegible] duire à l'appréciation directe de ces abréviations, [illegible] tout retour inutile ou déplacé vers l'étude générale [illegible] tions, à laquelle il faut normalement subordonner [illegible] mi- septimal. Toutes les modifications qu'il comporte [illegible] male ment relatives aux quatre combinaisons, [illegible] par- nent concerner ni la simplification ni l'[illegible] rs équi- ler les fractions septimales comme [illegible] iffres, tous leurs dénominateurs ne différant que par [illegible] ont, le numé- [illegible] aisément identifiés [illegible] chiffres que des [illegible] es, [illegible] respondante d[illegible] Un tel type [illegible] série [illegible] ur [illegible]

jours indiquer la valeur totale d'une périodicité quelconque.

Tel est l'ensemble des trois leçons propres à la théorie fractionnaire dans le début normal de l'instruction encyclopédique. Outre le calcul fondamental des nombres quelconques, la partie de l'arithmétique qui doit être traitée avant l'algèbre peut utilement ébaucher deux doctrines complémentaires, l'une envers les racines, l'autre quant aux progressions. Dans le cas des racines carrées, l'extraction générale se modifie assez pour qu'il convienne de le considérer d'une manière spéciale et directe, comme le permet la simplicité de la loi relative à la seconde puissance d'un binome. A l'égard des autres racines, même cubiques, l'opération, devenue plus uniforme et plus pénible, ne doit être instituée qu'après l'exposition normale des notions algébriques qu'elle exige. Seule comprise dans le domaine fondamental de l'arithmétique, l'extraction des racines carrées manifeste mieux l'efficacité pratique et théorique qu'elle comporte.

On doit regarder cette opération comme essentiellement analogue à la division par sa nature et sa marche, mais plus compliquée ; le diviseur et le quotient, devenus égaux, y sont simultanément inconnus. Mieux appréciable, le nombre de leurs chiffres est toujours la moitié, précise ou par excès, de celui du carré, dont la décomposition en facteurs égaux doit être ramenée au cas où la racine s'obtient immédiatement parce qu'elle est moindre que sept. Il suffit d'instituer cette réduction envers les racines des deux chiffres, d'où toutes les autres pourront graduellement résulter, en les concevant seulement composées de septaines en nombre suffisant et de simples unités. Nous pouvons d'abord trouver le premier chiffre en écartant les deux derniers du carré, dès lors formé du carré des septaines cherchées plus une retenue qui ne saurait affecter l'extraction. A l'égard du second chiffre, la détermination devient un tatonne-

ment un peu gênant, qui comporte deux abréviations, l'une en essayant à partir d'une limite souvent moindre que six, l'autre en opérant l'épreuve sans y reproduire la partie du carré déjà connue.

Historiquement envisagée, l'extraction des racines carrées fournit le premier exemple du calcul approximatif; la transformation des fractions lui fut postérieure, quoiqu'elle doive dogmatiquement la précéder. On doit regarder la plupart des nombres comme n'étant pas des carrés parfaits, puisque ceux-ci diffèrent de plus en plus ; le produit d'une fraction par elle-même ne saurait d'ailleurs être jamais entier. Nous ne pouvons dès lors espérer que la série septimale, dont le prolongement indéfini doit représenter la racine, devienne aucunement périodique. Toutefois, sans que sa loi soit connue, elle peut assez remplir la condition pratique des approximations quelconques, si nous sommes maîtres d'y graduer l'erreur. Elle y devient indéfiniment atténuable en multipliant par le carré d'une puissance suffisante de sept; ce qui constitue le type spontané des procédés quelconques où, l'erreur étant naturellement fixe, on la diminue artificiellement en augmentant, au taux voulu, la grandeur à mesurer.

Une série dont les termes sont équidistants peut être aisément ramenée au cas d'égalité, puisqu'il y suffit d'accoupler ceux qui tiennent le même rang à partir de chaque extrémité. Nous devons ainsi regarder la somme des termes de toute progression arithmétique comme la moitié du produit de leur nombre par la somme des deux extrêmes. Il est d'ailleurs facile d'y résoudre la question préliminaire sur la formation d'un terme quelconque d'après les deux premiers ; ce qui suffit pour instituer, suivant la loi de sommation, toutes les recherches inverses. Relativement à d'autres progressions, cette théorie devient ordinairement inaccessible, même quand leur constitution semble

la plus simple, comme celle où chaque terme équivaut à la somme des deux précédents, le problème préalable étant alors insoluble. Étendue convenablement, une telle appréciation peut spécialement seconder la discipline théorique, en prouvant, au début de l'initiation abstraite, que les moindres domaines nous sont radicalement interdits aussitôt que nous y voulons dépasser les premiers cas.

Mais, d'une autre part, il convient aussi de saisir cette occasion pour encourager un sage essor de l'esprit mathématique en rattachant aux progressions arithmétiques quelques autres sommations d'abord directes, puis indirectes. On définit les premières en formant les sommes successives d'une suite de termes équidistants, ordinairement indiqués par la série naturelle des nombres ; ce qui produit ceux qu'on nomme *triangulaires*, d'après l'image qu'ils comportent. Leur addition graduelle suscite une nouvelle progression, où les termes sont qualifiés de *pyramidaux*, en vertu d'un motif analogue, qui toutefois ne saurait s'étendre au delà, quoiqu'on appelle *figurés* les nombres ultérieurement composés de cette manière. Il est directement possible de saisir la loi commune à toutes ces sommations, dont chacune fournit le terme général de la progression suivante. Elles se succèdent de la même manière que les différents cas du problème des répartitions, d'abord quant à la subordination élémentaire envers l'ensemble des mondes antérieurs, ensuite pour son résumé binome. Reconnues équivalentes, ces deux questions doivent donc comporter la même solution, qui, formulée ci-dessus à l'égard des répartitions, devient également applicable aux nombres figurés. Après avoir établi cette loi générale, on peut la vérifier spécialement envers les nombres triangulaires, dont la composition résulte de la sommation des progressions arithmétiques.

Bien appréciées, la sommation des nombres figurés conduit à

celle des puissances correspondantes, puisque chacune d'elles équivaut à la somme de certains d'entre eux ou de leurs multiples fixes. On peut regarder, par exemple, tout carré comme la somme de deux nombres triangulaires consécutifs : l'image et la formule concourent à l'indiquer. Relativement aux cubes, il faudrait combiner trois nombres pyramidaux, et la composition croîtrait comme l'exposant envers les autres nombres figurés. D'après la solution directe que doit ultérieurement recevoir la question relative aux puissances, la sommation des nombres figurés pourra réciproquement obtenir une nouvelle institution. Successivement appréciées, les formules générales des nombres triangulaires, pyramidaux, etc., se composent directement des puissances correspondantes et de toutes les précédentes, dont la sommation suffit pour conduire à la leur.

Le début purement arithmétique de l'éducation encyclopédique peut ainsi fournir deux types décisifs, distincts quoique connexes, de l'efficacité spéciale de l'induction dans une étude que l'on croit exclusivement déductive. Il importe de saisir cette double occasion pour faire convenablement apprécier la supériorité de l'induction systématique sur l'induction empirique. Bien qu'on ignorât la loi des répartitions autant que celle des nombres figurés, on pourrait légitimement induire leur identité nécessaire du simple rapprochement entre les constitutions élémentaires des deux cas d'après leur nature respective. Rattachée au même résumé par sa décomposition directe, la formule des combinaisons devient ainsi la source de deux solutions qui sembleraient entièrement indépendantes d'un tel problème si l'induction n'avait convenablement lié les trois recherches. Elles peuvent ensuite coïncider déductivement d'après la loi binomiale, sans que cette confirmation soit aucunement indispensable pour autoriser l'usage de la découverte inductive.

Étudié convenablement, le domaine initial de l'esprit mathé-

matique exercera sur toute l'éducation encyclopédique une réaction spécialement indiquée dans la leçon consacrée à le résumer. Un tel début suffit pour faire simultanément sentir les avantages et les inconvénients de l'élaboration théorique. Bien dirigée, elle y fournit, outre des notions directement praticables, des manifestations décisives de son efficacité mentale, et même de son influence morale. On y voit la Logique, immédiatement investie de son principal office par la philosophie première, instituer un type de clarté, de précision, et de consistance, déjà propre à guider les efforts rationnels dans les cas plus compliqués. L'importance pratique et la réaction théorique de ce domaine font directement sentir la dignité normale des spéculations positives, même bornées aux plus grossiers phénomènes. Il peut aussi caractériser leur aptitude morale, en faisant déjà ressortir l'existence spéciale des lois immuables qui peuvent seules mettre un terme à nos divagations quelconques. A la fois objectives et subjectives, elles y commencent à discipliner le plus perturbateur des trois éléments humains, en systématisant sa digne soumission à l'ordre extérieur dont il doit aspirer à devenir le fidèle résumé.

Sous l'impulsion sacerdotale, les jeunes disciples de l'Humanité doivent ainsi sentir que, malgré leur valeur propre, les études abstraites ne comportent qu'une rationnalité provisoire, jusqu'à ce qu'elles soient convenablement incorporées à la science finale. Elles ne peuvent jamais manifester les acquisitions scientifiques sans y faire spécialement reconnaître l'être permanent et collectif qui les prépare, les institue, et les accomplit. Par une telle appréciation, les novices se trouvent habituellement disposés à respecter la discipline religieuse que le sacerdoce doit toujours appliquer à l'enseignement théorique. Toutes les épreuves spontanément résultées des deux premiers mois de l'essor abstrait leur font personnellement sentir sa ten-

dance à développer une sécheresse uniquement due à la concentration prolongée qu'exige la faiblesse de notre intelligence, même envers les moindres cas. Ils doivent ainsi reconnaître l'importance de la culture morale qui les préserve ou les relève de cette dégradation, en même temps qu'elle surmonte la vanité théorique dont le sacerdoce leur fait autant apercevoir l'irrationalité que l'indignité. Mieux appréciables quand le moindre ascendant de l'objet et la moindre contention du sujet permettent un meilleur examen, ces réflexions générales doivent spécialement surgir à la fin de ce premier cours. Après une telle préparation, le cœur et l'esprit peuvent directement aborder le domaine propre du matérialisme mathématique, sans y redouter des atteintes irréparables.

CHAPITRE DEUXIÈME.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

Appréciation générale.

Attentivement considéré par un esprit philosophique, l'ensemble de l'algèbre se montre essentiellement composé de notions purement hypothétiques, qui ne peuvent jamais offrir une réalité directe. Mais il faut excepter d'une telle appréciation les transformations proprement dites, qui, spéciales ou générales, contiennent, par leur nature, de véritables lois, toujours numériques, et quelquefois géométriques, d'ailleurs oiseuses le plus souvent. On peut, à cet égard, indiquer comme type le théorème où, dès son début, l'algèbre fait directement reconnaître que la différence des mêmes puissances de deux nombres quelconques est un multiple de la leur.

Dans ces transformations, dont la loi du binome et la série logarithmique présentent des exemples plus étendus, le calcul algébrique devient un simple auxiliaire du calcul arithmétique, en instituant des rapprochements propres à faciliter les évaluations On doit les regarder comme des incidents et des accessoires, où l'algèbre suspend son élaboration fondamentale des relations pour s'occuper secondairement de la comparaïson des valeurs. Tout le reste de son domaine, élémentaire ou trans-

cendant, consiste en doctrines immédiatement dépourvues de réalité propre, et dont la plupart n'en pourront jamais acquérir indirectement. Elles se bornent à manifester les conséquences qui résulteront des relations qu'elles supposent entre des grandeurs arbitraires, sans examiner si ces hypothèses sont même réalisables. Résoudre des équations quelconques, c'est-à-dire y rendre explicite la subordination implicite qu'elles instituent entre les inconnues et les données, tel devient le but propre et continu de l'algèbre, quand elle s'isole de l'arithmétique et de la géométrie.

On peut regarder ce caractère, déjà sensible au moyen âge, comme la base de l'appréciation qui la fit alors qualifier de *logistique*. Une philosophie essentiellement métaphysique dut ainsi consacrer un calcul qui semblait instituer la logique universelle, élaborant d'avance des moyens de raisonnement envers toutes les hypothèses successives qu'on pouvait abstraitement imaginer. Il faut reconnaître que cette attitude se trouve plus développée que rectifiée dans l'essor que la géométrie et la mécanique procurèrent à l'algèbre jusqu'à l'avénement du positivisme, seul capable de discipliner l'esprit mathématique.

Pour que la nature et l'importance de cette discipline soient assez appréciées, il convient d'abord d'examiner les motifs légitimes dont l'irrationnelle exagération suscita les usurpations algébriques, tant que l'absence de conceptions encyclopédiques entretint l'anarchie théorique. A quelque subordination que l'algèbre soit normalement ramenée envers la géométrie et l'arithmétique, sa culture propre et directe devra toujours recevoir un développement préliminaire sans lequel l'ensemble de l'instruction mathématique ne pourrait être systématisé. Dans les études géométriques ou mécaniques, les incidents algébriques peuvent souvent acquérir assez d'importance et de difficulté pour exiger, pendant quelque temps, une attention exclusive.

Rattachée à ces deux motifs, l'appréciation philosophique des prétentions de l'algèbre à la présidence encyclopédique doit toujours rester indispensable à l'institution normale de l'essor mathématique. On peut ainsi reconnaître que, sans un tel examen, des impulsions permanentes disposeraient l'esprit théorique à reproduire les aberrations passagères qui résultèrent de l'anarchie scientifique. Nous devons placer cette appréciation avant le début spécial des études purement algébriques, afin que les deux mois qu'elles absorberont ne fassent pas contracter des habitudes vicieuses, ultérieurement difficiles à rectifier. Elle doit pourtant être toujours regardée comme directement applicable à l'ensemble du calcul des relations, sans s'y borner au préambule isolé, moins exposé, par sa nature, à de tels abus que le domaine lié normalement à la géométrie.

Tous ces motifs exigent que, pour prévenir une grave équivoque, trop naturelle aujourd'hui, j'écarte ici, d'après un jugement direct et spécial, l'irrationnelle dénomination qu'un orgueil stupide fit universellement prévaloir pendant l'anarchie académique, surtout au dix-neuvième siècle. Rapportée à son étymologie arabe, la qualification d'*algèbre* peut normalement convenir à l'ensemble du calcul des relations, tant transcendant qu'élémentaire. Nos habitudes historiques y doivent toujours rattacher l'indication du premier essor vraiment décisif de ce calcul, et le souvenir spécial d'un contact qui fut longtemps indispensable à la préparation moderne. Elle est, dogmatiquement, propre à caractériser la destination, essentiellement constructive, d'un tel calcul, rappelée même dans l'acception, grossière mais judicieuse, vers laquelle l'instinct populaire a détourné cette expression scientifique.

Élargie par la géométrie cartésienne, l'algèbre conserva son nom jusqu'à la fin du dix-septième siècle, malgré l'essor du calcul transcendant. Ce fut seulement vers le milieu du siècle suivant

que le développement de la mécanique céleste poussa l'orgueil mathématique à qualifier d'*analyse*, d'abord la partie supérieure du calcul des relations, ensuite son ensemble confusément circonscrit. On doit regarder cet abus comme l'un des résultats les plus caractéristiques de l'anarchie que l'empirisme scientifique suscita dans le langage théorique.

Rapproché de l'acception universelle, seule conforme à l'étymologie, l'usage mathématique du nom *analyse* constitue une irrationalité directe et radicale. Elle ne s'explique que d'après le besoin puéril qu'éprouvèrent les géomètres préoccupés du calcul transcendant, d'éviter que le public les confondît avec ceux qui restèrent surtout adonnés au calcul élémentaire. Faute de discipline philosophique, un terme précieux se trouva longtemps altéré par sa vicieuse consécration à des méthodes plus destinées, et même plus appliquées, à composer qu'à décomposer. Une disposition analogue poussa les métaphyciens, surtout français, à qualifier d'*analyse* un examen quelconque, afin de ressembler aux géomètres ; en sorte que cette expression fut partout dénaturée. Son usage n'est resté pur que parmi les chimistes, où le positivisme l'a reprise pour en systématiser l'emploi théorique, conformément à l'étymologie du nom, ainsi qu'aux habitudes antérieures à l'anarchie moderne.

Bien appréciées, les prétentions de l'algèbre à la présidence encyclopédique constituent la source inaperçue du matérialisme spéculatif. Il ne surgit point en arithmétique, malgré l'universalité directe des notions numériques, parce que chacun sent que, quoique partout applicables, elles restent partout subordonnées aux attributs correspondants. Elles n'aspirent à dominer que quand l'algèbre, en les rendant indéterminées, leur ôte le seul caractère qui leur procurât une positivité subalterne mais directe. Nous voyons ainsi commencer en algèbre la disposition à traiter les spéculations supérieures comme de

simples conséquences des inférieures, en abusant de la subordination déductive et méconnaissant l'indépendance inductive, faute de lien subjectif. Sous cet aspect, les géomètres les plus rétrogrades devinrent souvent, d'après leurs propres travaux, les promoteurs spéciaux du matérialisme général dont ils déploraient aveuglément l'influence anarchique.

On doit regarder les usurpations algébriques comme ne pouvant être surmontées, ni même appréciées, que par le positivisme, seul capable de juger et de rectifier l'ensemble du savoir humain. Rattachées à la lutte nécessaire de la science contre la théologie, elles n'excitèrent l'inquiétude des philosophes métaphysiciens que quand leur développement menaça d'envahir les plus nobles études, dans la seconde moitié du dix-huitième siècle. Alors un éminent penseur germanique tenta d'empêcher ou de réparer cette dégradation en séparant le domaine systématique de la quantité de celui de la qualité. Graduellement développée malgré la décision métaphysique, l'invasion algébrique manifesta l'impuissance d'une distinction dont les géomètres sentaient l'irrationalité sans qu'ils pussent la démontrer. Elle résulte d'une vicieuse appréciation des recherches spéculatives, par suite d'une insurmontable persistance de l'esprit absolu chez le penseur qui s'est le plus approché du régime relatif avant que les conceptions humaines fussent vraiment systématisables.

Normalement appréciées, toutes les spéculations réelles peuvent être directement conçues comme toujours réductibles à des notions de quantité, d'après la troisième loi de la philosophie première. A ce jugement général, l'essor spécial de l'esprit scientifique vient spontanément apporter une confirmation décisive, en manifestant une tendance continue vers cette réduction, qui n'a jamais cessé de se développer depuis le début des études abstraites. Il suffit de citer la transformation géné-

rale des recherches géométriques en questions numériques, irrévocablement accomplie dans l'institution cartésienne de la philosophie mathématique. Vainement les métaphysiciens prétendraient-ils borner cette métamorphose aux idées de forme et de situation, qui semblent directement irréductibles aux nombres, autant que toutes les autres. Étendue aux questions de mouvement et d'équilibre, la transformation algébrique a spontanément surmonté cette restriction arbitraire et frivole, où l'on méconnaît que l'immuabilité de l'ordre universel borne ses modifications à ne pouvoir affecter que le degré, même idéalement.

Historiquement envisagées, les prétentions directes de l'algèbre à la présidence encyclopédique précédèrent l'essor résulté de la constitution cartésienne de la géométrie. Une confusion spontanée entre l'élaboration des conséquences et l'établissement des principes suscita ces aspirations aussitôt que le calcul algébrique se détacha de ses deux souches, arithmétique et géométrique, surtout en substituant les équations aux proportions. Mais le régime ontologique aggrava ces aberrations en leur procurant une consécration systématique, d'après son principal caractère, consistant à cultiver la méthode isolément de toute doctrine. On peut ainsi qualifier de métaphysique le mode direct du matérialisme mathématique ; il est à la fois le plus ancien et le plus répandu, sans être le plus dangereux, puisque les mots y sont souvent pris pour des choses. Rattachée à la géométrie par la rénovation cartésienne, l'algèbre fit bientôt surgir un mode plus spécieux, quoique indirect, en fondant sa présidence encyclopédique sur l'universalité nécessaire des lois de l'étendue et du mouvement. Elle a dès lors lié le matérialisme mathématique à celui que développent les diverses parties de la philosophie naturelle, dont chacune tend à dominer les suivantes, d'après une vicieuse appréciation de la su-

bordination normale des phénomènes correspondants. Sous cette impulsion, propre à l'essor empirique des spéculations positives, les deux modes successifs de l'usurpation algébrique se sont finalement combinés, quand l'algèbre a tenté d'absorber la géométrie et la mécanique, dont les autres théoriciens n'osaient contester la suprématie.

Étendu partout, et même systématisé, d'après sa double source mathématique, le matérialisme théorique resta directement insurmontable jusqu'à l'avénement de la religion de l'Humanité. Maudit pour ses conséquences, intellectuelles et surtout morales, par un public et des philosophes également incapables de résoudre ses sophismes, sa domination spéculative ne se trouva vraiment déracinée que d'après le positivisme. On put bientôt apprécier cette lutte intime entre l'empirisme scientifique et la philosophie surgie de la science, en considérant l'aversion, ouverte ou latente, des divers savants, surtout groupés, pour le fondateur de la sociologie et de la hiérarchie encyclopédique. Toutefois, quand le positivisme fut devenu complet, en prenant, sous l'impulsion du cœur, une attitude directement religieuse, le matérialisme académique, sentant la fin de l'interrègne spirituel, ne sut que protester contre une synthèse, morale, théorique, et pratique, qu'il était incapable d'empêcher. Attaqué dans sa source par la seule doctrine apte à le juger, il renonça tacitement à dominer, et se contenta d'entraver la réorganisation universelle en secondant l'opposition qu'elle devait trouver chez les révolutionnaires et les rétrogrades.

Un examen décisif du matérialisme mathémaqtiue doit normalement séparer ses deux modes, abstrait, et concret, l'un essentiellement métaphysique, l'autre paraissant positif. Mais le premier peut seul être directement jugé dans ce chapitre, en réservant l'appréciation du second au chapitre où j'instituerai

la combinaison finale entre l'algèbre et la géométrie. Afin que le matérialisme abstrait soit mieux caractérisé, je dois d'abord signaler les fondements légitimes d'après lesquels ses sophismes, souvent inaperçus, ont semblé justifier ses prétentions universelles. Nous avons déjà reconnu qu'il a pleinement surmonté, quoique d'une manière purement empirique, la vaine barrière résultée d'une séparation métaphysique entre les qualités et les quantités. Il faut également admettre son principe fondamental sur l'assujettissement nécessaire des phénomènes quelconques à des lois finalement numériques.

Rapportée à la philosophie première, cette conception n'a pas besoin d'être érigée, par le positivisme, en aphorisme distinct, puisqu'elle y constitue seulement la définition la plus précise de l'ordre universel. Après avoir reconnu, d'après le premier groupe de lois, autant objectives que subjectives, que toutes les modifications, naturelles, artificielles, et même idéales, se bornent au degré, ces variations se présentent comme numériquement réglées. Ce complément nécessaire du dogme de l'immuabilité peut seul lui procurer une consistance vraiment systématique, sans laquelle la foi démontrable serait insuffisante pour aider l'amour universel à diriger l'activité pacifique. Égarée par un sentiment trop vague de l'ordre réel, l'âme comporterait, dans sa maturité positive, des fluctuations et déviations équivalentes à celles de l'âge théologico-métaphysique. Sous cet aspect, la religion de l'Humanité doit systématiquement consacrer et développer les dispositions empiriquement résultées de l'éducation mathématique.

Considérés comme susceptibles d'équations, les phénomènes de toute espèce ne sauraient pourtant être jamais absorbés dans le domaine algébrique. A cet égard, le sophisme des géomètres consiste à méconnaître ou négliger l'élaboration nécessaire pour instituer ces lois mathématiques, dont la réalité peut

seule garantir celle des calculs quelconques qui reposeraient sur elles. La culture isolée de l'algèbre suscite, entre la méthode et la doctrine, une séparation aussi vicieuse que celle qui fut consacrée par le régime métaphysique. Mal préservée de l'absolu, faute de discipline systématique, la science qui fit spontanément surgir le relativisme s'est abstraitement proposé de résoudre d'avance toutes les équations imaginables, afin que celles des divers phénomènes s'y trouvent nécessairement traitées. Elle a radicalement méconnu l'extrême disproportion de nos forces intellectuelles avec le spectacle extérieur, dont les scènes sont rarement susceptibles d'être exactement reproduites dans nos théories.

On ne peut réellement expliquer de telles utopies que d'après la surexcitation continue de l'orgueil et de la vanité par l'anarchie occidentale. Tous les essais tentés depuis la fin du moyen âge n'ont jamais conduit l'algèbre directe au delà de la résolution normale des quatre moindre classes d'équations, obtenue dès le milieu de la révolution moderne, sans que les efforts ultérieurs aient rien produit. Il semblait que l'essor du calcul transcendant pourrait essentiellement compenser l'insuffisance du calcul élémentaire. Une expérience pleinement décisive a déjà prouvé que l'institution des équations indirectes ouvre à l'esprit algébrique un champ plus vaste et plus général, mais dont la culture plus difficile manifeste plus rapidement la discordance nécessaire entre nos questions et nos réponses. Même en vouant beaucoup d'existences à la seule spéculation, les succès abstraits resteraient de plus en plus au dessous d'un domaine dont l'exploitation développe davantage les difficultés que les produits.

Une telle appréciation, devenue graduellement irrécusable chez tous les bons esprits, assure l'ascendant normal de la discipline positive sur les dispositions spontanées au matérialisme

mathématique. Notre maturité ne saurait systématiquement prolonger le régime empirique où notre adolescence, pour développer ses forces théoriques, s'exerçait indifféremment sur toutes les questions qu'elle pouvait utilement aborder, sans considérer leur destination propre. Il est maintenant reconnu qu'une telle marche, outre ses vices directs, suscite plus de problèmes qu'elle n'en peut jamais résoudre, et parmi lesquels il faut irrévocablement choisir, suivant leurs relations respectives avec l'ensemble des besoins humains. Elles sont devenues systématiquement appréciables d'après la même doctrine qui fait directement prévaloir, au nom de la raison et de la morale, l'obligation de régler les forces humaines, d'abord théoriques, puis pratiques. Soumis à cette nécessité, que l'opinion publique rendra bientôt irrécusable, l'esprit mathématique doit promptement reconnaître son incompétence pour instituer la discipline dont il a besoin, puisqu'elle ne peut émaner que d'une synthèse pleinement universelle.

Voilà comment tous les vrais géomètres seront graduellement amenés, malgré leurs préjugés, à respecter la réorganisation encyclopédique de l'éducation occidentale, pendant la transition finale qui maintiendra leur classe en la restreignant avant de l'éteindre en la transformant. On peut assurer que le sacerdoce de l'Humanité ne trouvera d'actives résistances que chez les médiocrités intrigantes et jalouses auxquelles l'anarchie moderne a seule procuré des succès théoriques, malgré leur impuissance radicale à s'agréger aux véritables penseurs. Il faut cependant reconnaître que l'état normal devra toujours exiger une sollicitude essentiellement analogue à celle que la religion positive doit maintenant développer avant la transition finale. La diversité des deux cas ne peut concerner que le degré d'un tel besoin ; car, malgré la suppression nécessaire des théoriciens spéciaux, les études scientifiques, et surtout mathématiques,

pourront susciter, parmi les élèves, et même chez quelques maîtres des tendances académiques. Étendu convenablement, suivant l'esprit que je viens d'indiquer, l'examen direct du matérialisme abstrait doit donc être toujours antérieur au début normal de l'instruction algébrique.

En ayant reconnu que l'institution abstraite du calcul et sa culture isolée sont finalement devenues autant irrationnelles qu'immorales, on a fait le pas le plus décisif pour se dégager du matérialisme mathématique. Mieux appréciée, l'élaboration générale des équations est ainsi subordonnée à leur établissement spécial, qui peut seul indiquer celles dont l'algèbre doit s'occuper. Pour une science quelconque, la culture directe sert toujours de base au développement algébrique, même envers la géométrie et la mécanique. La prétention du calcul à poser les fondements des diverses études positives, se trouve radicalement écartée et l'époque de son intervention reste indécise. On subordonne la considération de l'instrument à celle de son usage, toujours réglé d'après les conditions propres à chaque cas. Il faut, historiquement, regarder une telle disposition comme le premier indice théorique de l'avénement direct du régime final, qui doit systématiquement discipliner les forces empiriquement développées dans l'existence préliminaire. Sous l'universelle présidence de la religion positive, chaque science se trouve réduite à la culture qu'exige sa destination encyclopédique, exactement appréciée d'après la synthèse subjective qui coordonne toutes les études réelles.

Nous devons maintenant compléter l'examen de l'utopie algébrique en considérant l'extension nécessaire de l'élaboration spéciale dont la priorité n'est plus contestable. On peut aisément reconnaître que ce préambule devient plus long et plus difficile à mesure que les phénomènes sont plus compliqués. Voilà pourquoi toutes les sciences, sauf la géométrie et la mé-

canique, d'où résulte l'astronomie, doivent indéfiniment rester dans l'état préliminaire qui, pour celles-là, prépara l'application du calcul. Il faut regarder comme entièrement chimérique l'espoir de jamais instituer de véritables équations envers d'autres domaines que celui de l'étendue et du mouvement. Appréciée dans son ensemble, l'évolution mathématique représente l'extension du calcul comme toujours bornée à développer sa sphère géométrique et mécanique, sans que les meilleurs efforts aient fait réellement surgir aucun département nouveau.

Tel est le second degré du jugement de l'utopie algébrique, d'abord subordonnée à la culture directe des théories quelconques, ensuite restreinte aux spéculations sur l'étendue et le mouvement. Après ces deux phases successives d'une telle appréciation, il faut finalement reconnaître que, même envers la géométrie et la mécanique, la transformation des questions concrètes en recherches abstraites, quoique toujours possible, devient souvent illusoire. Beaucoup d'exemples prouvent, sans sortir du domaine géométrique, que cette métamorphose suscite des difficultés non moins insurmontables que celles qu'elle veut résoudre. La mécanique se trouve habituellement dans ce cas, et la saine application du calcul y reste essentiellement bornée au développement de la coordination générale. Elle ne peut instituer, pour l'astronomie, des solutions vraiment spéciales qu'à l'aide d'approximations successives, dont l'efficacité n'est guère plus satisfaisante que leur rationnalité.

D'après ces indications, on pourra normalement prévenir ou surmonter les tendances au matérialisme abstrait, toujours liées à la culture algébrique quand elle reste isolée, même pour peu de temps. Il faut ensuite placer, avant le début spécial de l'algèbre, une appréciation générale des signes adaptés à ce calcul, afin d'empêcher la reproduction individuelle des illusions collectives qu'ils ont empiriquement suscitées. Vues convenable-

ment, ces notations doivent toujours rester indispensables au développement des opérations algébriques, sans avoir jamais part à leur institution. Elles n'ont réellement produit aucune des inspirations qui firent successivement surgir les conceptions propres au calcul des relations. Son essor n'a pas été plus secondé par les lettres que celui du calcul des valeurs par les chiffres, auxquels personne n'osa jamais attribuer le progrès des spéculations correspondantes.

Expliquée convenablement, cette diversité d'appréciation entre deux cas essentiellement analogues peut directement indiquer la source des illusions propres aux algébristes et propagées chez les métaphysiciens. L'usage des chiffres est trop spécial pour susciter aucune méprise envers les conceptions arithmétiques, dont l'essor domine et dirige l'emploi des caractères uniquement destinés à faciliter leur application détaillée. A l'égard des lettres, l'illusion ne devient inévitable que parce que l'algèbre surgit dans un âge entièrement dépourvu de discipline philosophique. Tout son essor s'accomplit pendant l'anarchie moderne, où les vues de détail se développaient sans aucune pensée d'ensemble, historique ou dogmatique. Il fut alors naturel d'attribuer les diverses conceptions algébriques aux notations que leur maturité dut respectivement susciter, quoique l'observation des phases antérieures eut suffi pour rectifier un tel empirisme.

Toutes les illusions de ce genre peuvent être assez caractérisées d'après deux types irrécusables, où la méprise devient directement appréciable. Etablies, en arithmétique, dès l'institution de la numération systématique, et bientôt introduites, en géométrie, pour les mesures fondamentales, les notions de puissance s'étaient graduellement développées, en algèbre, au point d'y faire tardivement surgir la notation des exposants. Néanmoins, ce fut à cette notation que l'empirisme mathématique et

l'anarchie métaphysique rapportèrent une conception dont l'essor général l'avait longtemps précédée et finalement nécessitée. Une méprise analogue survint envers l'usage, presque simultané, de concentrer les équations dans leurs premiers membres, en remplaçant l'égalité de deux groupes par la nullité de leur différence. On ne craignit pas d'attribuer à cette forme les théories algébriques dont l'institution l'avait graduellement suscitée, depuis que les équations étaient irrévocablement substituées aux proportions.

Avant de juger le langage algébrique, il faut directement caractériser son aptitude à faciliter les déductions, et même les inductions. Rien ne peut mieux servir de type, à cet égard, dès le début de l'algèbre, que l'extension graduelle de la question judicieusement introduite pour cela par le seul des grands géomètres qui se soit convenablement occupé de compositions didactiques. Toutes ses réflexions sur le partage d'un nombre en deux parties dont la différence est donnée sont éminement propres à manifester l'efficacité déductive des signes abrégés et généraux qui conviennent aux raisonnements algébriques. Il suffit d'instituer, comme lui, la comparaison directe entre les deux suites, exactement équivalentes, d'opérations logiques que suscite ce problème en y faisant respectivement usage des termes universels et des notations spéciales. Ce contraste devient plus décisif en augmentant graduellement le nombre des parties et de leurs intervalles ; ce qui conduit bientôt à ne pouvoir plus suivre les déductions avec le premier système de signes, tandis que le second y suffit toujours. L'expérience logique peut ici s'étendre jusqu'à l'induction, quand on cherche à saisir, d'après le rapprochement des divers cas de ce problème, la loi commune de la formation des inconnues par les données. Elle devient aussitôt sensible en comparant les formules spéciales, tandis que les énoncés généraux sont impropres à la manifester.

Il suffit d'un tel exemple pour susciter, chez des esprits convenablement préparés, des réflexions qui seront ensuite étendues à l'ensemble des études algébriques. A cette épreuve artificiellement introduite, on peut utilement ajouter le contraste résulté d'une comparaison naturelle envers une question déjà traitée indépendamment des notations spéciales, et dès lors reprise avec leur secours. Mieux accomplis sous ce nouveau mode, les raisonnements du chapitre précédent sur la formule des combinaisons achèvent de faire directement ressortir l'aptitude de tels signes à faciliter les déductions mathématiques, même quand elles sont peu prolongées. Bientôt cette expérience peut aussi concerner les inductions, en s'aidant des notations spéciales pour rendre plus sensible la liaison de ce problème avec celui des répartitions, d'après l'identité plus saisissable des décompositions respectives. On peut ainsi reconnaître, avant le début des spéculations algébriques, combien leur essor doit être assisté par un judicieux emploi des signes les plus convenables.

La disposition philosophique résultée de ces épreuves scientifiques consiste à regarder ce langage partiel comme une institution secondaire dont il ne faut pas plus méconnaître le besoin spécial qu'exagérer l'efficacité générale. Il est moins capable que les langues proprement dites d'assister la méditation, parce qu'il ne comporte point une constitution fixe et complète. Arbitrairement composé de signes qui n'ont aucun rapport avec les idées correspondantes, il ne facilite la combinaison de celles-ci qu'en vertu de leur extrême simplicité. Nous n'y devons réellement voir qu'un supplément spécial au langage universel dont il ne peut jamais devenir entièrement indépendant. Toute son efficacité consiste à seconder l'élaboration, inductive et déductive, des détails du calcul algébrique, sans qu'il puisse aucunement participer à la construction des théories relatives à la grandeur indéterminée.

Sous une telle conclusion, les jeunes disciples de l'Humanité se trouveront également préservés d'une irrationnelle admiration et d'un vicieux dédain envers une institution subalterne dont l'appréciation empirique suscita beaucoup d'illusions métaphysiques. On peut la regarder comme ayant notablement aggravé l'anarchie académique, en y facilitant les usurpations de la médiocrité laborieuse, par la substitution des signes aux pensées. Bien appréciés, la plupart des travaux qui suscitèrent, en algèbre, des célébrités éphémères sont autant bornés à l'emploi du langage que ceux des littérateurs les plus dépourvus d'idées. Réduite à son office normal, cette langue supplémentaire doit être finalement exclue du discours mathématique, non-seulement comme symptôme de mauvais goût et de pédanterie, mais surtout à titre d'indice de l'impuissance intellectuelle. Elle n'y convient qu'aux détails algébriques, dont le développement, excusable sous l'essor empirique, répugne à l'état normal, où chaque auditeur ou lecteur y doit personnellement suppléer, afin que l'enchaînement des conceptions soit mieux apprécié.

Fondée sur cette appréciation, l'institution de ce langage reste accessoirement incorporée à la constitution finale du calcul des relations, pour y faciliter le développement spécial des raisonnements abstraits sur la grandeur indéterminée. Il faut en juger les divers artifices à mesure qu'ils surgissent, dans les occasions les plus propres à les caractériser. Nous devons même considérer, dès le début de l'algèbre, les principaux d'entre eux, indépendamment des applications qui les feront ensuite apprécier davantage. Tels sont surtout les exposants et les indices, dont l'aptitude peut se manifester dans les premiers exemples, ci-dessus indiqués, de l'efficacité logique des notations algébriques. On doit assimiler leur influence à celle des adjectifs, devenue plus prononcée envers une langue partielle, qui se compose,

presque exclusivement, de substantifs, avec un seul verbe, sous-entendu le plus souvent.

Afin que cette question soit pleinement systématisée, il y faut introduire deux perfectionnements connexes, dont le premier se trouve caractérisé par le chapitre précédent, à l'égard des chiffres. Graduellement étendu de l'arithmétique à l'algèbre, il consiste à concevoir les signes dans l'Espace, au lieu de se les représenter comme liés à leurs sièges graphiques. Il convient davantage aux lettres qu'aux chiffres, parce que les raisonnements algébriques exigent ordinairement une attention plus soutenue. L'habitude d'un tel milieu peut également faciliter les méditations générales et les opérations spéciales, en rendant les souvenirs plus nets, plus vifs, et plus fixes. Elles seront mieux secondées par le contraste normal entre la couleur des empreintes et celle du fond, comme envers les chiffres.

Nous devons ensuite compléter la constitution du langage algébrique en y faisant habituellement concourir les sons avec les formes. Une institution purement empirique l'a toujours réduit aux moyens graphiques, sans utiliser les réactions mentales que comportent l'appréciation phonique des signes qu'il emploie. Bien que les images auditives soient mieux adaptées aux cas où le sentiment intervient davantage, elles peuvent aussi seconder les méditations les plus arides. Elles y doivent spécialement faciliter les opérations synthétiques, en y développant les réactions mentales qui conviennent au sens le plus sympathique. Sous le régime encyclopédique, les études scientifiques peuvent, autant que les travaux poétiques, utiliser l'influence intellectuelle des affections bienveillantes, systématiquement écartées dans la discipline monothéique.

Tels sont les motifs généraux dont l'application spéciale détermine à contracter, dès le début de l'algèbre, l'habitude d'écouter les signes qu'on se bornait à regarder. Rien n'empêche

l'Espace de devenir autant le siège ou l'écho de tous les sons que le miroir ou le moule de toutes les formes. On doit normalement utiliser la nature subjective d'un tel milieu pour le rendre aussi phonique que graphique, afin que son usage logique combine les deux sens principaux. Une suffisante habitude de prononcer les signes à mesure qu'on les trace ou les lit disposera bientôt à reproduire les images auditives comme les images visuelles. Bien appliquée, cette faculté devra notablement faciliter les méditations les plus abstraites, où les notations seront ainsi devenues plus distinctes et moins fugaces. Le concours de l'Espace aura bientôt dispensé des efforts d'abord nécessaires pour garder le souvenir des expressions successivement prononcées. Elles seront spontanément reproduites par le milieu subjectif, avec une moindre intensité, comme envers les impressions purement visuelles.

On ne peut aucunement apprécier l'efficacité d'un tel régime d'après l'influence propre à la logique, essentiellement empirique, qui dirigea les études préliminaires. Subordonnée à la connaissance positive de la nature humaine, la culture théorique doit finalement systématiser et développer l'institution des signes, en faisant habituellement assister l'élaboration mentale par le concours normal de tous les sens. A leur tête, se place, objectivement et subjectivement, le plus sympathique, qu'il faut spécialement combiner avec le plus synthétique, seul utilisé dans la constitution empirique des études abstraites. Rapprochées des spéculations concrètes, elles manifestent, à cet égard, une infériorité due à leur nature plus analytique et plus spéciale. Elles peuvent cependant être instituées d'une manière aussi complète, quand la philosophie aura systématiquement développé l'usage, spontanément introduit par la poésie, de toujours unir l'audition à la vision pour assister la méditation.

Mais ce complément nécessaire ne peut normalement préva-

loir qu'en y disposant les jeunes disciples de l'Humanité dès le début de l'initiation abstraite. Une étude qui fait spécialement usage des signes est naturellement propre à manifester l'efficacité logique de leur pleine institution. Nous devons attribuer à l'extrême simplicité des idées mathématiques le peu de soin qu'on a pris d'y développer une telle assistance, dont les poëtes avaient, depuis longtemps, offert aux géomètres des exemples décisifs. Dans l'état normal, où toutes les épreuves isolément surgies sous le régime préliminaire seront systématiquement combinées, on ne saurait jamais négliger de caractériser, dès le début, la plénitude de cette institution. On y sera directement disposé pour procurer aux signes algébriques une consistance propre à mieux surmonter les difficultés mentales d'un domaine où la simplicité se trouve compensée par l'abstraction.

Étendue autant que possible, l'institution phonique du langage propre au calcul des relations doit normalement utiliser le concours de l'art avec la science. Sous un régime moins empirique que celui d'où surgit l'algèbre, cette assistance eût été bientôt indiquée par la nature alphabétique des notations usitées. Tandis que l'arithmétique employait des signes hiéroglyphiques, qui ne pouvaient spontanément susciter que des images visuelles, le calcul des relations avait été directement conduit à composer sa langue d'éléments aussi phoniques que graphiques. Rien n'empêche de faciliter leur reproduction par l'Espace en faisant concourir les instruments artificiels avec les voix naturelles pour diriger, en quelque sorte, l'éducation logique du milieu subjectif. On voit ainsi commencer, envers les éléments du discours algébrique, l'assistance normale de l'art musical, à l'égard des formules composées, dans les sciences les plus élevées où le sentiment compense la complication.

Garantis du matérialisme abstrait par son appréciation systématique, et normalement préparés au plein développement

du langage mathématique, les jeunes disciples de l'Humanité doivent directement aborder l'étude spéciale du calcul des relations. Réduit au domaine dont la culture isolée institue la transition nécessaire entre l'arithmétique et la géométrie, il y faut pourtant indiquer, dès le début, l'ensemble de sa constitution, en caractérisant sa conception essentielle et sa division générale. A cet effet, on doit d'abord apprécier la forme la plus convenable aux relations algébriques, tant élémentaires que transcendantes. Tardivement substituées aux proportions, les équations annoncèrent l'essor spécial de l'algèbre, qui ne devint décisif que d'après la régénération cartésienne de la géométrie. Il était si facile de sentir les inconvénients des relations à quatre termes, et de réaliser leur réduction à deux membres, que, si les anciens ne l'ont fait que très-tard, c'est parce que les spéculations algébriques n'avaient pas eu plus tôt besoin d'une culture distincte et suivie.

Étendue jusqu'au bout, l'impulsion qui suscita cette transformation décisive dut spontanément conduire à la forme finale, aussitôt que la pensée l'exigea. Sous l'impression continue des habitudes de transposition immédiatement résultées de la substitution des équations aux proportions, les algébristes devaient naturellement compléter une telle simplication en condensant les deux membres dans un seul. Toute l'importance vulgairement attachée à cette innovation facile provient, suivant la remarque ci-dessus indiquée, de ce qu'on la confondit avec les conceptions qui la suscitèrent sur la composition générale des équations. On doit regarder ces conceptions comme la principale source de la consécration que le fondateur d'un tel usage a finalement obtenue dans le calendrier historique des occidentaux. Moins attentif à la forme qu'au fond, il sentit que le besoin de comparer les équations quelconques, d'après l'essor graduel des quatre premières classes, exigeait que leur constitution

devint uniforme en se concentrant autant que possible. Alors surgit la simplification finale, auparavant inutile aux spéculations spéciales sur la résolution directe des diverses équations successives. Cette comparaison générale ne pouvait se développer qu'en ramenant toutes les équations au même second membre, non-seulement indépendant de l'inconnue, comme on le faisait déjà, mais numériquement nul, ce qui constitue le principal caractère de la forme définitive.

Ramenant ainsi l'idée de relation à celle de combinaison, la philosophie algébrique se trouve conduite à l'appréciation normale du groupement propre à chaque équation. Un tel examen a pour base nécessaire la distinction générale entre les variables et les constantes, principale source des conceptions de l'algèbre. Née de la considération isolée des équations à plusieurs inconnues, elle est graduellement devenue le fondement normal des spéculations du calcul, élémentaire et transcendant, quand la rénovation cartésienne a permis de subordonner l'abstrait au concret.

Mal appréciée sous l'empirisme qui la fit surgir, la distinction fondamentale entre les constantes et les variables ne fut, avant le positivisme, convenablement sentie que par le plus philosophe des grands géomètres. Il avait coutume d'expliquer, à ses dignes auditeurs privés, que tout le secret des conceptions algébriques consiste à saisir les différents degrés d'indétermination que la quantité peut admettre. La profondeur et la vérité de cette sentence sont pleinement appréciables envers la distinction sur laquelle repose l'ensemble du calcul des relations. Toutes les quantités se trouvent considérées, en algèbre, dans un état continu d'indétermination, puisqu'on y fait abstraction de leurs valeurs, même particularisées, sauf les nombres qui, comme les exposants et les indices, modifient les combinaisons. On doit toujours les soumettre uniformément aux règles du calcul,

en écartant les distinctions numériques, sans se préoccuper des anomalies auxquelles pourra conduire l'entière généralité des transformations quelconques. Nulle autre différence ne convient entre elles que celles qui concernent l'élaboration des relations considérées. Elle fait immédiatement surgir le contraste nécessaire et permanent des inconnues envers les données.

A partir de cette distinction spontanée, commence la progression fondamentale des divers degrés d'indétermination propres à la grandeur abstraite. Réduite même au cas d'une seule inconnue, la spéculation algébrique ne représente point celle-ci comme aussi fixe que les données, puisqu'on peut lui supposer des valeurs arbitraires jusqu'à ce que l'équation soit résolue. Mais c'est surtout dans les questions à plusieurs inconnues que naît la distinction finale entre les constantes et les variables. Elle y surgit même quand le problème devient déterminé, comme fournissant autant d'équations que d'inconnues. Sa solution exige que chaque équation y soit d'abord considérée isolément, ce qui permet de faire arbitrairement varier toutes les inconnues hormis une, qui leur est ainsi subordonnée, tandis que les données restent fixes.

Nous voyons alors la détermination devenir un cas particulier des relations algébriques, généralement caractérisées par l'indétermination. On rend déterminé le système de valeurs des inconnues en accumulant des équations dont chacune, prise à part, et même plusieurs ensemble, le laisse plus ou moins indéterminé, jusqu'à ce qu'elles soient assez nombreuses. Dès lors, les qualifications de données et d'inconnues doivent être habituellement remplacées par celles de *constantes* et de *variables*, qui fixent directement l'attention sur le vrai contraste algébrique, normalement propre à chaque équation supposée seule. Une telle transformation ne peut cependant aboutir à la conception fondamentale du calcul des relations que quand l'ap-

préciation concrète y complète l'essor abstrait. Sans un tel complément, l'indétermination, au lieu de constituer le cas naturel, semblerait artificiellement due à l'écartement passager d'une parties des conditions du problème, toujours déterminé primitivement,

Il faut donc que la distinction générale entre les variables et les constantes devienne autant concrète qu'abstraite, pour acquérir toute sa plénitude philosophique. Nous ne devons admettre, en algèbre, que des notions fondamentales également liées à ses deux souches nécessaires, l'arithmétique et la géométrie, dont elle doit instituer l'union. Or, cette condition ne pouvait être ici remplie avant que le positivisme eut directement systématisé l'harmonie universelle entre l'abstrait et le concret. Puisque l'algèbre serait hypothétiquement applicable à tous les domaines encyclopédiques, il faut que sa conception la plus fondamentale puisse naturellement convenir à des grandeurs quelconques. Sa restriction normale aux cas géométriques et mécaniques ne résulte que de l'impossibilité d'instituer ou d'élaborer les équations propres aux phénomènes plus compliqués

Historiquement envisagée, l'algèbre est autant liée à la géométrie qu'à l'arithmétique, les transformations relatives aux proportions ayant même précédé celles qui concernent les équations. Elle se trouve dogmatiquement obligée, néammoins, de puiser, dans la seule considération des nombres, la base nécessaire de son universalité rationnelle. L'ascendant de ce motif la poussa vers un caractère essentiellement abstrait jusqu'à ce que la rénovation cartésienne de la géométrie eut fait irrévocablement surgir la philosophie mathématique. Alors on s'y préoccupa du sens concret des équations, essentiellement rapportées désormais à leur destination géométrique, tant que la mécanique ne suscita point une diversion favorable à la culture isolée. Sous la discipline positive, la duplicité du domaine

auquel l'algèbre est normalement applicable ne tend plus à faire prévaloir le caractère purement abstrait, et pourtant l'idée d'équation acquiert l'universalité convenable.

On a ci-dessus reconnu que le dogme positif équivaut à considérer les phénomènes quelconques comme susceptibles d'équations, sauf la difficulté de les instituer et de les élaborer. Une appréciation inverse fait également rentrer l'idée d'équation dans celle de loi. Vue convenablement, celle-ci contient, par sa nature, la distinction fondamentale entre les variables et les constantes ; puisque toute loi consiste à saisir la constance au sein du changement. Elle considère partout plusieurs grandeurs qui varient simultanément en conservant la relation qui la constitue, tandis que d'autres éléments du phénomène demeurent fixes envers chacun des cas de même espèce. Réduite à sa moindre complication, l'équation ou loi renferme deux variables, l'une indépendante, l'autre dépendante, combinées avec une seule constante. Toutes les relations peuvent et doivent être ramenées à ce mode, quelque nombreuses qu'y soient les variables ou les constantes, puisqu'on ne saurait directement apprécier qu'une source unique de changement ou de fixité. Successivement rapportée à chaque variable indépendante, la variable dépendante fait surgir, dè la relation totale, autant de lois partielles, dont chacune n'est distinctement caractérisée qu'envers un seul des coefficients spécifiques.

Nous sommes ainsi conduits à reconnaître que, suivant la sentence lagrangienne, l'indétermination constitue le cas normal des spéculations sur la grandeur, d'abord concrète, puis abstraite. On ne peut y produire la détermination qu'en fixant à volonté toutes les variables indépendantes, à moins qu'on n'accumule un nombre suffisant de relations simultanées. Ces explications font aussi ressortir la coexistence nécessaire entre les constantes et les variables, afin que la loi soit suffisamment

définie. Elle resterait toujours vague, quelque précise que fût la liaison mutuelle des variables, si celles-ci n'étaient pas combinées avec une constante, seule capable de spécifier chaque mode du même phénomène, suivant le type résulté de la chute élémentaire des poids. Systématisée par le positivisme, sous l'impulsion cartésienne, la distinction fondamentale entre les variables et les constantes, abstraitement provenue de la pluralité des inconnues, émane concrètement de la notion directe des lois quelconques.

Éclaircie convenablement, cette conception conduit à compléter le préambule philosophique de l'algèbre en instituant la division générale du calcul des relations. Sous une culture purement abstraite, cette décomposition n'aurait pu surgir, ou serait toujours restée particulière à certaines recherches. C'est à l'impulsion concrète qu'il faut rapporter la division fondamentale du calcul des relations en élémentaire et transcendant, suivant que les relations restent directes ou deviennent indirectes. Historiquement considérées, l'institution leibnitzienne fut la suite inévitable et le complément indispensable de la régénération cartésienne. Il suffit de systématiser cette origine spontanée pour procurer à la principale division de l'algèbre toute sa généralité dogmatique. La même appréciation philosophique qui vient d'expliquer la distinction fondamentale entre les constantes et les variables peut aussi motiver la décomposition générale du calcul des relations. On voit alors les deux conceptions qui dominent la philosophie algébrique également résulter de la notion systématique de loi, successivement envisagée sous les deux aspects qu'elle comporte.

S'il était toujours possible d'instituer directement la relation précise entre les variables simultanées, l'algèbre se bornerait à la résolution proprement dite des différentes équations ainsi formées. Une saine appréciation des difficultés que présente la

subordination de l'abstrait au concret fait bientôt sentir que cette condition n'est jamais réalisable qu'envers les cas les plus simples des questions vraiment accessibles au calcul. Fondée sur le sentiment spontané d'une telle impossibilité, la géométrie ancienne ne tenta pas d'étendre aux figures curvilignes les mesures accomplies pour les formes rectilignes qu'en ramenant les unes aux autres. Réduites à leurs éléments, toutes les questions semblables tendent nécessairement à coïncider ; ce qui permet d'y faire primitivement rentrer les cas les plus compliqués dans les plus simples. Il suffit de reconnaître cette loi mentale, d'abord en géométrie, puis en mécanique, pour lui procurer inductivement toute la généralité convenable, déductivement émanée de la philosophie première. De là résulte la décomposition naturelle de chaque recherche concrète en deux parties successives, l'une formant la relation des éléments artificiels, l'autre élaborant le passage de cette équation indirecte à la liaison directe des grandeurs considérées. A cette seconde phase du travail logique, correspond l'institution leibnitzienne de l'algèbre transcendante, essentiellement destinée à systématiser l'élimination finale des auxiliaires primitivement introduits.

Tel est l'esprit général d'une construction dont l'explication spéciale appartient à d'autres chapitres de ce volume. Réduit à son domaine élémentaire, le calcul des relations comporterait peu d'efficacité concrète, vu la rareté des équations susceptibles d'une vraie résolution, et leur faible aptitude à représenter les phénomènes naturels. A la vérité, l'algèbre transcendante ne peut jamais aboutir qu'à faire indirectement rentrer dans le département abstrait les lois concrètes qu'il ne saurait directement embrasser. Mais cette transformation, quoique rarement accomplie, suffit pour que les chétives ressources du calcul élémentaire puissent réellement convenir à beaucoup de cas qui seraient autrement inabordables. Écartant toute pré-

tention absolue, on reconnaît qu'une telle méthode est éminemment propre à faciliter à la fois l'extension et la liaison des doctrines correspondantes, en introduisant des grandeurs plus simples et plus uniformes.

A ce système d'auxiliaires, on a successivement appliqué diverses conceptions générales, dont aucune n'est pleinement satisfaisante, quoique chacune offre de précieuses qualités, spécialement appréciées au cinquième chapitre de ce volume. Mais le génie éminemment philosophique du fondateur du calcul transcendant avait spontanément introduit une appréciation qui, systématisée, écarte des controverses qu'on doit juger interminables d'après un siècle d'efforts aussi dignes qu'insuffisants. Bornant son institution à perfectionner l'ensemble de la géométrie et de la mécanique, le philosophe germanique, dédaignant une sollicitude indiscrète, s'abstint d'investir du caractère déductif une construction essentiellement inductive. On doit systématiquement imiter cette sagesse spontanée quand une longue suite d'applications décisives a pleinement manifesté la rationnalité d'une telle méthode. Substituant partout le relatif à l'absolu, l'éducation positive établira, comme institutions de l'Humanité, les conceptions convenablement élaborées dans l'évolution préparatoire, en surmontant la défiance révolutionnaire qui les subordonne au jugement individuel.

Institution fondamentale. Appliqué complètement, ce régime peut seul permettre le digne développement de l'instruction encyclopédique, qui forme la base systématique de l'ordre final. Elle exigerait fort au delà du temps normal, si les tendances organiques s'y laissaient jamais dominer par l'esprit critique. Religieusement instituée et dirigée, elle borne l'examen à comprendre les notions assimilables sans remettre en question ce que le passé décida.

Les constructions positives qui furent successivement accomplies sous le régime préliminaire n'ont jamais besoin que d'être

systématisée pour s'incorporer à l'ordre final. Il doit toujours dissiper les habitudes de discussion défiante qui, propres à l'état métaphysique, s'introduisirent dans l'évolution scientifique, surtout en mathématique, comme garantie contre les inspirations sophistiques dont elle était souvent accompagnée. Étudiée convenablement, la science fondamentale peut directement concourir au but final de l'initiation théorique, instituer une foi vraiment inébranlable, seule apte à guider l'activité sous l'impulsion de l'amour. Nous devons systématiquement renoncer, en Logique, à l'irrationnelle prétention, émanée du régime absolu, de tout établir par déduction sans aucun recours à l'induction. Ses principales institutions eurent une origine essentiellement inductive, et ne peuvent jamais prendre le caractère déductif; ce qui ne saurait nullement altérer leur autorité dans un système dont le dogme fondamental n'a pas d'autres titres à l'ascendant universel.

Il faut toujours sentir que le régime final doit seulement régler des forces empiriquement surgies, sans reproduire leur essor accompli, qui devient la base d'un ordre directement construit d'après l'ensemble des antécédents humains. Mal dirigées, les études scientifiques, et surtout mathématiques, disposent à l'irrévérence envers le passé, par la prétention qu'elles suscitent de reconstruire individuellement ce qu'il nous a collectivement transmis. On y doit constamment borner la révision des acquisitions antérieures à les dégager des incohérences qui les empêchent de se combiner.

Mais, en rectifiant les habitudes résultées d'une spécialisation dispersive, il faut systématiquement consacrer les institutions qu'elle fit empiriquement surgir. Elle a graduellement élaboré, sous la tutelle théologico-métaphysique, tous les éléments nécessaires pour construire le régime positif. D'après cette préparation, c'est d'une telle construction que nous devons être es-

sentiellement occupés, sans refondre les matériaux que nous pouvons directement assembler. Il faut maintenant spécifier cette sagesse envers l'institution fondamentale du calcul des relations, c'est-à-dire l'ensemble des lois élémentaires qui permettent de subordonner l'abstrait au concret. Tardivement surgies sous l'impulsion cartésienne et leibnitzienne, à travers la révolution occidentale, elles sont assez éprouvées pour être immédiatement incorporées à la synthèse mathématique. Après avoir, pendant un siècle, dirigé l'essor de l'algèbre, d'abord en géométrie, puis en mécanique, sans subir aucune extension, elles doivent toujours suffire à nos besoins normaux, qui ne pourront jamais susciter une culture aussi spéciale. Rien ne serait plus irrationnel que d'aspirer à construire le régime final sans regarder l'évolution préliminaire comme essentiellement terminée, sous chacun de ses aspects principaux.

En appliquant cette règle à l'appréciation directe des éléments algébriques, il faut systématiquement renoncer à leur augmentation ultérieure. Mais un vague instinct de progrès doit empiriquement pousser à regarder leur nombre comme susceptible d'accroissement quand l'esprit historique n'a pas suffisamment circonscrit les espérances dogmatiques. Pour la confirmation spéciale de la décision générale que le positivisme fournit à ce égard, on peut se borner à remarquer que la plus active culture n'a jamais agrandi cette enceinte, pendant un siècle et demi, depuis l'introduction du seul élément vraiment émané des modernes. La manière dont il surgit est directement propre à constater que l'évolution préliminaire atteignit, sous cet aspect, les limites naturellement imposées à notre intelligence. Il ne fut réellement dû qu'au changement de point de vue envers la relation immédiatement précédente, seule susceptible d'un tel enfantement.

Nous devons, à cette occasion, réprimer, chez les jeunes dis-

ciples de l'Humanité, les vagues aspirations qui tendent à convertir le progrès normal en agitation révolutionnaire. Un régime qui doit régler nos forces ne saurait comporter l'empirique sollicitude, toujours disposée à les développer, comme pendant notre première vie. Leur essor normal tend à devenir presque insensible, par cela même qu'il est continu; leur perfectionnement consiste surtout à les mieux appliquer, de manière à les consolider davantage.

Tous les éléments algébriques se trouvent réellement contenus dans le premier essor de l'arithmétique et de la géométrie dont ils devaient finalement instituer la liaison générale. Une appréciation philosophique de la numération y fait directement apercevoir, non seulement les notions de somme ou de différence, et même celles de produit ou de quotient, mais aussi la conception des puissances, et par suite des racines. Rapportées à la géométrie, toutes ces relations s'y présentent dès son début, sauf la restriction initiale de la dernière aux deux cas les plus simples, qui suffisaient pour susciter les autres, si l'arithmétique ne les eût pas fournis. Bien appréciés, les trois couples dont l'algèbre s'alimenta jusqu'à la dernière phase de l'évolution occidentale remontent donc à l'âge théocratique, sinon fétichique. A l'égard du quatrième, seul propre aux modernes, l'indication précédente fait assez sentir que son introduction ne manifeste aucun accroissement réel dans l'imagination mathématique, qu'il faut dès lors renoncer à développer.

Beaucoup d'exemples auraient déjà suffi, surtout en Logique, pour réfréner l'ardeur théorique, si l'expérience pouvait jamais dispenser de la réflexion. A peine peut-on assigner l'époque reculée où surgirent les institutions mathématiques les plus usuelles, et pourtant leur application continuelle ne les a nullement perfectionnées, parce qu'elles eurent bientôt atteint leur maturité spéciale. Sous tous les aspects, le *progrés*, tel que les

occidentaux l'ont conçu jusqu'à l'avénement du positivisme, doit être systématiquement regardé comme propre à l'essor préliminaire, et même incompatible avec l'état final, dont il troublerait l'économie. Elle ne peut régler nos forces, surtout théoriques, qu'autant que leur développement spécial se trouve assez ralenti pour ne susciter aucune impulsion capable d'altérer leur discipline générale. Rectifiée par le positivisme, la notion fondamentale du progrès humain substitue une évolution continue à l'extension illimitée que les métaphysiciens supposaient.

On doit toujours concevoir la préparation scientifique comme ayant, en vertu de sa spécialité, bientôt atteint le terme naturellement propre à notre intelligence. Rapportée à sa destination finale, cette évolution préliminaire a dû devenir la plus rapide envers le domaine le plus simple, quoiqu'il ait ensuite suscité, d'après sa culture plus ancienne, plus facile, et plus indisciplinée, plus de divagations qu'aucun autre. Nous sommes ainsi conduits à sentir que le vrai perfectionnement de la science fondamentale consiste à faire un meilleur usage de ses principales acquisitions après les avoir mieux coordonnées, sans aspirer à les étendre. Elle n'a jamais rempli que d'une manière accessoire, et même indirecte, surtout insuffisante, l'office logique auquel elle est essentiellement vouée. Sous un régime qui fera toujours prévaloir cette destination, elle fournira le meilleur type d'une culture normale, après avoir longtemps offert l'exemple le plus complet d'un essor indiscipliné.

Nul esprit judicieux ne regardera les réflexions précédentes comme inaccessibles aux jeunes disciples de l'Humanité, quoiqu'elles semblent telles à des intelligences mal cultivées. Une étude rationnelle de l'arithmétique suffit, à cet égard, pour produire la vérification spéciale d'une appréciation générale d'abord émanée du culte, ensuite développée par l'art, et fina-

lement systématisée dans la philosophie première avant le début de l'instruction mathématique. Bien que les principales institutions du calcul des valeurs soient plus anciennes que les autres constructions de la Logique, elles sont aussi plus parfaites, en vertu de leur simplicité supérieure. Il faut donc reconnaître que les jeunes disciples de l'Humanité se trouvent disposés, en abordant l'algèbre, à regarder la science fondamentale comme ayant dû bientôt atteindre, sous chaque aspect élémentaire, le terme naturel de ses progrès. Les opérations usuelles de l'arithmétique se trouvent accomplies aujourd'hui suivant le mode, théocratique ou fétichique, qui les dirigeait trente siècles auparavant. Elles ont depuis comporté des applications toujours croissantes, sans que leur institution primitive ait jamais subi de changement essentiel. Sous l'impression continue d'un pareil type, des esprits normalement préservés des illusions métaphysiques et des divagations académiques peuvent aisément comprendre que les éléments algébriques eurent bientôt reçu, dans l'évolution préliminaire, la constitution qu'ils doivent toujours conserver.

Il faut maintenant apprécier cette institution fondamentale que le passé nous a léguée pour former la base immuable de la philosophie algébrique. Bien examinée, elle n'a besoin, comme tous les autres résultats de l'essor empirique, que d'être sagement systématisée, sans pouvoir jamais comporter une véritable extension. Elle doit, d'abord, se purger d'une vicieuse dénomination, que l'anarchie spirituelle fit seule adopter, par tous les géomètres, pendant la dernière phase de la révolution occidentale. Rattachée primitivement à l'organisation sociale, la qualification de *fonction* fut normalement étendue à l'organisme personnel, de manière à désigner, dans les trois parties de la Morale, les actes convergents de la nature vivante. Après avoir été spontanément respecté par la Physique, qui jamais

n'osa se l'appliquer, ce terme devint irrationnellement propre à la Logique, qui l'a complétement dénaturé.

Telle est l'usurpation qu'il importe de faire normalement cesser avant d'apprécier la constitution élémentaire du calcul des relations. Après avoir systématiquement écarté la qualification d'*analyse* empiriquement attribuée à l'algèbre, on doit peu répugner à bannir un terme également vicieux. Rapprochés de plusieurs autres non moins irrationnels, quoique plus secondaires, ces deux abus indiquent combien le langage mathématique fut partout altéré sous l'anarchie académique. Il faut aussi remarquer, envers le mot *fonction*, le silence gardé par les biologistes sur l'usurpation des géomètres, auxquels la révolution occidentale avait, dans sa dernière phase, transféré la présidence scientifique, que les médecins possédaient depuis la fin du moyen âge. Faute de discipline philosophique, les uns purent impunément envahir, et les autres n'osèrent pas même réclamer, tant s'était aggravée la confusion théorique avant l'avénement du positivisme.

A la vicieuse expression que je viens de bannir, il est aisé de substituer une dénomination pleinement adaptée à son office mathématique, en regardant la variable dépendante comme une *formation* de la variable indépendante. Rapprochés l'un de l'autre, les deux mots se trouvent affectés de la même initiale dans toutes les langues occidentales, d'après leur souche commune. Bien que fortuite, cette coïncidence permet de conserver sans aucun autre changement que celui de la prononciation, les précieuses notations fondées, depuis un siècle, sur ce début du nom adopté pour la filiation algébrique. On doit normalement comparer la dénomination finale à celle de *formule* que le langage mathématique a judicieusement puisée dans la langue générale. Leur rapprochement fait directement ressortir leur différence; le nom de *formation* convient à toute dépendance,

tant implicite qu'explicite; le mot *formule* ne doit être appliqué que quand la filiation est devenue ouvertement appréciable.

Scrupuleusement examinée, la réforme nécessaire que je viens d'accomplir doit d'abord susciter un regret que j'ai longtemps éprouvé, d'après le blâme secondaire qu'elle jette sur les ouvrages recommandables qui, depuis un siècle, semblaient avoir irrévocablement consacré le nom vicieux. A leur tête, restera toujours placé l'incomparable composition où la science fondamentale fut, pour la première fois, dignement considérée dans son ensemble, algébrique, géométrique, et mécanique. Ce chef-d'œuvre du plus éminent des penseurs spéciaux fait irrévocablement partie de la moitié monumentale du recueil systématique de cent volumes d'élite institué par le positivisme comme seule bibliothèque normale de tout vrai croyant, même théoricien. Rien ne doit cependant empêcher de reconnaître que son titre est doublement vicieux, en qualifiant de *fonctions analytiques* des formations algébriques qui sont autant synthétiques qu'analytiques puisqu'elles doivent être également abstraites et concrètes. On ne peut expliquer une telle inconséquence chez un esprit aussi philosophique que d'après sa déférence exagérée pour le plus fécond, mais le moins philosophe, des grands géomètres, qui, dans la génération précédente, avait été le principal organe de ce double abus.

Cette rectification doit me laisser d'autant moins de scrupules qu'elle blâme aussi ma propre conduite, pleinement caractérisée, à cet égard, par le premier volume de mon ouvrage fondamental. On peut ainsi juger combien était universel, et dès lors excusable, un abus que semblait consacrer le philosophe spécialement investi de l'initiative régénératrice. Rapproché de ma construction finale, ce début de ma première vie doit déjà marquer la soumission spontanée de ma jeunesse à des usages

que ma maturité va successivement frapper d'une réprobation systématique dans tout le cours du présent volume.

Afin que l'institution fondamentale du calcul des relations soit convenablement appréciée, il faut d'abord reconnaître que toutes les formations algébriques doivent être à la fois abstraites et concrètes. Basée sur la double source de l'algèbre, cette condition procure aux spéculations sur la grandeur indéterminée le concours de deux avantages qui semblaient incompatibles : la continuité s'y concilie avec l'abstraction. Issues de l'arithmétique seule, les formations algébriques seraient aussi discontinues que les nombres. et ne pourraient devenir continues que par des artifices primitivement émanés de la géométrie. Elle a réellement inspiré, comme l'étymologie le rappelle, l'idée générale de *fraction*, d'après laquelle on a constitué la continuité numérique, à titre de limite normale du décroissement indéfini des intervalles. Rien n'empêche, il est vrai, la géométrie de fournir aussi des types de discontinuité, dans beaucoup de lignes et surfaces rationnellement admissibles. Toutefois ils y sont toujours exceptionnels, et même ils y restent partiels ; du moins en excluant, suivant l'esprit relatif de la synthèse subjective, les hypothèses qui ne peuvent aucunement convenir aux besoins humains. On doit donc regarder la continuité, base universelle de la philosophie, comme naturellement propre à l'existense concrète, d'abord en géométrie, puis en mécanique, où tout se rapporte au temps, jamais susceptible d'intermittence.

Nous pouvons ainsi reconnaître combien serait vicieuse, en Logique, la considération des relations discontinues, vers laquelle tendit l'empirisme algébrique quand il eut essentiellement épuisé les spéculations sur le cas normal. A toute *formation* vraiment rationnelle, d'ailleurs simple ou composée, le calcul doit systématiquement attribuer la continuité spontanément émanée de la géométrie, et finalement confirmée

par la mécanique. Toutes celles qui ne peuvent jamais remplir cette condition doivent être normalement exclues de la Logique, comme aussi vicieuses subjectivement qu'objectivement. Un esprit absolu, dont l'empirisme mathématique fut le dernier appui, peut seul conduire à faire contraster ce cas exceptionnel avec le cas normal, sous le prétexte métaphysique qu'ils sont, hypothétiquement, aussi convenables l'un que l'autre. Mais la discipline relative ne doit aucunement hésiter à purger la Logique de toute formation discontinue, quelque difficile que puisse devenir l'accomplissement abstrait de la condition concrète de continuité.

D'après cela, l'algèbre, destinée à lier l'arithmétique et la géométrie, se trouve toujours obligée à modifier les conceptions émanées de la première jusqu'à ce qu'elles puissent assez convenir à la seconde. Elle y parvient aisément envers les formations vraiment élémentaires, parce qu'elles sont également provenues de ces deux sources. Cette condition n'exige, en arithmétique, que d'envisager l'institution des fractions comme le complément nécessaire de celle des nombres entiers, afin que les deux souches de l'algèbre soient toujours équivalentes en continuité normale. Or, cette équivalence se trouvant spontanément établie envers les formations simples, elle doit naturellement s'étendre aux formations composées, pourvu qu'on exclue du domaine mathématique les relations qui ne pourraient être entièrement construites avec ces seuls éléments. Réciproquement, en échange de la continuité que lui prescrit la géométrie, l'arithmétique impose à celle-ci l'abstraction, comme condition également nécessaire des types de dépendance qu'elle fournit à l'algèbre. Une appréciation systématique doit autant exclure de la Logique les formations qui resteraient essentiellement concrètes que celles qui ne pourraient jamais devenir continues. Mais toutes les formations élémentaires que l'évolution préli-

minaire élabora pour l'état normal sont également adaptées aux deux attributs nécessaires.

Elles se trouvent tellement indiquées ci-dessus qu'il suffit ici de résumer et coordonner les notions qui s'y rapportent, sauf les éclaircissements propres à l'élément moderne. Dans chacune d'elles, trois grandeurs co-existent toujours, l'une constante qui détermine la base de chaque filiation, les deux autres variables, dont la corrélation institue l'élément correspondant. Il est nécessairement double, puisque toute formation suscite son inverse, en rapportant alternativement l'une des variables à l'autre. Toutes les relations simples dont se compose le domaine algébrique se trouvent donc rangées spontanément par couples, qui se succèdent de la même manière que les opérations correspondantes de l'arithmétique et de la géométrie. Suivant ce double guide, il est facile de classer les trois couples de formations qu'un judicieux empirisme qualifia spécialement d'*algébriques*, comme ayant toujours rempli les conditions propres aux vrais éléments des spéculations sur la grandeur indéterminée.

Un empirisme moins estimable donna le titre de *transcendantes* à celles du quatrième couple, seul émané de la science moderne. Dans leur avénement, il suffit de reconnaître que les *exponentielles* proviennent des *puissances* en considérant celles-ci par rapport à l'exposant. Il était d'abord constant, et constituait la véritable *base*, c'est-à-dire le module caractéristique, de la formation relative à la variable indépendante que l'anarchie académique nomma la base de chaque puissance. Renversant cette harmonie, on obtient la formation justement qualifiée d'*exponentielle*, en fixant la grandeur qui primitivement y changeait et réciproquement. Elle exige seulement que la continuité soit également établie envers les deux quantités, en introduisant les exposants fractionnaires ; ils sont d'ailleurs aptes à ran-

ger les racines parmi les puissances, comme les quotients étaient déjà rentrés dans les produits.

Renversés de la même manière, les autres formations n'en peuvent jamais produire de nouvelles, parce qu'elles résultent d'une même origine, arithmétique et géométrique. Epuisé dès sa naissance, le seul effort de l'imagination humaine envers les éléments algébriques prouve combien leur nombre reste nécessairement restreint à l'enceinte primitive, accrue de cet unique enfantement. Cependant, le besoin de dépasser, autant que possible, ces quatre couples en fait normalement admettre un cinquième, qui nécessite une appréciation spéciale, parce qu'il n'est pas, comme les précédents, à la fois abstrait et simple, quoiqu'il comporte alternativement ces deux attributs. Telles sont les dix formations élémentaires que l'algèbre doit seules combiner pour transformer toutes les lois géométriques et mécaniques en de véritables *équations*. A l'inspection de ce chétif tableau, qui se trouve algébriquement noté dans le tome premier de ma *Philosophie positive*, on doit directement sentir combien l'institution leibnitzienne était indispensable au principal office du calcul des relations.

D'après cette appréciation générale, il faut spécialement caractériser chacun des dix éléments algébriques, en examinant comment la variable indépendante y forme la variable dépendante à partir de la *base* constante. On doit systématiquement conserver la division spontanément introduite entre les trois premiers couples et les deux derniers, quoique les dénominations d'*algébriques* et *transcendantes* soient peu convenables envers les formations correspondantes. Cette distinction résulte de ce que le premier groupe est pleinement normal et naturel, d'après un accord direct entre ses deux origines arithmétique et géométrique. Toutes les formations appartenant au second groupe ont, au contraire, une source exclusivement abstraite

quant aux unes ou purement concrète envers les autres. Afin de caractériser ce contraste, à la fois historique et dogmatique, on pourrait nommer *naturelles* les fonctions des trois premiers couples et qualifier d'*artificielles* celles des deux derniers.

Il faut d'abord reconnaître, envers le premier couple, que les deux éléments y doivent être distingués, non par la constante, mais d'après la variable indépendante, ajoutée à la base dans l'un et retranchée dans l'autre. Grandie continuellement, elle fait croître ou décroître la variable dépendante, mais d'une quantité toujours égale à la sienne ; ce qui n'a jamais lieu pour les autres formations. Une diversité plus prononcée résulte de ce contraste entre les deux éléments du premier couple, quand la variable indépendante acquiert une grandeur supérieure à celle de la base. Alors la seconde formation procure à la variable dépendante une valeur *négative*, qui croît autant que la valeur *positive* de la variable indépendante. Le premier couple algébrique fait ainsi surgir la considération des grandeurs en moins, dès lors devenue aussi nécessaire au calcul des relations que celles des grandeurs en plus.

Sous l'aspect concret, ce contraste se retrouve naturellement, surtout en géométrie, et même en mécanique. Il y consiste dans le changement de sens qu'éprouve la variable dépendante, si l'application de l'autre sur la base en dépasse l'origine. Nous voyons ainsi l'opposition de *signe*, abstraitement résultée de la soustraction, correspondre au contraste de la gauche à la droite, ou d'avant envers après, quand on retranche concrètement la longueur ou le temps. Cette correspondance élémentaire se trouve implicitement comprise, dès le début du calcul, dans la numération, qui réduit la distinction entre ajouter et soustraire à celle du sens suivant lequel on parcourt l'échelle numérique. Elle permet de remarquer la soustraction comme une addition, où l'on joint à la base une grandeur négative au

lieu d'une grandeur positive. Rapprochés ainsi l'un de l'autre, les deux premiers éléments algébriques restent toujours distincts, en ce que l'accroissement de la variable indépendante fait augmenter ou diminuer la variable dépendante. A quelque mode abstrait, ou concret, que soit dû le changement corrélatif de signes ou de sens, les deux cas se trouvent également séparés par l'annulation de la grandeur produite.

C'est ainsi que les valeurs en moins deviennent aussi propres au calcul des relations que les valeurs en plus, suivant une tendance spontanée à compter autant par défaut que par excès afin de diminuer les nombres. On doit toujours soumettre aux mêmes règles algébriques les quantités quelconques négatives ou positives, en ayant égard au signe comme s'il indiquait une combinaison, qui reste sous-entendue. Rien ne peut dispenser d'une telle uniformité, sans laquelle l'algèbre ne saurait jamais maintenir l'indétermination nécessaire des grandeurs considérées, tant constantes que variables. A tout instant, il faudrait restreindre, à des degrés divers et communément inappréciables, les hypothèses sur les valeurs restées arbitraires, si l'on refusait d'admettre les résultats soustractifs autant que les additifs.

Relativement à l'algèbre, cette uniformité de traitement envers les grandeurs opposées résulte de l'obligation fondamentale d'y faire toujours abstraction des valeurs pour n'y considérer que les relations. A l'égard de la géométrie et de la mécanique, elle est due à la continuité nécessaire des variations quelconques. La correspondance générale des deux modes, abstrait ou concret, suivant lesquels se produit le contraste du signe ou du sens, ne peut offrir aucun embarras envers les cas élémentaires. On voit seulement surgir une grave difficulté quand on veut étendre ce rapprochement aux combinaisons quelconques des grandeurs considérées. Sans l'induction, le philosophe qui fonda la géométrie générale n'aurait jamais pu

découvrir une loi directement indispensable à ce renouvellement.

Elle consiste en ce que la correspondance élémentaire entre le signe et le sens persiste dans les combinaisons quelconques qui peuvent résulter des spéculations, abstraites et concrètes, sur la grandeur indéterminée. Représentés par une même formule, les différents modes d'une relation géométrique ou mécanique deviennent ainsi susceptibles d'une considération uniforme, qui peut aussi s'étendre aux dispositions restées indécises, qu'on serait autrement forcé d'écarter. Une exacte coïncidence existe toujours entre l'équation directement instituée pour le nouveau sens d'une grandeur quelconque et celle qui se déduit de la loi propre à l'ancien sens en y changeant le signe de la quantité correspondante. D'après une telle coïncidence, le nombre des cas ainsi réunis sans confusion dans une même formule est toujours égal à la puissance de deux marquée par le nombre d'éléments, variables ou constants, inconnus ou connus, susceptibles d'un tel contraste. Il devient dès lors facile d'apprécier combien la loi cartésienne épargne de complication envers les dispositions précises et de restrictions pour une hypothèse indécise. Toujours on peut ainsi se borner à former l'équation, géométrique ou mécanique, envers un seul des cas propres à chaque phénomène. On est d'avance assuré que tous les autres s'y trouveront aussi compris, en ayant convenablement égard aux changements de signe des quantités correspondantes.

Telle est l'admirable loi que découvrit, d'après quelques rapprochements, le génie, autant inductif que déductif, du fondateur de la philosophie mathématique, pour subordonner l'abstrait au concret. Il fut mal apprécié, sous cet aspect, comme envers l'institution connexe de la géométrie générale, jusqu'à l'avénement du positivisme, dont il constitue le principal précurseur. A peine la routine académique a-t-elle compris la si-

gnification et senti la portée de cette loi, qu'elle a souvent appliquée vicieusement.

Fondée sur une induction que suggère le lien élémentaire entre le signe et le sens, elle fut ensuite confirmée d'après une foule de comparaisons, géométriques et mécaniques, qui, depuis longtemps, ont dissipé toute incertitude envers sa généralité complète. Il faut systématiquement renoncer à la voir jamais acquérir un caractère déductif, dont la vaine recherche l'a souvent obscurcie, et même dénaturée, non-seulement dans les études scolastiques, mais aussi chez de grands géomètres. D'après sa nature et sa destination, elle n'est pas plus susceptible d'investiture déductive que les autres relations générales entre l'abstrait et le concret, que nous devons constater sans les expliquer. Un reste inaperçu des habitudes propres au régime absolu pourrait seul conduire à chercher une démonstration qui supposerait dévoilé l'éternel mystère de la subordination du subjectif à l'objectif. Sous la discipline positive, on doit radicalement écarter de telles spéculations, comme autant inaccessibles qu'oiseuses, au même titre que celles qui concernent la corrélation fondamentale entre la nature vivante et la nature morte.

On se trouve normalement conduit à caractériser, dès le début de l'algèbre, la réaction qu'exerce, sur les deux autres couples de formations naturelles, la considération des quantités soustractives, introduite par le premier. Dans le second, l'influence est directement relative au signe du produit ou du quotient, qui se détermine d'après ceux des deux éléments, suivant les règles propres à la combinaison correspondante. Il faut aussi noter la possibilité de faire ainsi coïncider la quatrième formation algébrique avec la troisième, en étendant aux exposants la considération d'abord restreinte aux coefficients. Faute d'une telle extension, la notion de puissance ne pourrait acquérir

l'entière généralité qu'exige sa destination abstraite et concrète. Rapprochés ainsi des produits, les quotients algébriques continuent à s'en distinguer, comme les différences devenues sommes, par le décroissement de la variable dépendante d'après l'accroissement de la variable indépendante. A ces diverses assimilations entre les deux formations de chacun des couples naturels, il faut rapporter l'avénement du couple artificiel qu'il serait impossible d'instituer sans ces généralisations préalables. Nous le voyons ainsi dépendre, non-seulement de celui qui dut immédiatement l'indiquer, mais aussi des deux autres; ce qui confirme sa nature exceptionnelle et la restriction normale des éléments algébriques.

Relativement au second couple de formations, il suffit de rappeler la recommandation générale de distinguer d'après la variable et non par la base, sans quoi le rapprochement arithmétique entre la division et la multiplication y confondrait les deux cas inverses. Il faut, envers le troisième couple, achever de généraliser la notion des puissances, en y concevant les exposants devenus fractionnaires aussi bien que soustractifs. Ces deux extensions successives peuvent s'accomplir d'une manière analogue, en donnant à l'exposant, tel qu'il est arithmétiquement surgi, tantôt la forme d'une différence, tantôt celle d'une fraction. Appréciée directement sous chacun de ces modes, la puissance devient tantôt un quotient, tantôt une racine; ce qui persiste quand l'exposant passe à l'état réellement soustractif ou fractionnaire, en généralisant la relation de ses deux éléments. Sous cet aspect, les deux formations du troisième couple coïncident sans confusion, comme celles des deux premiers, et l'avénement du couple artificiel se trouve entièrement préparé d'après la possibilité de considérer des exposants quelconques.

Mûrie ainsi, l'institution qui compléta les éléments algébriques ne demanda pas d'éminents efforts quand le besoin s'en fit assez

sentir. Une fois que les exposants furent indifféremment additifs ou soustractifs, entiers ou fractionnaires, et même, à la limite, incommensurables, on put leur attribuer la continuité qu'exigeait l'avénement de la formation exponentielle. Rapprochées les unes des autres, les diverses puissances avaient toujours représenté la variation de l'exposant comme exerçant sur le résultat une influence entièrement distincte des relations habituelles. Il suffisait qu'une impulsion spéciale, qui ne pouvait être qu'abstraite, vînt directement fixer l'attention sur ce nouvel élément algébrique. Elle surgit, quand l'extension de la géométrie et de la mécanique l'eut assez exigée, de l'institution arithmétique des logarithmes, qui précéda d'un siècle l'avénement de la formation exponentielle.

Une tendance continue à simplifier les calculs numériques dut naturellement accompagner leur multiplicité croissante d'après les besoins théoriques et pratiques, surtout pour l'astronomie et la navigation. Sous cette impulsion, les logarithmes furent institués, en temps opportun, afin d'abréger toutes les opérations arithmétiques, en construisant une table propre à faire numériquement rentrer chaque couple d'éléments algébriques dans le précédent. Il est vrai que cette construction devait susciter à celui qui l'accomplirait plus d'embarras qu'il n'en aurait jamais éprouvé pour l'exécution directe de ses calculs quelconques. Toutefois, outre la satisfaction de se dévouer, il fut ainsi certain d'obtenir la reconnaissance de la postérité, dont il pouvait indéfiniment épargner le temps et les forces. Elle n'a pas manqué, soit à l'inventeur des logarithmes, soit à l'éminent calculateur qui seul réalisa cette admirable institution : le positivisme les a dignement accouplés dans le calendrier occidental.

La source inaperçue d'une telle conception remonte jusqu'à la numération, qui fait spontanément surgir la remarque fon-

damentale sur la comparaison des deux principales progressions. A l'inspection d'un nombre considérable, surtout quand il est systématiquement écrit, on saisit la correspondance naturelle entre la progression arithmétique du rang des divers chiffres et la progression géométrique de la valeur des unités respectives. Rien n'empêchait de sentir qu'une telle corrélation ne dépend aucunement des bases propres à ces deux progressions, et subsiste quand on les diminue pour rapprocher les termes consécutifs. Guidé par cette habitude, l'inventeur des logarithmes conçut la possibilité, déja pressentie dans un opuscule spécial du plus grand géomètre de l'antiquité, de convertir les multiplications et divisions en additions et soustractions. Elle exigeait que les nombres quelconques fussent directement institués comme les termes d'une progression géométrique à laquelle on ferait toujours correspondre une progression arithmétique dont les termes seraient convenablement évalués une fois pour toutes.

Avec cette institution arithmétique, le septième élément algébrique aurait immédiatement surgi si la culture mathématique eût été systématisée. Rapportés à leurs logarithmes, tous les nombres devenaient des puissances d'une commune base, successivement affectée d'exposants convenables, plus souvent fractionnaires qu'entiers, et non moins soustractifs qu'additifs. Il faut donc regarder une telle institution comme la source arithmétique de l'entière généralisation algébriquement accomplie envers les puissances suivant les modes ci-dessus indiqués. De ce concours, devait spontanément résulter la formation exponentielle, quand le développement du domaine mathématique aurait assez exigé l'introduction d'un nouveau couple algébrique. On ne peut ici s'étonner que de la lenteur d'un tel enfantement, trop expliquée par l'absence de vues générales et de direction philosophique.

Grâce à ce tardif complément, l'institution fondamentale du

calcul des relations se trouve autant déveveloppée qu'elle puisse l'être. Elle n'admet qu'un supplément exceptionnel, dont l'introduction arithmétique, et même algébrique, d'après son origine géométrique, avait spontanément précédé celle du couple artificiel qu'il doit systématiquement suivre. Nées de l'application de l'algèbre au principal problème de la géométrie préliminaire, les formations trigonométriques et circulaires offrent à l'esprit mathématique des ressources qui leur sont propres, et qu'il importe ici de caractériser. On les voit rester purement concrètes jusqu'à ce que l'évolution préparatoire atteignît sa phase finale, et cependant elles avaient longtemps rendu de précieux services, d'où résulta leur incorporation spontanée au domaine algébrique. Une telle anomalie provint de leur aptitude exceptionnelle à comporter des évaluations suffisantes, et même d'importantes transformations, sans avoir reçu l'investiture abstraite qui leur fut tardivement conférée.

On peut regarder ces deux propriétés connexes comme ayant dû leur essor décisif, d'abord au plus grand géomètre de l'antiquité, puis et surtout à son plus grand astronome. Par les travaux du premier sur la rectification du cercle, les tables trigonométriques se trouvèrent spontanément ébauchées. Toutefois, la découverte spéciale du second envers le quadrilatère inscriptible au cercle pouvait seule permettre une suffisante extension du calcul des cordes. Il faut surtout apprécier l'aptitude directe de ce théorème vraiment fondamental à transformer la formation trigonométrique d'après le partage de l'arc qui lui sert de variable indépendante. Mais ce double office ne pouvait assez se développer que quand l'évolution arabe eut complété l'essor grec en instituant des lignes trigonométriques plus convenables et plus variées. Un tel complément permit à la préparation moderne de faire graduellement réagir l'élaboration spéciale de la trigonométrie sur la constitution générale de l'algèbre. Succes-

sivement incorporées au calcul des relations, les formations émanées du cercle y tinrent longtemps lieu du couple artificiel, implicitement compris dans le couple exceptionnel.

Faute de connaître cette liaison, on ne pouvait regarder ce supplément comme assez abstrait; ce qui n'empêchait pas de l'utiliser envers les données, en tant que pleinement évaluable, et même, à quelques égards, pour les inconnues, d'après les transformations qu'il comportait. On doit cependant rapporter son entière incorporation à la constitution algébrique au rapprochement fondamental que l'usage des séries fit spontanément surgir entre le couple exceptionnel et le couple artificiel, pareillement comparés à l'ensemble des couples naturels. Il fut dès lors possible de toujours employer les formations émanées du cercle sans altérer le caractère abstrait des véritables équations, en considérant ces éléments supplémentaires comme équivalant à des combinaisons assignables des divers éléments essentiels.

Rattachées à cette heureuse anomalie, de vicieuses tentatives ont naturellement surgi, sous la dernière phase de l'empirisme académique, pour étendre la mathématique abstraite en empruntant à l'ellipse des relations irrationnellement comparées à celles que fournit le cercle. Il importe de caractériser cette aberration, soit pour les traces qu'elle a longtemps laissées, soit surtout afin de prévenir toute déviation analogue, en faisant mieux ressortir la restriction normale des éléments algébriques. Vues philosophiquement, ces formations *elliptiques* ne peuvent jamais remplir les deux conditions nécessaires d'évaluation et de transformation, qui permirent l'emploi des formations circulaires avant qu'elles devinssent pleinement abstraites. On conçoit la possibilité d'évaluer les cordes de tous les arcs de cercle, parce que ce calcul, accompli pour un rayon quelconque, convient immédiatement à tout autre. Le défaut de similitude entre les

ellipses où le rapport des axes diffère doit toujours empêcher de construire des tables elliptiques vraiment comparables aux tables circulaires. Tous les calculs accomplis à cet égard ne sauraient jamais servir que pour les ellipses dont les axes sont proportionnels à ceux de leur type. A chacune des valeurs, en nombre infini, que comporte le rapport des axes, il faudrait spécialement adapter une nouvelle table ; ce qui fait directement ressortir l'inanité d'un tel projet.

Étendue à d'autres courbes, la même tentative ne cesserait d'être chimérique qu'envers celles qui, comme le cercle, sont toujours semblables entre elles, parce que leur grandeur ne dépend que d'une seule mesure. Spontanément conforme à cette condition, la parabole comporterait des tables vraiment analogues à celles du cercle ; en les construisant pour un paramètre quelconque, elles pourraient immédiatement convenir à tout autre. Il ne faut pas entièrement écarter une telle ressource, quoiqu'elle ne puisse jamais servir qu'envers des cas restés jusqu'à présent hypothétiques. Toutefois, il importe de reconnaître que cette extension des éléments algébriques serait seulement apparente, puisque la loi générale de la rectification parabolique se trouve, depuis longtemps, rapportée aux cinq couples normalement propres au calcul des relations. On pourrait d'ailleurs, d'après cette loi, remplir la condition de transformation autant que celle d'évaluation, en instituant, pour la parabole, un théorème équivalent à celui du quadrilatère inscriptible au cercle.

D'après la liaison, facile à généraliser, entre ces deux conditions, on peut réduire la difficulté d'emprunter aux courbes de nouveaux éléments algébriques à l'obligation d'y découvrir la loi suivant laquelle la corde d'un arc quelconque s'y lie à celles de ses deux parties. Or cette découverte n'est directement possible qu'envers le cercle, et ne peut indirectement s'étendre

qu'aux courbes vraiment rectifiables d'après les formations normalement complétées par celles que le cercle fournit. Nous pouvons ainsi juger combien sont vaines les tentatives et les espérances empiriquement surgies envers l'ellipse, vicieusement rapprochée du cercle.

Telles sont les considérations qui doivent normalement préserver les études mathématiques de la dernière déviation qu'y suscita le régime académique avant qu'il s'éteignît sous la discipline positive. Elles confirment l'irrévocable restriction de la constitution algébrique aux dix éléments spontanément émanés de l'arithmétique et de la géométrie, dès le premier essor de l'esprit mathématique, et continuellement élaborés pendant toute la durée de l'initiation humaine. Mais l'appréciation systématique de l'institution fondamentale du calcul des relations a maintenant besoin d'un double complément, naturellement suscité par les indications principales. Premièrement, il faut généraliser l'extension spéciale des lois algébriques à toutes les hypothèses numériques qui peuvent y surgir envers les variables et même les constantes. Le rapprochement fondamental, résulté des séries, entre le couple exceptionnel et le couple artificiel, n'a pu s'accomplir qu'en attribuant aux quantités correspondantes une généralité de valeur qui répugna longtemps aux géomètres. On l'eût même institué quarante ans plus tôt, d'après l'intégration, si les habitudes empiriques n'avaient pas retardé cette généralisation, suite directe du véritable esprit de l'algèbre. Secondement, il faut compléter l'institution fondamentale du calcul des relations en appréciant l'homogénéité nécessaire à toute subordination mathématique de l'abstrait au concret.

Historiquement appréciée, l'évolution de l'algèbre a plus dépendu de l'arithmétique que de la géométrie, jusqu'au dernier siècle de la préparation humaine. Il était naturel que l'essor propre aux spéculations sur la grandeur indéterminée fût davan-

tage secondé par l'abstraction d'espèce que par celle de valeur, qui resta longtemps incapable de susciter des équations assez variées pour alimenter une telle culture. Voilà comment les habitudes algébriques se trouvèrent spontanément formées sous l'ascendant numériqne, avant que l'influence géométrique pût les régénérer d'après l'impulsion cartésienne. Elles durent ainsi gêner le développement général du calcul des relations, en y suscitant des distinctions et des scrupules directement contraires à son esprit fondamental. Restreinte par l'empirisme académique, l'influence géométrique put difficilement surmonter la répugnance des algébristes à faire systématiquement disparaître la diversité numérique pour généraliser directement les transformations quelconques.

Étendu des variables aux constantes, l'uniforme traitement des quantités algébriques produisit de précieux rapprochements pendant le dernier siècle de l'évolution préliminaire, sous l'impulsion successive du plus fécond et du plus philosophe des grands géomètres. Néanmoins, l'accroissement de l'anarchie académique dans la seconde génération du siècle exceptionnel vint bientôt altérer le salutaire ascendant des deux principaux promoteurs du progrès mathématique. Faute d'une doctrine philosophique, ils n'avaient pu qu'empiriquement saisir la distinction normale entre l'arithmétique et l'algèbre. Après eux, leurs heureux efforts pour que les conceptions algébriques fussent irrévocablement affranchies des scrupules numériques se trouvèrent compromis par des successeurs incapables de les apprécier. Dès lors, une rétrogradation anarchique tendit à faire définitivement confondre l'algèbre avec l'arithmétique, dont elle s'était spontanément dégagée au dix-huitième siècle, sous l'impulsion résultée de la rénovation cartésienne et de son complément leibnitzien. On vit cette dégénération atteindre son principal développement à l'avénement du positivisme, dont la discipline

encyclopédique ne pouvait être mieux motivée que par une déviation directement propre à manifester l'épuisement du régime empirique. Si la religion universelle eût surgi plus tard, la dégradation académique n'aurait pas seulement empêché le vrai progrès de l'esprit mathématique ; elle aurait aussi compromis l'ensemble des acquisitions antérieures, en faisant partout prévaloir des scrupules irrationnels.

Rien ne saurait empêcher, en algèbre, d'admettre, envers les variables, toutes les valeurs que les opérations du calcul peuvent leur procurer, quelque étrange que semblent, sous l'aspect numérique, les combinaisons ainsi formées. On serait autrement forcé d'introduire des distinctions et restrictions de plus en plus multipliées, qui bientôt deviendraient radicalement incompatibles avec l'essor algébrique. Sous l'impulsion philosophique du positivisme, l'arithmétique et l'algèbre se trouvèrent finalement séparées comme constituant l'une le calcul des valeurs, l'autre le calcul des relations ; définition qui se borne à systématiser les meilleurs aperçus de l'empirisme mathématique. A ce point de vue, il devient évident que toutes les quantités doivent être uniformément soumises au calcul algébrique, afin de ne pas troubler l'élaboration de leurs liaisons mutuelles par la vaine considération de leurs états respectifs. Les habitudes spontanément contractées envers les variables se trouvent systématiquement étendues aux constantes, qui doivent finalement comporter autant de généralité numérique, dans une étude où surviennent de fréquents échanges entre ces deux aspects de la grandeur indéterminée.

Mieux apprécié, ce rapprochement algébrique peut être directement formulé d'après la considération de toute constante comme une puissance nulle de chaque variable indépendante. Après avoir admis les exposants soustractifs, l'algèbre se trouve aussi conduite aux exposants nuls, qui comportent la même ori-

gine, d'après un autre cas de la division. Toutes les distinctions ou restrictions numériques qu'on voudrait algébriquement introduire seraient autant contraires à l'esprit du calcul des relations envers les constantes que pour les variables. Elles deviendraient même, sous l'un et l'autre aspect, directement incompatibles avec l'évaluation finale des formules algébriques, où les résultats les plus normaux peuvent souvent provenir des éléments les plus exceptionnels. Remontant jusqu'à l'arithmétique, le premier pas vers la généralisation numérique consiste à combiner les nombres fractionnaires comme les entiers; ce qui doit bientôt s'étendre aux incommensurables. Nous devons algébriquement traiter les valeurs soustractives, nulles, infinies, et même *imaginaires*, pareillement aux autres quelconques, sauf l'examen final des motifs d'admission ou de rejet, qui peuvent, envers les résultats du calcul, également s'appliquer à toutes les hypothèses numériques sur ses éléments. On doit immédiatement étendre à tous les cas possibles, des constantes comme des variables, les transformations d'abord instituées à l'égard d'un seul, malgré les embarras quelconques de leur interprétation directe pour les autres, qui ne peuvent jamais offrir que des énigmes provisoires.

On ne saurait cultiver isolément l'algèbre sans s'exposer à résoudre des équations qui, soit arbitrairement formées, soit inopinément provenues de combinaisons spontanées, se trouvent exceptionnellement dépourvues d'un véritable sens. Relativement à ces anomalies, les transformations algébriques ne doivent subir aucune modification, et toute l'appréciation des diversités se concentre sur les résultats, comme envers le cas normal. Graduellement élaborées, de telles relations finissent par manifester leur nature exceptionnelle; et c'est en cela que consiste leur *résolution*, qui ne peut jamais exiger de nouvelles règles quand la composition algébrique reste la même. Un état

spécial des équations finales, où chaque membre est identiquement nul, doit ainsi caractériser l'insignifiance et l'indétermination, pareillement annoncées en évaluant les inconnues d'aprés des fractions dont les deux termes sont nuls. Etendue à l'anomalie opposée, la résolution conduit à constater la contradiction et l'impossibilité par l'avénement d'équations où l'un des membres s'annule seul, et de valeurs, tantôt infinies, tantôt imaginaires, suivant que le cas est précis ou vague.

Subordonnées au choix de l'unité concrète, les quantités constantes et variables que renferme une relation algébrique doivent pouvoir y subir des changements simultanés qui n'altéreront pas sa signification géométrique ou mécanique, toujours indépendante d'un tel choix. Une seule exception concerne les nombres, souvent indéterminés, qui, désignant les rapport mútuels des grandeurs considérées, restent immuables quand leur commune unité varie. A cela près, toutes les quantités introduites doivent pouvoir proportionnellement changer sans que l'équation en soit aucunement troublée. Voilà d'où résulte la loi d'*homogénéité* proprement dite envers les équations les plus usuelles, où cette condition oblige tous les termes à présenter le même *degré*, pouvu qu'il y soit toujours estimé suivant les règles qui conviennent à chaque mode. Elle doit également s'appliquer à des équations quelconques, sans qu'il faille d'avance spécifier la forme qu'elle y peut successivement revêtir.

A l'égard des relations, géométriques et mécaniques, où coexistent des unités hétérogènes, la loi d'homogénéité subsiste d'après le même motif, autant valide pour plusieurs unités qu'envers une seule. Cette extension exige une distinction générale entre l'indépendance et la dépendance mutuelles des différentes unitès simultanées. On peut traiter le premier cas comme celui d'une seule unité ; l'homogénéité devient alors plus féconde en vérifications, l'équation devant y résister au chan-

gement isolée de chaque classe de quantités, et même à la variation collective de plusieurs classes ou de toutes. Relativement au second cas, la loi fondamentale se modifie conformément à la subordination mutuelle des unités correspondantes, d'où résultent des distinctions abstraites entre les diverses classes concrètes. Dans toutes les circonstances, l'homogénéité permet d'instituer, d'après des règles exactement appréciables, de précieuses vérifications envers les équations quelconques, quoique la simplification des notations conduise souvent les algébristes à ne pas s'y conformer pour les calculs préparatoires. Elle peut être finalement rétablie en modifiant convenablement chaque formule, ce qui revient, concrètement, à cesser de choisir l'unité parmi les grandeurs en relation. Sous l'impulsion systématique du positivisme, cette loi, qui n'avait jamais été que confusément aperçue envers ses moindres cas, se trouve directement expliquée dans toute son extension nécessaire, pour guider partout la subordination mathématique de l'abstrait au concret.

Après avoir assez établi l'institution fondamentale du calcul des relations et ses compléments généraux, il faut consacrer le dernier tiers de ce chapitre à la coordination spéciale des seize leçons d'algèbre que le plan total de l'instruction encyclopédique place avant la géométrie. Guidée par la marche suivie envers l'arithmétique, cette étude doit pareillement consacrer sept leçons philosophiques aux deux ordres de considérations propres aux deux premières parties du présent chapitre. Elle caractérise d'abord, en trois leçons, le matérialisme abstrait, le langage algébrique, et la division totale du calcul des relations ; puis, en quatre leçons, elle apprécie l'ensemble de son institution fondamentale, les principales formations, la généralisation algébrique, et la loi d'homogénéité. Coordination spéciale.

D'après cette préparation, commune à tous les modes algébriques, l'étude spéciale de l'algèbre isolée se trouve réduite à

neuf leçons, dont la dernière doit être réservée au résumé qu'exige chacun des sept degrés de l'enseignement logique. Élaborant, dans la première, les équations les plus simples, on y caractérise successivement leur résolution directe envers une seule inconnue, et l'élimination qui ramène à ce cas celui de la pluralité. La première explication doit soigneusement apprécier l'enchaînement normal des trois opérations qui constituent ce premier degré du calcul algébrique, d'abord la transposition, puis la composition, enfin le dégagement. Il faut que les jeunes disciples de l'Humanité soient habitués à regarder ce pas initial comme fournissant un type décisif de la logique abstraite. Néanmoins, la même leçon doit ensuite attirer leur attention sur la philosophie de l'*élimination*, où l'on remplace une des inconnues par sa formule d'après les autres, éliminer étant toujours réductible à résoudre.

Une constante prépondérance de ce mode fondamental, seul pleinement général et seul vraiment usuel, ne doit pas empêcher la leçon initiale du calcul algébrique de faire convenablement apprécier les deux modes accessoires qui peuvent y suppléer envers le premier degré. Tous deux concourent, dans la partie supérieure de l'algèbre directe, à constituer, en se généralisant, un mode d'élimination strictement applicable aux équations d'un degré quelconque. Il faut surtout remarquer le second, où l'on élimine en combinant les deux équations après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur indéterminé, qu'on choisit ensuite de manière à rendre nul le coefficient total de l'inconnue à chasser.

L'élimination n'est jamais directe qu'entre deux équations et pour une seule des inconnues, quel que soit le nombre des unes et des autres. Elle peut ainsi suffire envers tous les cas, en ramenant chaque groupe d'équations et d'inconnues au groupe immédiatement plus simple, d'après une convenable répétition

de l'acte fondamental, suivant la loi des nombres triangulaires. Cet aperçu permet d'apprécier la complication croissante de tels calculs, et surtout celle des formules finales, où le nombre des termes de leur numérateur spécial ou de leur dénominateur général équivaut à celui des permutations des équations ou des inconnues. Tout cela suscite, dès le début de l'algèbre, une réflexion philosophique sur l'inextricable développement des combinaisons logiques, même quand elles se composent des éléments les plus simples, s'ils se multiplient beaucoup. Une telle appréciation peut déjà conduire à faire convenablement sentir le besoin de régler une ardeur empirique de rationnalité, pour substituer souvent l'induction à la déduction, en aspirant à simplifier davantage, sauf à moins lier. Rapidement caractérisée, cette complication des formules générales du premier degré dispense de les retenir et motive leur désuétude. Après le cas de deux inconnues, il est toujours préférable de reproduire spécialement les éliminations convenables, au lieu de les éviter en appliquant ces lois.

Telles sont les notions propres à la leçon initiale qui caractérise l'esprit fondamental de l'algèbre en expliquant ses procédés les plus usuels, où les équations se montrent déjà supérieures aux proportions, même envers une seule inconnue. Rapprochée des habitudes didactiques que l'empirisme académique avait suscitées, cette condensation de l'enseignement algébrique semble d'abord impraticable. Il faut pourtant reconnaître qu'elle est notablement inférieure à celle qu'exigeront les trois dernières années de l'initiation encyclopédique envers les notions plus compliquées de la biologie, de la sociologie et de la morale. Nous ne devons pas traiter les jeunes disciples de l'Humanité comme ceux chez lesquels le pédantisme académique étouffait, de bonne heure, toute aptitude synthétique. A leur préparation normale, d'abord affective, puis esthétique, enfin

philosophique, l'étude rationnelle de l'arithmétique a déjà joint des habitudes qui leur permettent de recevoir convenablement une instruction aussi contractée envers l'algèbre.

On consacre les deux leçons suivantes à compléter la première phase algébrique, en y mettant la transformation des formules au niveau de celle des équations. Voilà comment la seconde leçon d'algèbre concerne les règles successivement relatives à l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division des formations composées des trois couples naturels. A la troisième leçon appartient l'explication de la loi binomiale et son application à l'extraction des racines quelconques, d'abord numériques puis algébriques; en écartant le prétendu calcul des radicaux d'après un judicieux usage des exposants fractionnaires.

Sous le régime académique, l'étude de ces diverses transformations se trouvait hérissée de difficultés métaphysiques qui concouraient avec les habitudes empiriques à rendre toujours impossible une telle condensation. On doit pourtant reconnaître que ces opérations algébriques sont moins compliquées, surtout envers la division, que celles qui leur correspondent en arithmétique, où leur véritable esprit est déjà devenu spontanément familier. Une seule difficulté leur reste vraiment propre, en ce qui concerne les signes *plus* et *moins*, à l'égard desquels l'arithmétique n'a pu rien préparer, les différents termes s'y trouvant uniformément ajoutés. Ce nouvel embarras se réduit pourtant à la soustraction, seule source des modifications du signe dans la multiplication, et par suite envers la division. Il est dès lors aisé d'apprécier la nécessité de changer les signes quand on retranche comme aussi naturelle que le besoin de les maintenir lorsqu'on ajoute.

Bien examinées par un esprit philosophique, les habitudes spontanées de notre intelligence disposent à suivre ces lois lo-

giques indépendamment de toute culture scientifique. Étudié dans la seconde enfance, où l'exercice de la contemplation abstraite a déjà suscité quelques méditations générales, l'instinct mathématique entraîne souvent à compter en moins autant qu'en plus pour diminuer les nombres, surtout quant au temps. Il se trouve alors conduit à la pratique spontanée des règles algébriques envers l'addition et la soustraction des binomes quelconques, sans que leur institution coûte le moindre effort aux intelligences ordinaires, quoiqu'elles ne pussent pas la formuler. Nous pouvons ainsi reconnaître que les nuages empiriquement surgis à cet égard furent purement factices, et toujours dus au vicieux esprit qui dirigea les études scientifiques, ou plutôt à leur défaut de discipline philosophique. Gêné d'abord, puis dévié, sous la domination métaphysique, l'instinct mathématique, devenu moins rationnel chez les hommes mûrs que parmi les enfants, trouvait des mystères artificiels dans ses opérations les plus naturelles.

Rien ne peut mieux caractériser cette dégénération que l'étrangeté des explications surgies envers l'extension de la règle des signes aux quantités isolées. A cet égard, la confusion, anarchique et rétrograde, entre le point de vue algébrique et le point de vue arithmétique, suscita des difficultés qui subsistèrent jusqu'à l'avénement du positivisme. Il fit directement sentir l'irrationalité d'un langage et d'une théorie qui traitaient de simples liens de syntaxe comme les vrais objets de la spéculation algébrique. La règle des signes fut directement réduite aux combinaisons, qui, toujours sous-entendues envers les quantités isolées, peuvent, réciproquement, produire sans cesse l'isolement en faisant des hypothèses convenables, dont l'exclusion interdirait toute généralité. Sous l'impulsion résultée de la distinction normale entre l'arithmétique et l'algèbre, l'entière extension de cette règle aux formules quelconques, tant monomes

que polynomes, devient une obligation prescrite par l'esprit fondamental du calcul des relations.

Il faut ainsi reconnaître que les jeunes disciples de l'Humanité se trouvent spontanément préservés des difficultés, empiriques et métaphysiques, qui seules empêchaient leurs prédécesseurs d'embrasser, en une seule leçon, les quatre opérations initiales de l'algèbre. Sous une judicieuse direction, le choix des exemples doit déjà les familiariser avec les théorèmes accessoires sur les seconde et troisième puissances des binomes, le produit de deux binomes inverses, et la divisibilité citée au début de ce chapitre. On peut même terminer la seconde leçon d'algèbre en indiquant, comme complément de la division, la théorie algébrique du plus grand diviseur commun, dont l'analogie avec sa théorie arithmétique permet une exposition rapide mais suffisante. La portée ultérieure de cette doctrine dans la partie supérieure du calcul des relations directes oblige à l'instituer dès le début de l'enseignement algébrique. A cet égard, on ne saurait éprouver aucune grave difficulté, sans dépasser le temps normal, si l'on a soigneusement écarté les puérilités accumulées par le pédantisme académique.

Tous les embarras qui pouvaient ralentir l'étude directe de la loi binomiale, principal objet de la troisième leçon, se trouvent naturellement évités d'après l'établissement de la formule des combinaisons au début normal de l'arithmétique. A l'aide d'un tel préambule, on peut directement apprécier le type logique résulté de la régénération didactique de cette loi par le seul des grands géomètres qui n'ait pas dédaigné de coopérer à l'élaboration philosophique des rudiments mathématiques. Même les pédants les moins capables d'apprécier l'ensemble de son intervention classique ont spécialement respecté la lucide rationnalité qu'il avait développée envers ce précieux théorème, mal instituée jusqu'à lui. Bien étudiée, cette explication consiste à

déduire la loi des puissances quelconques d'un binome de celle qui concerne le produit d'une suite indéterminée de binomes dont le premier terme est seul commun. On doit motiver une telle marche d'après le besoin d'instituer une loi plus générale, directement destinée à d'autres usages, sans alléguer l'impossibilité d'une induction spéciale, qui fit historiquement surgir le théorème binomial. Un examen immédiat de cette multiplication fait aussitôt reconnaître que le coefficient algébrique de chaque puissance de la variable est la somme des combinaisons inverses des constantes considérées. Rien n'empêche alors de transformer ce développement en celui d'une puissance quelconque, si l'on suppose toutes ces constantes devenues égales à l'une d'elles, dont les divers coefficients numériques émaneront de la formule des combinaisons.

On peut les ramener à ne dépendre que de la formule des permutations, en leur donnant pour numérateur commun le nombre de permutations correspondant à l'exposant du binome, comme dans le premier état de la loi des combinaisons. Cette transformation rend leurs dénominateurs respectifs toujours égaux aux produits des nombres de permutations des exposants corrélatifs des deux parties. Elle suscite le mode le plus propre à manifester la loi des puissances d'un polynome quelconque, graduellement réduit au binome par des contractions provisoires. A l'aide du numérateur commun, on voit chaque puissance de chacune des constantes acquérir un dénominateur égal au nombre de permutations de son exposant, ce qui représente le terme général du développement comme le produit des facteurs ainsi formés envers toutes par la répartition du degré. Notre résolution préalable du problème des répartitions permet de compléter cette loi d'après la formule destinée à faire directement connaître le nombre total des termes d'un tel développement.

Nous sommes ici dispensés de toute explication spéciale envers l'extension nécessaire de la loi binomiale et de ses conséquences à des puissances quelconques. Après l'examen philosophique ci-dessus accompli pour instituer la généralisation algébrique, il serait, non seulement superflu, mais vicieux, d'insister maintenant sur les vérifications propres à ce cas. Tout exposant pouvant, à notre gré, prendre la forme fractionnaire, soustractive, et même imaginaire, le théorème binomial deviendrait insuffisant s'il n'était immédiatement applicable à des exposants quelconques. Il faut, à cet égard, noter combien l'empirisme académique avait altéré les meilleurs géomètres du dix-huitième siècle, qui s'épuisèrent à chercher de prétendues démonstrations envers une telle extension, sans y pouvoir jamais aboutir qu'à transformer la difficulté. Fondés sur un instinct mieux conservé, ceux du dix-septième siècle l'avaient spontanément admise, à mesure que le perfectionnement des formations algébriques instituait de nouvelles classes d'exposants.

Subordonnée à la loi binomiale, l'extraction des racines quelconques ne peut susciter, envers les nombres, aucune difficulté théorique, pour généraliser les habitudes contractées, en arithmétique, dans le cas, seul vraiment usuel, des racines carrées. A cet égard, la complication, bientôt inextricable, des opérations uniformes fait spontanément aspirer aux simplifications normalement émanées de l'institution des logarithmes. Vues convenablement, les racines algébriques rentrent mieux que les numériques sous la compétence directe de la loi binomiale, suivant un contraste déjà sensible envers la division. Elles comportent, comme celle-ci, l'exécution complète des opérations malgré l'indétermination totale des coefficients d'une formation composée de puissances déterminées. Rien n'empêche donc d'utiliser, en l'un et l'autre cas, cette faculté naturelle pour assigner les relations qu'ils doivent avoir afin que ce polynome

devienne une puissance parfaite ou comporte une exacte divisibilité.

Complément naturel de la première phase algébrique, le calcul indéterminé du premier degré caractérise, dans la quatrième leçon de l'algèbre isolée, les questions où le point de vue arithmétique se combine avec le point de vue algébrique. A titre de type spécial, spontanément modifiable suivant les différents cas, il faut indiquer les payements accomplis en mêlant des monnaies de diverses valeurs. Pour de telles destinations, on doit résoudre un nombre d'équations inférieur à celui des inconnues, en déterminant le problème d'après l'obligation de n'admettre que des résultats entiers, et même additifs d'ordinaire, quoiqu'ils puissent quelquefois devenir soustractifs. Une telle recherche offre divers degrés d'indétermination, mesurés par l'excès du nombre des inconnues sur celui des équations, et chacun d'eux comporte plusieurs modes suivant la multiplicité des relations. Tous ces cas peuvent et doivent être normalement réduits au plus simple d'entre eux, où l'on ne considère qu'une équation entre deux inconnues.

Habituellement entiers, comme le second membre, ou facilement rendus tels, leurs coefficients doivent d'abord perdre tout facteur commun, qui, s'il ne divisait pas le terme constant, annoncerait l'impossibilité d'une pareille question. Alors, en réunisssant, au terme affecté du plus petit coefficient, son plus grand multiple contenu dans l'autre, on peut diminuer les coefficients à l'aide d'une inconnue auxiliaire, liée aux précédentes par une formule entière. Cette transformation, convenablement réitérée, suffit pour que le moindre coefficient soit graduellement réduit à l'unité, d'après une suite de divisions analogue à la recherche du plus grand diviseur commun, et susceptible des mêmes abréviations quant aux restes. Éliminant ensuite les diverses inconnues introduites, sauf la dernière, on rapporte fi-

nalement à celle-ci les deux primitives, par des formules toujours constituées de façon à leur procurer des valeurs entières, quelque valeur entière qu'on attribue à leur lien. Réciproquement, l'élimination de ce lien entre les deux formules reproduirait l'équation proposée, ainsi remplacée par l'ensemble de deux autres où l'un des coefficients est l'unité, parmi tous les couples qui pourraient correspondre au même cas.

A l'inspection de ces formules, qui ne peuvent être pleinement spécifiées qu'envers des exemples particuliers, on reconnaît que les deux coefficients primitifs s'y trouvent inversement appliqués au lien final. Mieux appréciée, cette remarque représente les solutions entières d'une équation du premier degré comme formant des progressions arithmétiques dont les bases sont, envers chaque inconnue, le coefficient de l'autre. Il est facile d'instituer déductivement cette loi d'abord inductive, en remplaçant le second membre par son équivalent d'après l'une quelconque de ces solutions hypothétiquement substituée aux inconnues. Elle peut souvent dispenser des opérations normales, quand les coefficients permettent de trouver, par tâtonnement, une seule solution, d'où toutes les autres pourront ainsi dériver. Sous cette impulsion, on est conduit à construire autrement les formules cherchées, d'après la principale propriété des fractions continues, heureusement introduites, au dix-septième siècle, pour perfectionnner les transformations numériques.

Representé de cette manière, le rapport du plus petit coefficient au plus grand fait naître un développement capable de fournir une solution entière de l'équation proposée, dont le second membre doit multiplier les termes de l'avant dernière évaluation. Étudiée comparativement à l'autre, cette méthode offre d'abord une suite équivalente d'opérations numériques, mais elle évite ensuite les opérations algébriques pour l'introduction et l'élimination des inconnues intermédiaires. Non moins

facile à pratiquer qu'à découvrir, la loi qui règne entre les évaluations successives d'une fraction continue suscite des calculs plus simples que ceux de cette double élaboration. A tous égards, la seconde méthode est donc supérieure à la première pour l'exécution, quoiqu'elle lui soit inférieure en rationalité d'institution ayant d'ailleurs été, par cela même, imaginée postérieurement. Son explication fournit l'occasion de faire sommairement apprécier ce mémorable développement fractionnaire, alternativement trop grand et trop petit, mais toujours conduisant aux moindres termes, avec des différences ayant l'unité pour numérateur constant. Ce mode peut aussi représenter les valeurs incommensurables, tant géométriques qu'arithmétiques, à l'aide d'une suite indéfinie, qui permit à l'inventeur d'exprimer le rapport de la circonférence au diamètre sous la meilleure forme qu'il comporte. Il faut spécialement remarquer, envers les racines carrées, la périodicité, plus ou moins complexe, qu'y finit par acquérir un tel développement.

Il importe peu de quelle manière on obtienne les formules des solutions entières dans le cas fondamental quand on veut successivement y ramener tous les autres modes du premier degré d'indétermination. Mesurée par le nombre d'équations, leur complication détermine celle du calcul correspondant, qui demande autant d'applications successives de la méthode commune. Pour instituer cette réduction envers trois inconnues, il faut confondre le terme affecté de l'une avec le second membre de l'une des équations, et formuler les deux autres inconnues par rapport à celle-là, d'après leur lieu commun. A l'aide de ces formules, substituées dans l'autre équation, celle-ci se trouve effectivement réduite à deux inconnues, et comporte l'application directe de la méthode, qui fera définitivement obtenir l'expression entière des trois inconnues proposées. Rien n'empêche d'instituer ainsi la réduction de chaque groupe d'é-

quations au précédent, de manière à pouvoir toujours formuler les solution entières, mais avec une complication bientôt inextricable.

Toute indétermination plus grande devient aussi réductible à la méthode élémentaire, en fondant avec le membre constant les termes affectés des inconnues qui doivent rester alors arbitraires. Il suffit de remarquer, envers une seule équation, que le second membre n'a pas besoin d'être numériquement assigné pour rendre pleinement exécutable la suite des opérations propres à chacun des deux modes que comporte cette méthode. Graduellement combinée avec les indications précédentes sur la pluralité des équations, cette considération conduit à reconnaître la complète suffisance du calcul ainsi conçu, pourvu que les coefficients des inconnues à formuler soient tous particularisés. Élaborées de cette manière, les équations proposées pourront toujours se remplacer par d'autres ayant l'unité pour moindre coefficient, et capables de les reproduire en éliminant les inconnues finalement demeurées arbitraires. Successivement compliqué, le problème indiqué comme type de ces questions exceptionnelles peut également offrir tous les cas, en proposant le payement simultané de plusieurs sommes avec un nombre quelconque de monnaies différentes.

Étudié convenablement, ce domaine accessoire permet d'apprécier la restriction nécessaire du calcul humain, tant arithmétique qu'algébrique, même envers des recherches qui semblent d'abord offrir une grande simplicité. Tous les efforts tentés pour les équations du second degré n'ont jamais produit, à leur égard, l'équivalent de la méthode propre à celles du premier. A cette occasion, les jeunes disciples de l'Humanité peuvent spécialement sentir combien notre aptitude à former des questions surpasse nos moyens de les résoudre. D'après cette conviction, on reconnaît l'importance, intellectuelle et sociale, de

la subordination continue des efforts théoriques à l'ensemble de nos vrais besoins, représenté par la religion universelle. Il convient de terminer la quatrième leçon d'algèbre en faisant ainsi ressortir la nécessité d'écarter les spéculations oiseuses quoique réelles, afin de concentrer notre faible entendement sur les recherches utiles, au-dessous desquelles il doit souvent rester.

Dans la cinquième leçon, le calcul des relations fait un pas notable en résolvant les équations du second degré, mais seulement envers une inconnue. On pourrait rarement aborder les autres cas, d'après une application convenable de la conception générale qui ramène la difficulté d'éliminer à celle de résoudre. Le succès que le premier degré comporte envers un nombre quelconque d'équations simultanées avec autant d'inconnues n'est dû qu'à l'exception qu'il offre à l'égard de l'équation finalement résultée des éliminations successives. Elle atteint, en général, le degré marqué par le produit de ceux des équations primitives, dont la résolution ne peut donc être entièrement accomplie que dans le cas le plus simple. Rien n'empêcherait pourtant de résoudre aussi celles du second degré, pourvu qu'elles fussent seulement au nombre de deux, puisqu'on peut strictement résoudre les équations uniques du quatrième degré, quoique les formules devinssent finalement inextricables.

Écartant des aspirations incompatibles avec notre faiblesse théorique, la discipline positive réduit la seconde phase algébrique au cas d'une seule inconnue, déjà traité dans le dernier siècle de l'évolution grecque, et bientôt complété par l'élaboration arabe. Ce pas doit normalement rester aussi mémorable dogmatiquement qu'historiquement, puisqu'il introduit deux notions générales, l'une de méthode et l'autre de doctrine, qui ne pouvaient surgir auparavant. Une opération arithmétique suffit pour évaluer l'inconnue quand la première puissance ne se trouve pas mêlée à la seconde. On n'a besoin, dans ce cas,

que des trois transformations successives qui suffisent envers le premier degré. Si l'équation est complète, cette élaboration devient seulement préparatoire, et la résolution exige un nouvel artifice, pour ramener le type trinome à la forme binome.

La réduction comporte deux modes, historiquement séparés par treize siècles, et dont le dernier doit être dogmatiquement préféré, sans faire oublier le premier. A tous deux, le second degré fournit le seul cas susceptible d'un plein succès, leur application devenant ailleurs préparatoire; ce qui vérifie combien l'algèbre épuise ses ressources plus rapidement qu'elle ne les institue. Mais le dernier artifice comporte une généralisation supérieure, qui, jamais capable de surmonter les difficultés principales, peut partout perfectionner les moyens de transformation. Pour instituer le premier, il suffit de regarder le membre qui contient l'inconnue comme formant les deux premières parties du carré d'un binome déterminé, dont le terme constant y suscite un complément analogue. On peut ainsi ramener l'équation au cas spontané, d'après la seule adjonction de ce supplément à ses deux membres, dont la racine carrée fait aussitôt surgir la formule cherchée.

Il convient de rappeler que le second mode d'une telle réduction émana du grand géomètre qui prépara la fondation cartésienne de la philosophie mathématique. Méditant sur la résolution générale des équations, il conçut la possibilité d'y diminuer à volonté l'inconnue, en lui substituant un binome convenablement formé. Par l'accomplissement de cette transformation envers un décroissement indéterminé, les coefficients se trouvent compliqués d'une constante arbitraire, dont on dispose pour changer à son gré l'un quelconque d'entre eux. Elle peut donc être choisie de manière à faire entièrement disparaître l'une des puissances secondaires de l'inconnue, en annulant son coefficient total, d'après une équation auxiliaire d'un

degré toujours égal au complément de l'exposant considéré. Telle est la conception générale qui, spécialement appliquée aux équations trinomes du second degré, suffit pour les rendre binomes, en déterminant la constante arbitraire par une équation du premier degré seulement. Une pareille transformation constitua le meilleur germe de la méthode des indéterminées, dont la logique abstraite fut bientôt pourvue par le fondateur de la philosophie mathématique. Soumises à cette méthode, les questions sur la divisibilité des polynomes et les conditions d'une puissance parfaite peuvent être aussi traitées en représentant le quotient ou la racine par un polynome à coefficients indéterminés, qu'on règle en développant la comparaison.

Convenablement envisagée, toute formation du second degré peut ainsi s'assimiler au produit de deux binomes du premier degré, dont les seconds termes, restés d'abord arbitraires, seraient choisis de manière à permettre une identification qui ne suscite que deux conditions. On voit là surgir l'explication de la duplicité de valeur attribuée à l'inconnue par l'un quelconque des deux modes propres à la résolution des équations du second degré. Nous avions déjà constaté, d'après le calcul indéterminé du premier degré, qu'une question définie peut admettre plusieurs réponses, et quelquefois une infinité. Sous l'impulsion résultée du concours entre la résolution et l'institution des équations du second degré, cette notion prend un nouveau caractère en s'étendant aux relations qui ne renferment qu'une seule inconnue. Toutefois, elle ne devient pleinement rationnelle qu'envers les équations insolubles, où l'on voit, d'après une semblable décomposition en facteurs élémentaires, que le nombre des *racines* doit toujours équivaloir au degré correspondant.

A l'inspection de la formule du second degré, les deux coefficients se montrent aussitôt liés aux deux racines, l'un par ad-

dition, l'autre par multiplication. L'explication de ces deux lois surgit de l'institution de l'équation du second degré d'après celles du premier dont elle est le produit. Toutefois, la manière la plus directe de découvrir ces relations consiste à rendre les deux coefficients capables de procurer à l'équation deux racines données. Résolvant les deux équations du premier degré que fait aussitôt naître un tel problème, on trouve l'expression des coefficients d'après les racines, sans avoir d'avance aucune suggestion à cet égard. Il faut regarder ce mode, indépendant de la forme de l'équation, et graduellement applicable aux degrés supérieurs, comme ayant conduit le précurseur cartésien à découvrir, par induction, les relations générales entre les coefficients et les racines.

Toutes les notions essentielles de l'algèbre directe doivent être normalement rattachées à cette seconde phase, où finit son domaine pleinement usuel. Il y faut spécialement rapporter l'avénement des racines qualifiées d'*imaginaires*, qui, d'abord acceptées comme symptôme d'impossibilité numérique, permettent ensuite de généraliser les transformations algébriques, en y supprimant toute distinction de valeur. Pour compléter la réaction générale de cette seconde phase, on doit y voir la source de la notion universelle qui, dans la comparaison des divers modes d'un même problème, sépare le cas d'imaginarité du cas de réalité par le cas d'égalité de deux racines conjointes. On voit ainsi surgir la liaison normale entre la résolution des équations et la détermination de l'état maximum ou minimum, en le rattachant à la manière de procurer une valeur donnée à la formation correspondante. Successivement augmentée ou diminuée, cette valeur atteint sa limite quand les deux racines comparées deviennent égales, ce que peut toujours caractériser la formule qui résout l'équation.

Fondée sur la résolution des équations du second degré, celle

du troisième s'y ramène en modifiant le dernier artifice apprécié ci-dessus. On doit d'abord l'appliquer à ce nouveau cas de la même manière qu'au précédent, en disposant de la constante arbitraire pour faire entièrement disparaître la plus haute des puissances secondaires de l'inconnue finale. Rapprochée du succès antérieur, la présente efficacité de cette transformation n'est aucunement équivalente; elle se borne à préparer la résolution, sans y dispenser d'un procédé spécial. Mais il devient ainsi susceptible d'institution en généralisant cette conception, de manière à décomposer l'inconnue en deux parties qu'on s'efforce de déterminer par des équations plus simples que la proposée. A l'inspection du développement correspondant, on saisit un partage où les cubes des deux éléments auxiliaires deviennent, d'après leur somme et leur produit, les racines d'une équation finale du second degré, dont les coefficients sont respectivement déduits de ceux de la primitive.

Rapprochée de la phase algébrique propre à la cinquième leçon, celle qu'accomplit ainsi la sixième offre une complication supérieure à ce qu'indique la formule obtenue. Un examen direct de sa composition fait bientôt reconnaître qu'elle deviendrait habituellement impraticable envers les équations où le second terme n'a pas spontanément disparu, puisque sa suppression artificielle y surchargerait les coefficients définitifs. Il est aisé de sentir ainsi que cette troisième phase normale de l'algèbre directe en constitue réellement la limite naturelle, sauf le prolongement, plus apparent qu'effectif, envers le quatrième degré. Nous voyons d'ailleurs que la résolution s'y trouve essentiellement bornée au cas d'une seule inconnue; car deux équations simultanées du troisième degré doivent ordinairement produire une équation isolée du neuvième, qui ne deviendrait accessible qu'exceptionnellement. Étendue même au cas où l'une des équations proposées serait seulement du second de-

gré, cette impuissance vérifie combien est irrationnelle la prétention de remplacer toujours l'induction par la déduction.

A titre de complément naturel des notions réellement accessibles sur la résolution algébrique des équations, le troisième degré mérite que la sixième leçon d'algèbre isolée lui soit essentiellement consacrée, quoique ce cas ait réellement émané de la géométrie. Une discussion spéciale de la formule usuelle y fait utilement étendre les remarques surgies du second degré, quant à la pluralité des racines, à la conjugaison des imaginaires, et même à la séparation des deux cas habituels par le cas exceptionnel d'égalité. Toutefois, l'origine géométrique des équations du troisième degré peut seule y fournir la résolution vraiment satisfaisante du cas le plus intéressant, justement qualifié d'*irréductible* sous l'aspect purement abstrait, quoique la formule y persiste algébriquement. On ne saurait numériquement évaluer les trois racines, quand elles sont toutes réelles, qu'en regardant l'équation proposée comme exprimant la trisection trigonométrique d'un angle toujours assignable. Rapprochés de leurs successeurs quelconques, les premiers promoteurs de l'algèbre moderne avaient spontanément institué le meilleur mode que comporte le cas principal du troisième degré.

Complément normal de la troisième phase algébrique, la résolution des équations du quatrième degré termine cette sixième leçon en se ramenant aux degrés précédents d'après deux modes équivalents de décomposition binaire. Un commun préambule y consiste à faire entièrement disparaître la plus élevée des puissances secondaires de l'inconnue, de la même manière qu'envers les équations antérieures. Le premier mode se réduit alors à généraliser l'artifice initial du second degré par l'addition aux deux membres d'un binome contenant une constante arbitraire, capable de rendre l'un d'eux un carré parfait en laissant l'autre tel. Toujours cette indéterminée se règle, d'après cette condition,

en résolvant une équation auxiliaire du troisième degré, dont la formule permettrait d'instituer les deux facteurs du second degré de l'équation proposée, si ces calculs étaient ordinairement praticables. Il faut regarder l'autre mode comme rationnellement supérieur à celui-là, sans être plus exécutable, parce qu'il repose sur une institution plus directe et plus générale de la même décomposition, d'après un heureux emploi des coefficients indéterminés. Visant, par la division, à rendre la formation du second degré facteur de celle du quatrième, on trouve, envers chacun de ces coefficients, une équation du sixième degré, vu le nombre de tels diviseurs ; mais elle est toujours réductible au troisième. Elle s'y ramène en y cherchant, pour l'un, le carré de deux racines égales au signe près, et quant à l'autre, la somme des deux dont le produit doit équivaloir au terme tout connu de l'équation proposée.

Telles sont les trois phases essentielles de l'algèbre isolée et directe, respectivement instituées par l'antiquité, le moyen âge, et la préparation moderne. Une comparaison générale montre que la première est seule normalement complète, sauf la complication des formules relatives à la pluralité des inconnues. Réunie à ses deux appendices naturels, envers la transformation algébrique et le calcul indéterminé, son développement exige quatre leçons, tandis que deux suffisent envers le reste de cette évolution. Nous pourrions, en combinant de plus en plus ces trois phases, instituer, dans les degrés supérieurs, beaucoup d'équations spéculativement susceptibles d'une vraie résolution, par la substitution successive des formules toujours adaptées aux degrés déjà résolus. On doit finalement regarder un tel progrès comme oiseux et même illusoire, puisque ce succès, moins réel qu'apparent, ne saurait d'ailleurs concerner que des équations de plus en plus exceptionnelles, vu l'excès croissant de leur degré sur le nombre de leurs constantes.

Inaccessibles à tous les efforts des géomètres depuis trois siècles, l'équation générale du cinquième degré pose la limite infranchissable des moyens normaux de la déduction algébrique. Mais une saine appréciation de la complication nécessaire des formules suivantes doit finalement disposer à peu regretter cette faible portée de l'entendement humain dans le plus simple des domaines abstraits. A la pluralité normale des racines correspond l'obligation que la formule de chaque degré contienne des radicaux de l'espèce correspondante, puisque les autres éléments algébriques n'admettent qu'une seule valeur. Graduellement obligée d'embrasser aussi chacun des degrés précédents, cette formule doit donc contenir, sous ses radicaux propres, tous ceux d'un moindre indice. On vérifie ces prévisions générales en comparant les trois premiers degrés, dont la combinaison est déjà devenue inextricable envers le quatrième, ce qui fait assez sentir que la formule du cinquième degré resterait toujours inutile.

On doit compléter le cours normal d'algèbre isolée en y consacrant la septième leçon à la théorie des progressions géométriques, suivie de l'appréciation connexe de l'institution logarithmique et du calcul exponentiel, et la huitième aux deux séries propres à ce double type. Nous aurons ainsi compris, dans l'étude qui prépare la géométrie, toute la partie vraiment usuelle du calcul des relations directes. D'après la réaction algébrique de la géométrie cartésienne, ce domaine a subi des extensions générales, qui doivent toujours conserver beaucoup d'importance logique, quoiqu'elles ne puissent jamais acquérir une grande efficacité scientifique. Elles sont essentiellement relatives à la résolution *numérique* des équations quelconques, qui se trouve forcée de mêler le point de vue algébrique et le point de vue arithmétique, faute de savoir les séparer. Son étude normale repose sur la théorie générale de la composition

et de la transformation des équations de tous les degrés, qui constitue un type de logique abstraite plus précieux que les notions spéciales qu'il suscite ou systématise.

Guidés par l'étude des progressions arithmétiques, les jeunes disciples de l'Humanité ne sont pas surpris de voir l'algèbre borner aux progressions géométriques l'extension réelle du vaste domaine des sommations. Un aperçu général du développement qu'il comporte fait alors apprécier davantage la faiblesse de nos moyens théoriques et le besoin d'en réserver l'usage pour les cas vraiment utiles. Susceptibles de deux distinctions générales, les progressions peuvent se classer, d'abord suivant le degré, puis d'après le mode, de la subordination mutuelle de leurs termes consécutifs. Toutes celles où chacun ne dépend que des deux précédents constituent l'ordre le plus simple, auquel succède le cas où la dépendance embrasse trois termes, et graduellement les ordres plus compliqués. On doit ensuite diviser chaque ordre en classes, caractérisées par le mode algébrique de la combinaison correspondante, dont la plus facile peut souvent susciter des difficultés insurmontables, comme l'indique la progression insoluble où chaque terme est la somme des deux précédents.

Étudiée convenablement, la théorie des progressions géométriques vient ainsi fermer un domaine à peine ouvert, qu'il faut alors pourvoir des notions vraiment utiles qui s'y rattachent, avant d'aborder le dernier de ces cas usuels. Mieux appréciées en les liant à la loi binomiale, la sommation des puissances entières et positives, comme celle des nombres figurés, doivent être rapidement reprises au début de la septième leçon d'algèbre isolée. Une relation générale envers la sommation des puissances quelconques d'une suite de termes en progression arithmétique surgit du développement binomial en ajoutant les équations où chacun se rapporte au précédent, après les avoir

toutes affectées d'un même exposant indéterminé. La liaison ainsi saisie entre chaque puissance et l'ensemble des précédentes suffit pour faire graduellement trouver les diverses formules de sommation, en partant de l'exposant un, ou même nul. A l'égard de tous les nombres figurés, leurs diverses formules constituent les coefficients successifs de la puissance soustractive, développée envers un exposant égal au rang d'un binome où la variable est retranchée de l'unité, comme le montre la subordination directe de deux puissances consécutives.

Malgré son apparente simplicité, la sommation des progressions géométriques résiste à ces artifices, et même à la méthode, plus rationnelle quoique équivalente, fondée sur la relation universelle de la somme au terme général, et développée à l'aide de coefficients indéterminés. On doit les regarder comme réellement comprises dans une classe très compliquée, puisque l'expression du terme général y suscite une formation exponentielle; le succès qu'obtint le plus grand géomètre de l'antiquité dépendit d'un artifice uniquement propre à ce cas. Remarquant que, multipliés par la base, les termes conservent la même succession; il lui suffit de retrancher les deux progressions l'une de l'autre pour faire aussitôt surgir la loi de sommation. Appliquée au sens décroissant, elle fournit le premier exemple de *limite* historiquement émané des considérations numériques, en représentant la somme indéfinie comme équivalente au terme initial divisé par le complément de la base à l'unité. L'application de cette règle aux périodes septimales y fait directement retrouver la formule spécialement établie envers la fraction génératrice.

Il faut ensuite consacrer la septième leçon à l'indication du calcul exponentiel, naturellement introduit dans la plupart des questions sur les progressions géométriques. Nous ne pouvons résoudre, envers une telle formation, que les équations qui se

ramènent aux trois premiers couples d'éléments algébriques, en y prenant les logarithmes des deux membres. Dans ce nouveau domaine, plus étendu que l'ensemble des équations de tous les degrés, l'algèbre ne surmonte que les difficultés les plus simples. Un concours quelconque d'exponentielles à bases distinctes suffit pour rendre la question insoluble, même quand on se borne à partager un nombre en exponentielles de bases données. L'emploi des variables auxiliaires ne peut alors ramener le problème qu'à la résolution d'une équation où les puissances de l'inconnue sont ordinairement incommensurables. Tous les succès du calcul exponentiel se bornent aux cas où chaque membre de l'équation proposée consiste en un multiple constant d'une seule exponentielle, dont l'exposant est une formation naturelle, ou, tout au plus, une exponentielle simple. On voit ainsi confirmer la réflexion philosophique, déjà surgie souvent en Logique, sur l'aptitude des nouveaux domaines abstraits à faire mieux ressortir l'insuffisance de nos forces théoriques,

Tout le reste de cette leçon doit spécialement concerner l'institution, algébrique et numérique, des logarithmes. Émanée du calcul des valeurs en comparant les deux progressions usuelles, elle fut finalement rattachée au calcul des relations, en considérant les logarithmes comme les exposants capables d'adapter une base donnée à la représentation successive de tous les nombres possibles. Numériquement envisagée, cette institution constitue le plus puissant moyen de simplifier l'ensemble des opérations arithmétiques, en y changeant, suivant la propriété des exposants, les multiplications ou divisions en additions ou soustractions, et surtout les extractions quelconques de racines en simples divisions. D'après cela, son office algébrique consiste à fournir les racines réelles des équations exponentielles qui peuvent ainsi se ramener aux équations antérieurement ré-

16

solues. Une pleine appréciation de cette immense classe d'équations exige qu'on y considère les racines comme étant en nombre infini, quoiqu'une seule soit ordinairement réelle, sauf le cas où toutes deviendraient imaginaires, si l'on parvenait au logarithme d'une quantité soustractive.

Un suffisant recours à chacune des deux sources de l'institution logarithmique permet de remplir sa condition fondamentale, par la construction directe de la table universelle sans laquelle on ne pourrait ni résoudre aucune équation exponentielle ni simplifier les calculs numériques. Nous devons historiquement attribuer cette importante et pénible élaboration à la conception arithmétique des logarithmes, qui réduisit leur évaluation à l'insertion graduelle d'intermédiaires assez multipliés entre les termes primitifs des progressions comparées. Ils furent ensuite évalués comme racines des équations exponentielles les plus simples, en y développant l'inconnue en une fraction continue, dont tous les éléments peuvent être successivement assignés en substituant des nombres entiers dans les équations auxiliaires ainsi formées. D'après l'un ou l'autre mode, on peut toujours remplir la condition essentielle des approximations quelconques, en y mesurant le degré de confiance que méritent les résultats. On doit finalement reconnaître que le premier procédé, quoiqu'il paraisse plus complexe et moins régulier que le second, comporte une meilleure application, surtout pour une suite de nombres, dont il utilise mieux la succession.

Subordonnés, en apparence, à la base adoptée, ces calculs peuvent aisément convenir à toute autre, en se bornant à diviser tous leurs résultats par l'ancien logarithme de la nouvelle base. A l'aide de ce rapport constant, les tables décimales n'offrent aucune difficulté pour se convertir en septimales, et même servir aux calculs habituels avant d'être ainsi modifiées.

Nous devons cependant reconnaître que l'avénement de la numération finale exige cette modification, l'éminent calculateur des logarithmes ayant déjà proclamé la préférence due, sous l'aspect arithmétique, à la base numérale. Toutefois, il convient de noter que l'inventeur avait spontanément pris une autre base, qui, quoique incommensurable, se trouve algébriquement préférable. On voit naturellement surgir l'explication de cette anomalie, d'après les séries, ci-dessous indiquées, envers les formations exponentielle et logarithmique.

Historiquement considérés, les développements indéfinis, auxquels est entièrement consacrée la huitième leçon d'algèbre isolée, émanèrent d'abord de la division, puis de l'extraction des racines, surtout appliquées au plus simples binomes. A ces deux sources distinctes, convient un résumé commun, d'après la loi binomiale, successivement étendue aux exposants soustractifs et fractionnaires, qui rendent illimité le nombre de ses termes, sans changer leur composition ascendante. De cette unique souche, on pourrait aussi faire indirectement dériver d'abord le développement exponentiel, puis la série logarithmique. Elle serait peu propre à fournir la loi de leurs coefficients, qui s'y trouveraient tous exprimés par des formules indéfinies, dont la corrélation deviendrait insaisissable. Rien ne peut cependant dispenser d'obtenir ainsi le plus simple coefficient, sauf à lui subordonner directement tous les autres. Il convient donc de caractériser d'abord ce mode indirect, qui consiste à représenter la base de l'exponentielle par un binome dont le premier terme est l'unité. Subordonnée alors au développement binomial des puissances, la série exponentielle surgirait en le reconstituant envers l'exposant au lieu de la base, si cette refonte pouvait nettement s'accomplir au delà de la première puissance de cet exposant.

Étendue à de telles transformations, la méthode cartésienne

des indéterminées institue leur accomplissement normal, même avant d'être assistée par les moyens de généralisation propres à l'algèbre indirecte. La marche consiste à développer, envers une série à coefficients indéterminés, la comparaison résultée d'un caractère suffisamment simple de la formation à transformer. On doit réduire ce caractère à fixer la loi suivant laquelle change la variable dépendante quand la variable indépendante subit le changement le plus propre à simplifier une telle relation. Guidé par cet attribut, le développement de la comparaison algébrique institue, envers les coefficients indéterminés de la série cherchée, des équations du premier degré, toujours capables de faire successivement connaître leurs valeurs spéciales. Il faut alors saisir, par induction, leur loi générale, ce qui n'est vraiment possible, comme en tout autre cas inductif, qu'autant qu'elle se trouve suffisamment simple. A cet égard, les divers modes propres à l'algèbre indirecte ont notablement multiplié les succès, en permettant de mieux induire, d'après des comparaisons plus simplifiées. Rien ne peut cependant assurer que la loi du développement sera toujours appréciable, et la plupart des séries algébriques résistent aux procédés les plus perfectionnés, quoique tous permettent d'évaluer spécialement chaque coefficient.

Relativement à la formation exponentielle, le succès est complet d'après l'état primitif de la méthode, vu l'extrême simplicité de la loi correspondante. Élaborée suivant la règle élémentaire sur le carré d'un polynome quelconque, la comparaison décisive consiste alors à développer l'équivalence caractéristique entre le carré de la série hypothétique et le changement qu'elle subit en y doublant la variable. Par une induction facile, les équations ainsi surgies envers les coefficients manifestent la loi qui les subordonne tous au premier d'entre eux, dont ils sont les puissances d'un exposant égal au rang, affectées d'un déno-

minateur égal au nombre de permutations de cet exposant ou rang. Il suffit donc de compléter cette solution, en determinant, d'après le théorème binomial, ce coefficient fondamental, auquel tous les autres se rapportent, et que la comparaison accomplie laisse indéterminé Toutefois la manière dont il se trouve contenu dans cette série permet de le fixer autrement, puisqu'il y figure comme la variable elle-même, ce qui conduit à l'ériger en logarithme de la base proposée envers celle ainsi calculable, où l'unité deviendrait sa valeur.

On voit alors surgir l'explication, ci-dessus annoncée, du contraste entre l'arithmétique et l'algèbre quant au choix de la constante exponentielle ou logarithmique. Bien appréciée, la série précédente fait directement reconnaître que la meilleure base est, algébriquement, celle dont elle exprime la valeur en y supposant doublement égal à l'unité le produit auquel elle se trouve rapportée. Sous cette inspiration, une telle base, spontanément émanée de l'admirable instinct de l'inventeur des logarithmes, équivaut au nombre deux augmenté des réciproques de toutes les évaluations successives de la formule des permutations. Cette mémorable constante institue, malgré son incommensurabilité, le mode auquel il faut habituellement ramener les formations exponentielle et logarithmique, en y changeant convenablement la base. Une pareille transformation doit aussi simplifier l'élaboration arithmétique, du moins envers sa principale opération, sauf à rapporter à la base numérale les logarithmes ainsi calculés d'après celle-là. Relativement à la série exponentielle, il faut encore noter l'avénement, indirect mais spontané, de la série logarithmique, en rapprochant les deux expressions générales du coefficient fondamental, l'une en série de puissances, l'autre comme logarithme népérien de la base. Étendu de la constante à la variable, ce rapprochement suffit pour obtenir, dans toute sa netteté, la loi de la nouvelle série,

qui pourrait d'ailleurs être algébriquement déduite de l'ancienne, par une inversion à coefficients indéterminés.

Il importe néanmoins d'instituer directement la série logarithmique, comme seconde application, aussi caractéristique que la première, de la méthode fondamentale. Guidée par le cas initial, la comparaison décisive s'y constitue d'après la même propriété, dont la forme y devient seulement plus compliquée. Nous voyons, envers le binome où la variable s'ajoute à l'unité, que la formation logarithmique se double quand la variable s'y change en son propre double augmenté de son carré ; ce qui suffit pour caractériser une telle relation. Élaborant la comparaison plus pénible qui résulte du développement des puissances successives de ce nouvel état de la variable indépendante, on trouve, par induction, la loi cherchée ; sa simplicité plus prononcée compense la complication plus grande des équations auxiliaires. Alors tous les coefficients contiennent le premier en facteur commun, resté naturellement indéterminé tant que la base n'est pas spécifiée, mais facile à fixer en la prenant en considération, comme toujours douée d'un logarithme égal à l'unité.

Nous devons compléter la huitième leçon d'algèbre isolée en y caractérisant l'usage, algébrique et numérique, des deux séries obtenues. On peut aisément tirer, de la série exponentielle, un premier exemple de l'efficacité de tels développements comme moyens de transformation, en y puisant la loi générale de la puissance d'un polynome quelconque, normalement trouvée ci-dessus d'après le cas binomial. Toutefois, l'attention doit ici se concentrer sur l'aptitude aux évaluations, qui nécessitent l'introduction de considérations secondaires, grossièrement confondues avec le point de vue principal, sous la dernière phase de l'anarchie académique. Elles concernent les conditions de *convergence* qui deviennent indispensables à

l'usage numérique des séries quelconques, quoiqu'elles ne doivent aucunemement affecter leur office algébrique, envers lequel les notions de convergence et divergence restent toujours dépourvues de sens. Dans une telle appréciation, le type spontanément résulté des progressions géométriques suffit envers tous les cas vraiment usuels, où des termes constamment additifs assurent la convergence quand la limite de leur rapport consécutif est inférieure à l'unité, quelque soit leur rang.

A l'égard des séries où les signes alternent, la condition de convergence se borne au décroissement indéfini de leurs termes, qui suscitent des approximations par excès ou par défaut, comme d'après les fractions continues, selon que leur nombre est impair ou pair. Suivant cette règle, l'erreur commise, en l'un ou l'autre sens, est toujours moindre que le premier des termes négligés ; ce qui suffit pour guider l'évaluation des logarithmes d'après la série trouvée ci-dessus, en y préparant le nombre afin de la faire mieux converger. Toutefois, cette série comporte aussi des transformations propres à la rendre plus convergente sans une telle préparation, quoiqu'elles compliquent sa constitution algébrique. Relativement aux séries où tous les termes sont additifs, comme envers le type exponentiel, leur comparaison spéciale avec les progressions géométriques y mesure toujours l'approximation, si la précédente condition de convergence s'y trouve remplie. Étendue au cas général, soit que la succession des signes devienne quelconque, ou que la limite du rapport de deux termes consécutifs atteigne l'unité, la question de convergence offrirait des difficultés ordinairement insurmontables, quoiqu'on doive peu regretter cette impuissance.

CHAPITRE TROISIÈME.

GÉOMÉTRIE PRÉLIMINAIRE.

Appréciation fondamentale. Afin de systématiser l'étude abstraite des lois de l'étendue, il faut d'abord la rapporter à la destination concrète directement indiquée par son immuable qualification. Dans la notion de *mesure*, convenablement appréciée, on peut finalement condenser toutes les conceptions surgies du développement de la géométrie. Il faut d'abord y distinguer les trois cas généraux qu'elle présente, envers les lignes, les aires et les volumes. Toujours la mesure est nécessairement indirecte dans les deux derniers, et le plus souvent elle le devient aussi pour le premier. On ne doit regarder comme immédiate, en géométrie rationnelle, que la comparaison de deux longueurs rectilignes ; et tous les autres rapports y doivent être finalement ramenés à ceux de cette espèce, qui ne comporte aucune simplification.

Bien appréciée, l'étude de chaque courbe doit essentiellement aboutir à sa *rectification*, qui consiste à déterminer la loi suivant laquelle sa longueur, partielle ou totale, dépend des divers paramètres rectilignes d'après lesquels sa grandeur se trouve spécialement définie. Il faut ensuite regarder la mesure des aires comme devant toujours se ramener à celle des lignes

quelconques, et finalement des lignes droites, ce qui constitue la *quadrature*. Successivement compliqué, le problème géométrique aborde ainsi la mesure des volumes, justement qualifiée de *cubature*, d'après son résultat caractéristique, en y supposant mesurées les aires et lignes correspondantes.

On ne saurait entièrement renoncer à la comparaison directe des aires ou même des volumes, souvent ramenée à celle des poids. Mais, outre son irrationalité, ce supplément pratique de l'insuffisance théorique repose sur la connaissance des lois géométriques envers des formes plus simples que celles qui le nécessitent. Néanmoins, il importe que, dès le début, les jeunes disciples de l'Humanité reconnaissent l'impuissance de la géométrie à l'égard de cas qui semblent devoir être facilement accessibles. Elle n'a jamais pu découvrir la loi suivant laquelle l'aire d'un cylindre circulaire oblique dépend de sa hauteur ou de son obliquité. Ses progrès, à cet égard, n'ont abouti qu'à ramener ce problème à la rectification de l'ellipse, qui restera toujours inaccessible.

Nous pouvons ainsi sentir l'accroissement simultané de complication et de réalité que présente la logique en passant du calcul à la géométrie. A leur entrée dans le domaine mathématique, les jeunes disciples de l'Humanité trouvent, en arithmétique, des notions profondément réelles, mais qui n'ébauchent l'étude directe de l'existence universelle que sous son aspect le plus grossier. Venus en algèbre, ils n'y peuvent habituellement voir qu'une accumulation anticipée de déductions hypothétiques, qui ne saurait immédiatement comporter aucune réalité, sauf les théorèmes numériquement résultés des transformations. Ils sont ainsi disposés à sentir, en géométrie, la supériorité d'une étude qui caractérise l'existence universelle sous son aspect le plus fondamental, dont la généralité n'est inférieure qu'à celle du point de vue arithmétique. Réciproquement, ils y

peuvent bientôt reconnaître que l'augmentation d'importance et de réalité se trouve toujours accompagnée de difficultés plus grandes envers les trois conditions nécessaires à la vraie rationalité, clarté, précision, et consistance. Elle fait ainsi surgir le contraste, que toute l'initiation encyclopédique doit ensuite développer de plus en plus, entre l'imperfection et la dignité, simultanément croissantes, des théories réelles. Sous l'impulsion continue de ces convictions spéciales, on peut mieux prévenir ou corriger les illusions et les prétentions naturellement liées à la culture abstraite.

Déjà la géométrie, comparée au calcul, permet aussi d'apprécier, sans sortir du domaine logique, la subordination encyclopédique, où chaque science repose sur la précédente et l'utilise. On y voit, dogmatiquement comme historiquement, l'essor de l'algèbre essentiellement réglé par sa destinaton géométrique, depuis que la discipline positive a radicalement écarté les puérilités académiques. Toutefois, la géométrie est éminemment propre à caractériser l'office, inductif, déductif, et même constructif, du calcul employé convenablement. Elle fait ainsi surgir l'harmonie, que toute la suite de l'essor abstrait doit graduellement développer, entre les études supérieures et les études inférieures, également indispensables les unes aux autres, comme but ou base. Réciproquement, elle est aussi propre à manifester le besoin universel de la discipline positive, qui peut seule préserver chaque science des usurpations de la précédente.

Étendue successivement à tous les degrés encyclopédiques, cette double appréciation doit finalement constituer, en morale, le vrai régime théorique. Par conséquent, il importe de la faire suffisamment ressortir, dès son début, entre les deux études les plus connexes que présente la hiérarchie scientifique. Il est alors facile d'empêcher les habitudes, insuffisantes ou vicieuses, qui,

de là, s'étendraient ailleurs, en acquérant un ascendant bientôt difficile à surmonter.

Rien ne doit donc être négligé pour faire à la fois ressortir, dès le début, l'importance et l'imperfection de la géométrie, sa dépendance envers l'algèbre, et la sollicitude qu'elle suscite. Outre les obstacles pratiques qui souvent interdisent toute mesure directe des longueurs, des aires, et des volumes, les lois géométriques peuvent seules permettre de régler les dimensions conformément aux résultats désirés. Sans leur secours, l'empirisme instituerait des évaluations toujours incapables, par leur isolement, de guider notre intervention, quoiqu'elles conviennent, faute de mieux, aux cas trop nombreux qui restent inaccessibles à la science.

But essentiel de la géométrie, la mesure de l'étendue y peut rarement être abordée d'une manière directe. Elle a presque toujours besoin, même envers les formes les plus simples, d'une préparation relative à leurs propriétés caractéristiques, et consistant surtout à découvrir leurs différents modes de génération par le mouvement d'un point ou d'une ligne. A ce préambule nécessaire, doit naturellement correspondre la majeure partie de l'étude destinée à chaque figure, puisqu'il comporte un développement spontanément indéfini, tandis que la mesure n'y suscite que des questions naturellement limitées. Tous les travaux accomplis sur le cercle depuis la théocratie jusqu'à la sociocratie n'ont pas épuisé l'examen de ses propriétés, quoique sa rectification et sa quadrature aient été bientôt obtenues. Il faut donc reconnaître la nécessité de systématiser un tel appendice en le liant au domaine essentiel, dont il altérerait l'appréciation en absorbant l'attention d'après son développement naturel.

Leur liaison normale résulte de deux motifs également décisifs, l'un théorique, l'autre pratique. A l'égard du premier, il faut d'abord reconnaître que le caractère initial de chaque

figure ne peut jamais être choisi pour en faciliter la mesure, à laquelle il doit ainsi convenir rarement. Faute des transformations qu'il obtient d'après l'étude préliminaire, il serait donc impropre à diriger l'élaboration des questions finales. Il faut directement reconnaître que les rectifications, quadratures, et cubatures surpassent autant en difficulté qu'en importance les recherches purement relatives à la génération des figures correspondantes. Tout l'essor intellectuel développe la conviction, ainsi surgie en géométrie, que les problèmes les plus utiles sont aussi les plus difficiles, et resteraient insolubles sans la préparation résultée d'études qui n'ont pas d'autre office théorique. Elles doivent donc être rapportées à cette destination, et leur culture devient oiseuse aussitôt que ce but se trouve assez atteint. Sous la discipline spontanément émanée de la géométrie cartésienne, on a renoncé tacitement à découvrir de nouvelles propriétés du cercle, quoique ce régime en facilitât les moyens, justement dédaignés en vue de spéculations plus utiles.

Abstraitement introduit d'après notre aptitude à le concevoir, le caractère qui dirige l'étude théorique de chaque figure est rarement propre à manifester son existence pratique. Par la définition conique ou cylindrique de l'ellipse, on ne pouvait directement instituer sa vérification céleste, qui resterait encore ignorée si, parmi les propriétés de cette courbe, on n'eût spontanément élaboré la seule convenable à ce cas. Telle est la considération pratique qui concourt avec la convenance théorique pour systématiser l'essor empiriquement développé dans les principaux cas géométriques. Elles font aussi sentir le besoin de régler une culture spontanément disposée à dégénérer en spéculations oiseuses. Sauf envers la ligne droite et le cercle, où l'observation fournit immédiatement les meilleurs caractères théoriques et pratiques, toutes les figures doivent doublement

exiger un préambule que la discipline positive peut seule adapter à sa destination.

Nous sommes ainsi conduits à caractériser, sous un dernier aspect, l'extension nécessaire du domaine géométrique, en y complétant les types naturels par les types artificiels. Elaborée convenablement, la théorie préliminaire de chaque figure consiste à rattacher l'ensemble de ses propriétés, et par suite sa mesure, à la définition émanée de l'observation ou de l'imagination, et, le plus souvent, de leur concours. Rapportés à ce caractère prépondérant, les autres attributs acquièrent une consistance qui, sans augmenter la certitude directement résultée de leur vérification spéciale, développe la rationnalité générale d'un tel système. Faute de cette subordination, la géométrie ne pourrait assez remplir son office logique, quoiqu'elle restât souvent douée d'une suffisante efficacité scientifique. Sauf les cas où cette connexité susciterait des artifices trop détournés, la constitution normale du principal domaine mathématique exige une telle élaboration.

Comparée au calcul, la géométrie présente un caractère concret, quoiqu'elle soit abstraite comparativement aux sciences plus élevées, suivant le contraste, essentiellement relatif, qui se développe dans toute la hiérarchie théorique. A la seule algèbre, vicieusement séparée de ses deux souches, correspond une plénitude d'abstraction incompatible avec la positivité. Réciproquement, le caractère pleinement concret ne se manifeste que dans les spéculations purement pratiques, qui ne comportent aucune systématisation. Tout le domaine de la philosophie seconde est à la fois abstrait et concret, suivant des degrés toujours croissants ou décroissants d'après le rang encyclopédique. Etudié convenablement, le calcul, quoique plus abstrait que tout le reste de la hiérarchie théorique, ne se montre jamais dépourvu du caractère concret, puisque toute notion de nombre

émane du monde extérieur même envers le monde intérieur.

On doit normalement regarder la philosophie première et la philosophie troisième comme les types nécessaires de l'abstraction et de la concrétion, l'une concernant l'ensemble des phénomènes et l'autre celui des êtres. Rattachée à toutes deux, afin d'instituer leur liaison, la philosophie seconde participe simultanément à leurs caractères respectifs, dont la combinaison forme le sien propre, selon des degrés proportionnés à la proximité. Toutefois, sa constitution mixte ne put être entièrement saisie que quand le positivisme eut directement conçu le triple ensemble de la vraie philosophie. Une tendance habituelle à l'absolu faisait auparavant flotter chaque science entre l'appréciation purement subjective et l'attitude pleinement objective, en inclinant davantage vers l'une ou l'autre suivant la position encyclopédique. Sous l'empirisme académique, la mathématique fut jugée essentiellement déductive ; l'induction, que le dix-septième siècle y reconnaissait encore, y devint graduellement inaperçue à mesure que l'algèbre y prévalut.

Si l'arithmétique est incontestablement fondée sur l'observation extérieure, il faut bien que la géométrie offre davantage ce caractère, que la mécanique doit mieux développer. Il n'y fut entièrement méconnu que sous l'impulsion algébrique, pendant la dernière phase de l'anarchie occidentate. Mais le positivisme, dès son début, érigea la géométrie en science d'observation, malgré les protestations métaphysiques de tous les faux théoriciens. Un examen direct justifie ce jugement envers les études primitives, qui, concentrées sur la ligne droite et le cercle, ont évidemment tiré du dehors les propriétés fondamentales auxquelles elles s'efforcèrent de rattacher les autres attributs, souvent induits aussi. La même appréciation doit être indirectement étendue à la plupart des théories spéciales ultérieurement instituées par la géométrie ancienne,

puisqu'elles concernèrent des figures dérivées de ces deux sources d'après des constructions planes ou solides.

Confrontée avec la physique, type ordinaire de l'objectivité, la géométrie offre une similitude qu'aucun bon esprit ne peut méconnaître, et sur laquelle repose le contact normal des deux sciences. La théorie du cercle, par exemple, comparée à celle de la pesanteur, présente un enchaînement analogue de propriétés respectivement subordonnées à des lois fondamentales pareillement émanées de l'observation extérieure. A la vérité, la rénovation cartésienne fit surgir, en géométrie, une foule de types purement artificiels, dont la définition, entièrement idéale, ne consistait que dans leurs équations arbitrairement imaginées. Relativement à ceux-là, la science semblerait exclusivement logique et nullement physique, si leur étude pouvait être réellement instituée sans aucune relation à celle des figures surgies du dehors, indirectement ou directement. Il faut finalement regarder une telle supposition comme radicalement contradictoire, puisqu'on ne saurait même concevoir ces équations hypothétiques, à plus forte raison les élaborer géométriquement, sans la théorie de la ligne droite et du cercle.

On ne peut donc attribuer qu'à l'empirisme académique la confusion passagère que la prépondérance des types artificiels suscita dans l'appréciation philosophique de la géométrie, plus saine au dix-septième siècle qu'au dix-neuvième. Malgré ces abus, la faculté de remplacer l'invention des figures par celle des équations, doit être finalement regardée comme l'un des meilleurs fruits de la régénération cartésienne. Notre imagination peut ainsi s'appliquer à des spéculations plus élevées et plus utiles, sans que l'immortalité puisse s'obtenir, comme dans l'antiquité, d'après l'introduction d'une courbe. Il faut surtout remarquer la tendance d'une telle transformation à pousser la géométrie vers la constitution générale qu'exigent sa nature et

sa destination. Sous cette impulsion, on dut bientôt dédaigner l'étude des figures que la moindre imagination pouvait indéfiniment multiplier, et les efforts se dirigèrent vers l'élaboration fondamentale des théories communes à toutes les formes.

Mais, quelle que soit l'origine, algébrique ou géométrique, des types artificiels, il importe de reconnaître que leur incorporation générale au second domaine mathématique peut seule permettre de compléter et de systématiser sa constitution théorique et pratique. On doit d'abord regarder comme susceptibles d'une grande efficacité logique beaucoup de figures qui ne comportent aucune utilité scientifique. Leur étude a graduellement dégagé la géométrie de la spécialité qu'y devait indéfiniment maintenir la considération exclusive des formes rectilignes et circulaires. Étendues à toutes les figures, les spéculations géométriques tendent vers un véritable ensemble, seul capable d'instituer le type de rationnalité qui constitue le but essentiel du principal élément mathématique. Sans cette généralisation, les questions fondamentales envers la mesure de l'étendue ne pourraient assez prévaloir, l'attention restant absorbée par les recherches secondaires sur les propriétés spéciales.

Pratiquement considérée, l'extension de la géométrie à des types quelconques devient également indispensable, comme seule garantie de son aptitude envers les cas réels, dont la représentation idéale reste préalablement ignorée. Étudiée envers toutes les formes exactement définies, la science de l'étendue abstraite sera nécessairement applicable aux figures que l'appréciation concrète pourra faire surgir. Nous n'y pourrons trouver d'autre difficulté que l'embarras de reconnaître leur équivalent idéal, dont les caractères théoriques pourraient ne pas être assez variés. Si la géométrie restait bornée à quelques types, même naturels, nous n'aurions aucune assurance rationnelle de leur efficacité pratique. A vrai dire, l'application astronomique des

études sur les sections coniques fut un heureux accident, que les géomètres anciens ne pouvaient aucunement prévoir. D'après leur marche spéciale, ils auraient pu longtemps s'occuper de figures qui, comme la cissoïde, ne seraient jamais susceptibles de réalisation concrète. On doit donc reconnaître que l'extension de la géométrie à tous les types précis intéresse autant la subordination normale de la théorie à la pratique, que le développement et la systématisation de la Logique.

La double obligation de généralité ne constitue, en géométrie, que l'essor plus complet, vu sa position encyclopédique, d'un besoin naturellement commun à toutes les parties de la philosophie seconde. Il faut partout introduire des types artificiels afin de perfectionner à la fois l'institution théorique et l'appréciation pratique. Graduellement développée à mesure que les spéculations deviennent plus abstraites, en descendant l'échelle encyclopédique, cette incorporation est surtout indispensable à l'harmonie entre la théorie et la pratique. A chaque pas d'une telle descente, on sent augmenter la distance entre ces deux ordres de spéculations, quand les phénomènes, devenus plus simples et plus généraux, s'éloignent davantage du point de vue humain, seul apte à rallier le concret et l'abstrait. Réciproquement, la complication toujours moindre du domaine spéculatif y permet alors une incorporation plus facile et plus complète des cas auxiliaires.

Étendue, en sens inverse, jusqu'à la Morale, cette obligation y devient spécialement appréciable envers chacun de ses trois éléments encyclopédiques. Comparée à la géométrie, et même à la mécanique, la biologie fait un moindre usage, théorique et pratique, des types artificiels, qui pourtant y sont régulièrement introduits depuis sa régénération positiviste. Historiquement envisagée, son évolution préliminaire ne les avait repoussés que par suite d'un concours spécial entre l'empirisme méta-

physique et les scrupules théologiques. Une impulsion directement philosophique les introduisit en sociologie dès le début, pour y faciliter à la fois l'enchaînement théorique et l'examen pratique. Sous la même discipline, la morale proprement dite doit pareillement utiliser cette double aptitude des cas hypothétiques, quoiqu'ils soient moins efficaces dans l'étude où l'abstrait se trouve le plus rapproché du concret.

Tels sont les motifs fondamentaux qui poussent la géomètrie vers st constitution générale, malgré la restriction naturelle de sa culture primitive. On y doit d'abord faciliter le principal examen et garantir son application réelle en y développant l'étude préliminaire des diverses propriétés qui caractérisent chaque forme successivement considérée. Mais il y faut ensuite mêler aux types naturels tous ceux qui peuvent en dériver, directement et même indirectement, en aspirant à la pleine généralisation des doctrines et des méthodes. A ces deux conditions, la géométrie se trouve rationnellement assurée de pouvoir convenablement remplir son office théorique et sa destination pratique. Rien ne peut y faire mieux ressortir le besoin des deux essors, l'un spontané, l'autre systématique, entre lesquels s'accomplit son évolution préliminaire, commencée par l'institution de l'Espace, et terminée par l'avénement de la méthode générale.

Dès la fin de l'âge fétichique, individuel ou collectif, l'essor théorique commence à s'élever du nombre à l'étendue. On voit alors surgir l'institution de l'Espace, pour développer le second mode ou degré de la contemplation abstraite, envers lequel les signes, qui suffisaient au premier, deviennent insuffisants. Cette destination, exclusivement scientifique, de la plus ancienne construction subjective persiste jusqu'à la fin de l'initiation humaine. Elle doit normalement devenir autant esthétique que théorique, quand le fétichisme, systématisé par le positivisme,

complète le domaine poétique en suscitant des images dépourvues d'un siège objectif. Religieusement appréciée, l'institution de l'Espace se trouve profondément incorporée au culte universel, pour y développer l'adoration finale de la fatalité suprême, à laquelle nous devons synthétiquement rapporter les lois qui nous sont analytiquement inconnues.

Il faut ici considérer cette institution comme spontanément liée à la géométrie, dont elle constitue à la fois la base essentielle et le principal résultat. Nous sommes ainsi conduits à reconnaître combien la qualification de science de l'Espace convient à la Logique, dont l'élément central est spécialement caractérisé par une telle définition. Un usage empiriquement consacré semble diviser la géométrie en deux domaines inégalement cultivés, en ne rapportant au Grand-Milieu que le moins usuel quoique le plus vaste. Régénéré par l'éducation encyclopédique, l'esprit mathématique s'habitue à contempler dans l'Espace les figures planes, autant que celles qui sont sphériques, cylindriques, coniques, etc. Elles doivent toutes être également détachées de leurs sièges concrets, et pareillement rapportées au Grand-Milieu, sur quelque surface qu'on les conçoive tracées.

Cette institution, instinctivement surgie au début de la seconde enfance, a naturellement conservé, jusqu'à la fin de l'évolution préliminaire, son caractère objectif comme sa destination scientifique. A cet égard, elle fournit la meilleure manifestation de l'irrésistible ascendant de l'Humanité sur tous ses serviteurs, ainsi conduits à juger extérieure une construction intérieure. Sa théorie subjective constitua le premier pas direct vers une pleine rénovation mentale, quand le fondateur du positivisme, avant d'avoir achevé sa vingtième année, eut spontanément atteint cet état décisif d'entière émancipation, inconnu même à son dernier précurseur. Tout le relativisme se trouvait

implicitement contenu dans cet essor initial, qui fit directement remonter la subjectivité jusqu'à la conception universellement jugée la plus objective, comme ayant même précédé les croyances théologiques proprement dites. Il faut peu s'étonner que l'ingénieux géomètre auquel cette théorie fut alors soumise n'ait fait aucune attention à ce début décisif d'un philosophe encore adolescent.

Historiquement appréciée, l'institution de l'Espace, qui précède l'avénement des dieux, doit aussi survivre à leur extinction en prenant même un plus grand caractère dans le régime final que pendant l'évolution préliminaire. A celle-ci put seulement convenir le développement de sa destination scientifique, ou plutôt géométrique, d'ailleurs entravée par l'objectivité supposée. Bien appréciée comme construction subjective, cette institution devient normalement applicable, non seulement aux phénomènes de l'étendue et du mouvement, mais à tous ceux de la nature morte, et même à la contemplation statique des êtres organisés. Il faut donc reconnaître qu'un tel début de la synthèse finale n'a pas moins indiqué son caractère toujours organique que son esprit constamment relatif. La plus ancienne institution mentale de l'Humanité s'est ainsi consolidée et développée dans l'état normal, qui, non-seulement étend et systématise son domaine scientifique, mais lui procure une grande efficacité poétique, et même une haute destination religieuse. Elle y doit ces éminentes aptitudes à sa subjectivité reconnue, qui seule permet de la conformer librement aux principaux besoins, intellectuels et moraux, de la synthèse relative. Sa régénération subjective, directement rapportée au Grand-Être dont elle représente à la fois l'enfance et la maturité, lui procure plus de consistance et de vénération que sous le régime absolu, qui ne pouvait aucunement comporter sa réaction affective.

On ne doit ici spécifier la constitution de l'Espace qu'envers

les attributs relatifs à sa destination mathématique. Réservée aux parties correspondantes de la synthèse universelle, son appréciation y devra successivement développer les modifications du Grand-Milieu pour convenir aux images auditives, olfactives, électriques, etc., comme aux idées visuelles et tactiles, qu'il a seules embrassées spontanément. Elle doit finalement recevoir, en Morale, l'investiture religieuse, après avoir ainsi caractérisé l'aptitude théorique de l'Espace, et même indiqué son efficacité poétique. J'ai déjà spécifié son application normale au calcul, tant algébrique qu'arithmétique, où la seule difficulté consistait à surmonter les habitudes empiriquement résultées de l'appréciation objective. A l'égard du domaine géométrique, et, par suite, mécanique, qui fit spontanément surgir cette institution, il me suffit de joindre, aux considérations précédemment signalées, un jugement spécial sur la nature et l'étendue de l'Espace.

Sous le premier aspect, le fluide subjectif doit normalement offrir une consistance moindre que celle du fluide objectif dans lequel nous sommes habituellement plongés. Une espèce aquatique qui pourrait instituer une telle conception préférerait, comme mieux appréciable, un espace liquide, pourvu que sa densité fût notablement inférieure à celle du milieu correspondant. Basée sur notre existence aérienne, la constitution du Grand-Milieu devient nécessairement gazeuse, avec plus de fluidité que notre atmosphère, afin de n'opposer aucune résistance aux situations et mouvements que nous y rapportons. Il faut seulement y supposer la solidification, partielle et passagère, des limites, superficielles ou linéaires, de chaque corps que nous y plaçons. Rien n'empêche de concilier ces attributs géométriques et mécaniques avec les autres qualités physiques dont l'Espace peut être successivement doué, quoiqu'elles soient habituellement écartées, en Logique, comme étrangères aux spéculations correspondantes.

A l'égard de l'étendue propre au Grand-Milieu, sa théorie subjective doit systématiquement restreindre l'expansion indéfinie qui lui fut empiriquement attribuée sous le régime absolu. Mieux adaptée à nos vrais besoins, la constitution céleste se borne, dans l'état normal, aux astres dont la planète humaine devient le centre objectif ou subjectif, comme étant seuls liés à nos destinées. Par conséquent, le Grand-Milieu ne doit pas dépasser l'enceinte qu'exige l'existence du Grand-Fétiche, en tant que siège et base du Grand-Être. Les limites de notre Monde sont aussi celles de notre Espace, que son institution subjective nous permet d'étendre et de restreindre au gré de nos besoins. Elles ne pouvaient rester indéfinies sans susciter le retour spontané des tendances absolues que le positivisme eut tant de peine à surmonter.

Fondée sur l'institution du Grand-Milieu, celle des types artificiels tendit, réciproquement, à consolider et développer sa destination géométrique d'après un exercice habituel. On voit ainsi surgir la connexité, ci-dessus annoncée, entre l'avénement de l'Espace et celui de la géométrie générale, qui constituent les deux termes extrêmes de l'évolution préliminaire du principal élément de la Logique. Rien ne peut mieux caractériser l'harmonie que procure aux conceptions humaines la synthèse qui, toujours historique et dogmatique à la fois, fait ainsi concorder le premier fruit théorique de notre enfance et la dernière préparation de notre maturité. Tant que les images géométriques restaient liées aux corps correspondants, les figures subjectives ne pouvaient habituellement dépasser les formes objectives. Sous l'assistance continue de l'Espace, la géométrie peut directement considérer des types artificiels, dont le rapprochement la pousse à rendre ses solutions aussi générales que ses problèmes.

Rapportée à sa principale destination, la science de l'étendue

traite des questions nécessairement uniformes envers toutes les figures qu'elle considère. Il en est essentiellement ainsi, quoique à de moindres degrés, pour les recherches spécialement relatives aux propriétés caractéristiques de chaque type. Dans la plupart de ces spéculations auxiliaires, les diverses lignes et surfaces ne sont réellement distinguées que d'après les modifications particulières de quelques attributs généraux. Ecartant les spéculations oiseuses, on ne trouve qu'un très petit nombre de cas où l'on doive normalement étudier, envers certains types, des théories naturellement dépourvues d'intérêt à l'égard de tous les autres. Successivement développée à mesure que les types se multiplient, cette uniformité spontanée des questions géométriques fait bientôt désirer une équivalente similitude entre les élaborations correspondantes.

On doit regarder ce besoin comme se liant à l'introduction des types artificiels autant qu'elle-même à l'institution de l'Espace. Vue historiquement, l'étude des formes hypothéthiques dut surtout servir, pendant l'évolution préliminaire, à developper nos aptitudes mathématiques par un exercice suffisamment accessible à notre enfance. Apprécié dogmatiquement, cet essor doit être systématiquement réglé d'après la destination normale que lui conserve notre maturité. Les motifs provisoires ayant cessé, la discipline positive ne maintient les études spéciales envers les types quelconques que vu leur réaction générale, ci-dessus caractérisée, sur la résolution théorique et l'application pratique des principales questions géométriques. Elle doit donc instituer, le plus promptement possible, la géométrie générale, sans développer la géométrie spéciale au delà de ce qu'exige la nécessité d'y puiser les fondements de cette systématisation.

Nous pouvons aisément sentir que le contraste habituel entre la généralité des questions et la spécialité des réponses dut

bientôt choquer assez les géomètres de l'antiquité p
faire suffisamment désirer une telle rénovation si les c
en étaient alors accessibles. Un rapprochement contin
sections coniques avec le cercle et la ligne droite le
à cet égard, une appréciation assez vaste, surtout
troduction de la cissoïde, de la spirale, et de l'hélic
attachement apparent à la constitution empirique
tres anciens obéirent moins à l'habitude qu'à l'im
faut pareillement expliquer le délaissement de
géométriques pendant la majeure partie du mo
seulement chez les Occidentaux justement préoc
loppement social, mais aussi parmi les Orien
ment préservés de cette sollicitude. Tous
devaient alors sentir que, l'étude des anciens
tiellement épuisée, et celle des nouveaux rad
la géométrie chômerait jusqu'à l'avénement
tion, naturellement retardée par l'insuffi
Etendu, sous l'impulsion de la mécanique,
maine géométrique conserva, dans la pre
septième siècle, la culture spéciale, parce
n'avait pas fait assez surgir la constitutio
mirable issue directement émanée du gén
prit scientifique se trouvait entouré d
d'après la réciprocité naturelle entre l
gèbre et la systématisation de la géomé

Telle fut la connexité qui réserva la
trie générale au principal précurseur d
diée historiquement, cette inaugurat
thématique ne put être digneme
qui fit seul apprécier la na
la concepti
spécia

nèrent, aux dix-septième siècle, de son examen général. Subjuguée, au siècle suivant, par l'élaboration de la mécanique céleste, l'attention des géomètres s'éloigna davantage d'une telle appréciation, tandis que l'extension de l'anarchie théorique les rendait moins capables de porter un jugement philosophique. On ne saurait donc s'étonner que, à l'avénement du positivisme, quand la dégradation académique devenait complète, la distinction entre la géométrie générale et la géométrie spéciale fût essentiellement méconnue.

Alors la régénération philosophique fit directement apprécier la rénovation scientifique qui l'avait le mieux préparée en instituant l'harmonie systématique entre l'abstrait et le concret. Pour comprendre la liaison normale de ces deux constructions, à travers deux siècles d'intervalle, il faut regarder la fondation de la géométrie générale comme le début, spontané mais décisif, de la synthèse subjective qui devait caractériser le positivisme. Il importe de reconnaître que la rénovation cartésienne consiste à traiter uniformément tous les cas d'un même problème envers toutes les figures possibles. Cette constitution finale du domaine géométrique a donc coordonné par rapport aux sujets une science jusqu'alors subordonnée aux objets. Elle fit ainsi surgir des plus simples phénomènes le premier type et degré de la régénération que le positivisme devait accomplir envers toutes les études réelles, en faisant systématiquement prévaloir la subjectivité sur l'objectivité, pour substituer le relatif à l'absolu.

La géométrie n'a donc atteint sa vraie maturité que quand le principe cartésien a subordonné les notions spéciales aux conceptions générales. Une harmonie auparavant impossible s'est alors développée entre l'uniformité spontanée des problèmes et l'uniformité systématique des solutions. Cet accord longtemps souhaité repose sur la représentation des figures par des équa-

tions, en subordonnant l'abstrait au concret. Elle a seule permis de saisir et d'élaborer ce que le même problème offre de commun envers toutes les formes possibles. Sans leur transformation universelle en considérations algébriques, les spéculations géométriques resteraient trop compliquées pour que cette partie prépondérante de chaque solution y devînt distinctement appréciable.

Généralisée ainsi, la géométrie aura toujours besoin d'un préambule dogmatique essentiellement analogue à sa préparation historique. Elle ne peut comporter l'intervention algébrique que quand l'élaboration directe a fait suffisamment surgir les équations convenables. Mais la géométrie spéciale, qui doit autant préparer la géométrie générale dans l'éducation individuelle que pour l'évolution collective, est normalement réductible à l'étude des formes rectilignes et circulaires. Il convient pourtant d'y compléter le développement de ce domaine fondamental par l'ébauche nécessaire des plus simples spéculations sur les principales figures que les anciens, et même les modernes, ont isolément considérées. Rapidement appréciées, elles feront mieux ressortir la nature et le besoin de la généralisation abstraite, qui peut seule adapter la géométrie à sa destination théorique et pratique.

Étudié complétement, le principal élément de la Logique se compose de deux domaines, l'un préliminaire et spécial, l'autre définitif et général, également indispensables malgré l'inégalité de leur développement. Ces deux parties, en apparence hétérogènes, constituent, par leur succession, non moins dogmatique qu'historique, un ensemble pleinement normal, où le premier essor et le dernier état de l'esprit algébrique resteront toujours combinés. Historiquement comparées, elles lient autant leurs méthodes que leurs doctrines, puisque l'intervention algébrique a spontanément surgi dans la géométrie spéciale, quoique son

efficacité ne se soit systématiquement développée qu'envers la géométrie générale. Appliquée, d'abord sous la forme de proportions, au principal problème rectiligne, l'algèbre a toujours disposé les géomètres, dès l'élaboration grecque, à pressentir l'influence finale des considérations abstraites sur les spéculations concrètes. Rapportée à sa source trigonométrique, la loi du signe, sans laquelle la rénovation cartésienne était impossible, institue un lien spécial et direct, autant scientifique que logique, entre la géométrie préliminaire et la géométrie définitive.

Nous pouvons ainsi concevoir le concours spontané qui n'attendait que la systématisation positiviste pour constituer la philosophie mathématique, d'après l'ensemble de l'initiation théorique. Outre leur enchaînement fondamental, les deux parties du domaine géométrique se trouvent normalement liées par l'essor d'une dernière classe de spéculations où les deux points de vue se combinent. Tel est le caractère des conceptions que le plus fécond des grands géomètres fit spontanément surgir envers la classification des surfaces, dont le principal développement devait échoir à son digne adjoint dans le calendrier occidental. Une pareille réaction de la géométrie générale sur la géométrie spéciale prouve que la première est suffisamment élaborée et la seconde convenablement coordonnée. Sous cette impulsion complémentaire, la destination logique de la géométrie s'est autant perfectionnée que son essor scientifique, en ébauchant la méthode comparative dans l'enceinte mathématique.

Il serait ici superflu d'insister davantage pour faire directement sentir que, sous tous les aspects essentiels, l'évolution préliminaire a dignement accompli son office fondamental envers la constitution mathématique. Graduellement élaborée pendant la grande transition qui devait conduire les Occidentaux de la théocratie à la sociocratie, cette constitution a spontanément

préparé la systématisation finale de la Logique. Nous devons d'autant plus de reconnaissance aux principaux coopérateurs d'un tel progrès que sa phase la plus décisive fut nécessairement accomplie à travers les obstacles résultés de l'empirisme scientifique. Après avoir écarté les spéculations oiseuses et les déviations académiques, on sent que l'évolution préliminaire a suffisamment institué la science fondamentale, qui n'exigeait dès lors que la systématisation émanée de la science finale. Rapportée à sa constitution normale, la géométrie se trouve ainsi composée de deux domaines essentiels, l'un spécial, l'autre général, suivis d'un complément qui les lie en suscitant l'essor comparatif. Une saine application de la quinzième loi de la philosophie première conduit à placer dogmatiquement ce lien, accessoire mais universel, après les deux études qu'il combine. Son avénement historique est directement conforme à cette coordination, puisqu'il a spécialement caractérisé la terminaison du régime préliminaire et l'approche de l'état normal.

Tous les éléments de la Logique ont simultanément manifesté le suffisant accomplissement de leurs préparations respectives. Avec l'élaboration spontanée de la géométrie comparée, coïncida la tentative systématique du plus philosophe des grands géomètres pour coordonner l'ensemble du domaine mathématique. Cette manifestation décisive du besoin de régler après avoir développé fut bientôt suivie du seul progrès que comportât l'élaboration propre au dernier élément logique. Historiquement liée autant que dogmatiquement à la systématisation de l'astronomie, la mécanique générale avait essentiellement épuisé cette destination. Elle ne comportait plus que le perfectionnement élémentaire de ses conceptions principales, d'après un rapprochement direct entre les translations et les rotations.

On ne pouvait cependant attendre, de la science finale, la systématisation de la science fondamentale avant que celle-ci

manifestât spontanément la restriction normale de son vrai domaine par l'avortement décisif de la meilleure tentative destinée à le dépasser. Nous devons historiquement regarder de tels projets comme des symptômes involontaires de l'accomplissement radical de l'évolution mathématique, qui ne pouvait plus alimenter d'éminents esprits, que la spécialisation théorique rendait pourtant incapables de se développer ailleurs, Cette manifestation, autant indispensable qu'inévitable, résulta surtout d'un admirable effort pour soumettre au calcul les lois de l'équilibre et du mouvement des températures. Le digne adjoint du géomètre philosophe dans le calendrier occidental entreprit vainement de surmonter, à cet égard, les limites subjectives de l'appréciation objective, quoiqu'il ait ainsi caractérisé, mieux que personne, la subordination normale de l'abstrait au concret. Épuisée dès sa naissance, cette apparente extension d'un domaine inaltérable, sans élargir la Logique ni la Physique, suscita bientôt une nouvelle irruption de puérilités algébriques, chez les prétendus successeurs du grand géomètre qui manifesta l'extinction de l'essor mathématique.

Rapprochés de l'incomparable tentative envers la systématisation isolée de la science fondamentale, les principaux progrès respectivement propres à ses trois éléments confirmèrent cet épuisement pendant la génération qui précéda l'avénement du positivisme. A peine l'évolution géométrique fut-elle complétée par l'essor des conceptions comparatives, que l'élaboration mécanique se trouva pareillement achevée d'après la subordination élémentaire de la rotation à la translation. Mieux efficace pour la Logique qu'envers la Physique, la tentative ci-dessus caractérisée réagit, chez son fondateur, sur le dernier perfectionnement qu'ait spécialement subi le calcul, en étendant l'institution des séries et la résolution numérique des équations. On doit normalement regarder les trois suppléants ainsi fournis

au calendrier occidental comme les représentants extrêmes d'une préparation dont l'ensemble n'a plus été depuis senti par aucun savant. Sous prétexte de géométrie, de mécanique, ou même de physique, le régime académique développa la culture isolée de l'algèbre, dès lors échue aux esprits incapables de méditations plus difficiles et plus importantes, jusqu'à ce que le positivisme eût discipliné la science.

Historiquement jugée, l'évolution mathématique, et surtout géométrique, offre, dans son ensemble, un spectacle satisfaisant, et même honorable, pour l'intelligence humaine. Il faut attribuer ses vices, partiels ou temporaires, à la fatalité qui forçait l'essor scientifique de s'accomplir sans discipline philosophique, vu l'impuissance de la théologie et de la métaphysique à régler l'esprit positif. Élaborées dans les ténèbres, les théories les plus indépendantes ont spontanément subi l'impulsion croissante qui résulta de l'ensemble du mouvement humain. Malgré la dégradation spécialement due à l'empirisme académique, la science destinée à constituer le type abstrait de la rationalité systématique honora la dernière phase de la révolution occidentale par une digne terminaison de la préparation commencée sous la théocratie. Ses trois représentants extrêmes ont sincèrement déploré des divagations qu'ils ne pouvaient surmonter, et le plus éminent d'entre eux a noblement accepté la dédicace du traité philosophique qui posa les bases de la discipline théorique.

Il est impossible de juger, et même de comprendre, l'évolution mathématique en l'isolant de l'ensemble de la préparation humaine. Guidés par la philosophie de l'histoire, nous pouvons suffisamment expliquer la lenteur de l'essor géométrique, d'après sa liaison nécessaire avec tout le mouvement intellectuel et même social. Nous devons surtout rattacher à cette connexité le tardif avénement de la géométrie générale, au lieu de le

rapporter à des motifs purement mathématiques. Abstraction faite des influences sociales, un tel retard devient inexplicable quand on a suffisamment apprécié les conditions intellectuelles de cette rénovation. Rien n'empêchait les anciens de représenter par des équations, non-seulement la ligne droite et le cercle, mais aussi les principales courbes qu'ils étudiaient. Un examen attentif prouve même qu'ils avaient spontanément formé les équations spéciales de la parabole, de l'ellipse, et de l'hyperbole, aisément déduites des définitions coniques. Si, d'une autre part, l'algèbre ne s'est pas développée plus rapidement, il faut l'attribuer, non à la difficulté d'un tel essor, mais à l'absence d'une impulsion capable de le lier à l'ensemble des besoins humains.

Pour que cette appréciation soit mieux éclaircie, il convient de comparer la régénération cartésienne à deux autres constructions théoriques du premier ordre, qui la précédèrent de quelques années, et dont le retard comporte une explication analogue. Abstraitement considérées, l'institution du mouvement terrestre et la coordination des orbites planétaires ne présentaient point des difficultés spéciales qui dussent retarder leur avénement jusqu'au début du dix-septième siècle. Tous les progrès astronomiques et mathématiques qu'exigeait ce double essor étaient assez accomplis dans l'antiquité pour qu'il y pût surgir si l'opportunité philosophique et sociale eût alors été suffisante. Elle l'a seule retardé jusqu'au moment ou la révolution occidentale fit assez sentir l'épuisement de la synthèse absolue et le besoin d'élaborer une synthèse relative, dont ces deux conceptions connexes devaient fournir le premier type et degré. Rien n'empêche d'étendre la même explication à l'institution de la géométrie générale, spécialement liée à la régénération astronomique par l'essor de l'algèbre, et directement destinée à commencer la systématisation subjective.

Appréciées convenablement, les trois rénovations théoriques qui caractérisent la première moitié du dix-septième siècle se montrent doublement connexes, d'abord en vertu de leurs liens spéciaux, puis d'après leur commune subordination au mouvement universel. Sous leur impulsion combinée, la dernière phase de la révolution occidentale compléta la préparation scientifique qu'exigeait l'élaboration directe de la synthèse finale. Tous les progrès ainsi condensés dans les deux siècles extrêmes de l'initiation humaine pouvaient abstraitement surgir avant le moyen âge, sans excepter le calcul infinitésimal et la théorie de la gravitation, si l'impulsion concrète eût été dès lors possible. Retardés, non par impuissance, mais faute de besoin, ils se sont accomplis quand la situation humaine les a vraiment rendus nécessaires. Ils peuvent être mieux jugés en les groupant autour de la rénovation cartésienne, précédée du mouvement terrestre et de la législation planétaire, suivie du calcul transcendant et de la mécanique céleste.

Rapprochées ainsi, les cinq constructions théoriques qui dominent les deux derniers siècles de l'initiation humaine manifestent la connexité spontanée de l'essor mathématique avec l'ensemble de la préparation occidentale. A l'origine de cette évolution, le fondateur de la géométrie abstraite avait directement personnifié la liaison nécessaire entre la culture scientifique et l'élaboration philosophique. Pour constater que la spécialisation ultérieure des études positives n'a jamais altéré, chez ses dignes organes, leur relation normale avec le mouvement social, il suffirait de rappeler la noble vie et l'admirable mort du plus grand des purs géomètres. Tous ses vrais successeurs se montrèrent pareillement disposés à lier leurs efforts scientifiques à la rénovation philosophique et sociale que l'extinction de la théocratie fit toujours pressentir aux grandes âmes. On doit concevoir cette connexité, confuse mais pro-

fonde, comme la source secrète du zèle et de la persévérance qui dirigèrent l'élaboration des doctrines les moins intéressantes, pourvu que leur réaction logique fût assez sentie.

Quand on juge, dans son ensemble, la transition occidentale entre la théocratie et la sociocratie, on la voit toujours dominée par un instinct universel de l'avénement final de la sociabilité normale, dont la principale condition consistait à fonder la foi démontrable et le sacerdoce correspondant. Une heureuse indépendance des obligations systématiques avait spontanément permis aux poëtes de devenir les premiers organes d'une telle disposition, déjà caractérisée d'après les plus anciens chefs-d'œuvre. A leur suite, les philosophes entreprirent l'élaboration directe de la synthèse qui devait les rendre aptes à régler l'ensemble de l'existence humaine. L'avortement nécessaire de ces tentatives prématurées détermina les savants à concentrer leurs efforts vers la préparation spéciale qu'exigeait une telle construction, subordonnée surtout à l'essor mathématique. Il était impossible que ces derniers précurseurs du sacerdoce universel devinssent jamais insensibles aux aspirations sociales que la poésie et la philosophie avaient profondément développées dans le milieu correspondant. Toutes les déviations et dégradations académiques ne pouvaient empêcher les vrais savants de sentir que la phase finale de la révolution occidentale devait immédiatement aboutir à la systématisation universelle. Elaborée sous la seconde génération du siècle exceptionnel, la synthèse normale n'y trouva d'actives résistances que parmi les faux théoriciens, disposés à prolonger une anarchie spirituelle que l'aveugle sollicitude des gouvernements leur permettait d'exploiter, surtout chez le peuple central.

Écartant les prétendus héritiers des vrais géomètres, on reconnaît que l'évolution mathémathique a toujours conservé la tendance philosophique et la dignité sociale qu'elle reçut de ses

premiers promoteurs. Ses meilleurs progrès se sont nécessairement accomplis sous la phase finale de la grande transition qui devait conduire de la théocratie à la sociocratie. Leur connexité croissante avec le résultat général de la préparation humaine dut spécialement compenser l'influence, de plus en plus vicieuse, du régime dispersif. A l'avénement de la grande crise, tous les véritables savants accueillirent un ébranlement qui devait bientôt susciter l'élaboration décisive de la foi démontrable, après avoir complété sa préparation théorique. Bien que leurs habitudes analytiques ne leur permissent pas de seconder la construction synthétique, ils encouragèrent son essor direct, et le fondateur du positivisme dédia son traité philosophique aux deux contemporains qui représentaient le mieux les deux extrémités scientifiques. On doit finalement contempler l'ensemble du passé théorique, et surtout mathématique, avec autant de respect que d'admiration pour les organes de l'humanité dans la préparation abstraite de la systématisation universelle. Nous devons immédiatement incorporer à la synthèse normale tous leurs travaux essentiels, sans les énerver par des discussions indiscrètes, après les avoir seulement purgés des altérations secondaires qui les empêcheraient de converger vers une destination spontanément pressentie.

Préambule général.

Avec de telles dispositions, on peut beaucoup simplifier l'étude normale de la Logique, surtout en géométrie, d'après une digne subordination de l'homme à l'Humanité. Les habitudes ainsi contractées au début de l'initiation encyclopédique doivent ensuite se développer à mesure qu'on s'élève à des théories plus importantes et plus difficiles, moins relatives à la méthode qu'à la doctrine. Il faut toujours destiner les *démonstrations*, suivant l'étymologie de ce terme, à manifester l'enchaînement, sans avoir en vue une certitude qui, pouvant d'ailleurs être souvent directe, pourrait habituellement résulter de la foi.

J'ai spontanément donné, dans le chapitre précédent, un exemple décisif de ce régime didactique en y faisant un usage important d'une loi d'algèbre supérieure que l'algèbre élémentaire ne saurait aucunement fonder, quoiqu'elle puisse et doive l'employer. A la vérité, le théorème général sur le degré normal de l'équation résultée de l'élimination se déduit d'une doctrine qui sera suffisamment indiquée au chapitre suivant. La considération d'une telle connexité reste pourtant étrangère à la détermination que j'ai prise de caractériser cette théorie, dont la valeur logique m'a seule décidé, quoiqu'elle soit presque dépourvue d'efficacité scientifique. On peut compter que la loi qu'elle fournit m'aurait pareillement servi, quand même le travail didactique ne m'eût jamais conduit à manifester sa source, à laquelle la foi suppléerait toujours, comme elle le fait provisoirement, chez les jeunes disciples de l'Humanité. Nous devons aussi reconnaître que ce régime convient davantage à la géométrie qu'à l'algèbre, qui, purement relative à la méthode, comporte rarement l'utile intervention des théorèmes dépourvus de démonstration, c'est-à-dire de liaison, inductive ou déductive.

Une judicieuse appréciation du passé géométrique explique l'introduction des habitudes opposées d'après la fatalité qui força l'essor mathématique de surgir dans un milieu que l'ascendant métaphysique livrait aux sophistes disposés à contester les règles quelconques. Voilà comment les géomètres de l'antiquité se trouvèrent ordinairement obligés d'entourer toutes leurs notions d'un appareil argumentatif qui pût les préserver de telles atteintes. Affranchis de cette nécessité, malgré l'anarchie moderne, d'après les mœurs introduites, au moyen âge, sous la discipline catholique, les meilleurs géomètres du dix-septième siècle furent spontanément conduits à se dispenser de l'argumentation, en se bornant à marquer la filiation.

Si leurs successeurs ont autrement procédé, cela tient d'abord à l'usage croissant de l'algèbre dans une élaboration surtout destinée à développer les conceptions antérieures, puis à l'ascendant du régime académique qui livra la culture mathématique aux médiocrités laborieuses. On peut ainsi comprendre les difficultés qu'éprouva le positivisme à compléter et systématiser les habitudes didactiques que le moyen âge avait ébauchées sous la discipline catholique, dignement résumée par la sentence que j'ai choisie pour épigraphe du présent volume. Cette discipline s'était spontanément étendue de la théologie à la métaphysique en vertu de leur affinité dogmatique, mais sans avoir jamais embrassé la science, dont la nature ne comportait qu'une règle émanée de son propre sein. Il faut donc rapporter à la fondation connexe de la sociologie et de la religion de l'Humanité l'avénement décisif du vrai régime didactique, instinctivement surgi chez les plus éminents modernes. Avec les habitudes profondément enracinées parmi les occidentaux, ce régime aurait rencontré des difficultés insurmontables si l'universalité de la discipline positive n'eut pas lié son avénement à celui de la réorganisation morale et politique des populations avancées. La liaison résulta surtout du besoin de la culture encyclopédique, qu'on ne pouvait prescrire à l'âge mur sans l'appliquer à la jeunesse. Elle fit directement sentir que le vice principal des habitudes empiriquement contractées envers les études mathématiques consistait à développer l'esprit révolutionnaire dans l'initiation destinée à le surmonter.

Toute l'anarchie moderne est graduellement résultée de l'ascendant que la raison prit sur la foi sous la dernière phase du moyen âge, malgré la résistance du catholicisme, qui, surgi du raisonnement, en brisant la continuité sociale et mentale, ne pouvait éviter de tels conflits. A mesure que la discipline monothéique se dissolvait, l'individualisme se développait de ma-

nière à motiver, chez les géomètres, la conservation des habitudes propres à l'antiquité, parce que les sophismes ontologiques tendaient à prévaloir de nouveau. La situation est heureusement devenue inverse quand le positivisme a surgi ; car il a pu normalement transformer les mœurs empiriquement destinées à protéger l'esprit scientifique contre le joug théologique et le doute métaphysique. Elles tendaient, en persistant, à rendre impossible toute réorganisation spirituelle, en obligeant la foi démontrable à rester toujours démontrée ; ce qui ne saurait jamais être pleinement réalisé, même chez les meilleurs esprits convenablement cultivés. Sous un tel empirisme, les études destinées à préparer l'avénement universel du vrai pouvoir théorique se trouvaient finalement dirigées contre leur but social, au nom d'un besoin intellectuel mal compris.

Elles tendent, mentalement, à détourner de la filiation logique en absorbant l'attention par l'argumentation scientifique, où chaque examen se borne à constater la certitude d'une doctrine sans indiquer la marche de sa formation. Telle fut surtout la conduite du plus grand des purs géomètres, qui, n'osant assez se fier à la méthode infinitésimale alors naissante, se crut obligé d'exposer autrement les découvertes qu'elle lui fournit. A son exemple, mais sans ces motifs, le fondateur de la mécanique céleste altéra laborieusement son principal ouvrage, en y déguisant la filiation de sa doctrine pour se conformer à l'empirisme classique.

Rattachée à la religion de l'Humanité, l'éducation encyclopédique doit toujours tendre à développer la foi positive, au lieu d'encourager les discussions scientifiques, dont les vices intellectuels équivalent à leurs dangers moraux. Il faut systématiquement étendre à l'enseignement universel les habitudes par lesquelles les meilleurs théoriciens du dix-septième siècle ont spontanément annoncé l'état normal de la raison humaine.

Mieux appréciable quand les propositions sont réduites à des assertions bien coordonnées, l'enchaînement logique a plus d'importance, pour le public et pour les penseurs, que les preuves scientifiques. Attribuées à l'Humanité, suivant une saine appréciation de leur avénement historique, les doctrines positives acquièrent une autorité dogmatique qui peut toujours suffire aux vrais croyants. Sous ce régime, la démonstration aspire à manifester la filiation, sans se préocuper de la certitude, dont la vérification exigerait souvent des développements secondaires, qui feraient bientôt perdre de vue l'objet principal.

Basées sur des motifs sociaux, les habitudes propres au raisonnement normal obtiennent un ascendant que leurs fondements intellectuels n'auraient jamais pu leur procurer. On doit regarder la religion universelle comme étant surtout distinguée des religions partielles par son aptitude, aussi spontanée que systématique, à combiner, de cœur et d'esprit, ces deux sources de l'autorité, d'après la nature de son principe général. Religieusement jugés, les appels absolus à la démonstration constituent des émeutes des vivants contre les morts, en aspirant à faire prévaloir le raisonnement individuel sur la raison collective proclamée par les interprètes de l'Humanité. Nous devons d'abord considérer une telle conduite comme directement incompatible avec l'ordre normal, puisqu'elle émane d'une disposition défiante, sinon hostile, envers le sacerdoce fondamental. Elle doit même être ensuite jugée radicalement contraire à la religion positive, en aspirant à placer l'Homme en relation immédiate avec le Monde, sans l'intervention nécessaire de l'Humanité, seule source réelle de l'instruction autant que de l'action.

Rapprochées de la discipline théologique, ces habitudes, que l'empirisme géométrique tendit à perpétuer, confirment l'infériorité de l'état révolutionnaire envers l'état rétrograde. Il faut

regarder les dieux, et puis leur unique héritier, comme ayant provisoirement lié l'Homme au Monde, avant que l'Humanité fût assez développée pour exercer directement l'office indirectement rempli par ses lieutenants objectifs et tuteurs subjectifs. Voilà comment la discipline théologique se trouvait mieux conforme à l'état normal que le régime didactique émané de l'empirisme scientifique. Étendue au delà de l'évolution préparatoire, l'influence de ce régime devint purement révolutionnaire, et constitua le principal obstacle à l'ascendant du positivisme, ainsi troublé par le mouvement d'où sa foi dut d'abord émaner. Si le but social n'avait pas surmonté les impulsions intellectuelles, une préparation surtout destinée à fournir la base théorique du vrai sacerdoce l'eût finalement empêché de se développer, en éliminant les dieux sans y substituer l'Humanité, ce qui fut bientôt jugé contradictoire.

Examiné dans son ensemble, le régime didactique fondé sur la confiance systématisée est irrévocablement motivé d'après le concours normal des besoins de l'intelligence avec les exigences de la sociabilité. Sa nature le rapproche davantage de la discipline spontanément ébauchée au moyen âge que des habitudes empiriquement développées par la révolution occidentale. Afin de mieux indiquer cette affinité, je l'ai directement formulée en joignant, au titre de ce volume, les deux maximes, essentiellement équivalentes, qui définissent le régime catholique et la systématisation positiviste de l'entendement humain. Moralement comparées, les deux disciplines deviennent plus conformes, puisqu'elles sont également fondées sur la culture continue du cœur, sans laquelle l'esprit ne pourrait assez goûter les démonstrations que comporte sa soumission nécessaire. Il faut finalement regarder le régime didactique du positivisme comme ayant naturellement exigé l'élaboration affective qui fournit la base directe de la religion de l'Humanité.

Voilà comment l'indivisibilité propre à la vraie synthèse ne permit pas de réformer l'enseignement de la géométrie sans avoir essentiellement institué la régénération universelle. On ne peut réellement accomplir que par la vénération la transformation nécessaire des aspirations à la foi démontrée en inspiration de la foi démontrable. Cette intervention mentale du plus usuel des trois instincts sympathiques se trouve normalement liée à celle des deux penchants entre lesquels il est cérébralement placé, tant dynamiquement que statiquement. Alors on conçoit la connexité directe entre l'établissement du vrai régime didactique et l'avénement de l'unité réelle, individuelle et collective à la fois. Tels sont les motifs spéciaux qui doivent toujours disposer le sacerdoce positif à seconder, et même à stimuler, la sollicitude des mères envers le prolongement assidu de la culture morale pendant l'initiation encyclopédiqne, dont le succès en dépend. Un vicieux empirisme fit particulièrement participer les géomètres au désastreux dédain que les pratiques affectives et religieuses inspirèrent de plus en plus à tous les occidentaux depuis la fin du moyen âge. Sous la discipline positive, le sexe qui nous transmit les mœurs chevaleresques reconnaîtra que le devoir et l'intérêt du pouvoir théorique concourent à faire dignement prévaloir le cœur sur l'esprit pendant l'initiation encyclopédique, même dès son début.

Il faut maintenant compléter cette appréciation nécessaire en indiquant la règle spécialement destinée à prévenir l'exagération d'un tel régime. C'est de l'Humanité que doit toujours procéder l'enseignement normal, qui conduit à nous mieux lier à l'ensemble de nos ancêtres, au lieu de développer un isolement non moins irrationnel qu'immoral. Tous les efforts du sacerdoce y sont dirigés vers l'établissement d'une digne filiation, autant exempte de pédantisme que de défiance. Un tel

enchaînement doit toujours tendre à consolider et développer la loi de continuité, qui résume à la fois la philosophie, la morale, et même la poésie, d'après la vraie théorie de l'unité fondée sur l'union. Son application didactique résulte de la concordance nécessaire entre la filiation dogmatique et la succession historique, vu la conformité fondamentale de l'initiation personnelle avec l'évolution sociale.

Tous ces motifs concourent à régler l'essor des démonstrations propres à l'éducation encyclopédique d'après le besoin de faire assez ressortir l'enchaînement théorique pour que la continuité ne soit jamais altérée. On doit maintenant reconnaître que cette loi prescrit un développement plus spécial à mesure que le domaine est moins concret, quoique l'algèbre elle-même soit quelquefois dispensée de toute preuve, inductive ou déductive. Une saine exposition de la géométrie, surtout préliminaire, pourrait souvent éviter des démonstrations que les anciens jugeaient indispensables, parce que la simplicité des notions correspondantes permet leur acquisition isolée et spontanée. Rapportées à la règle précédente, ces preuves doivent quelquefois être normalement maintenues, sous de meilleurs modes, afin de faire assez ressortir la liaison mutuelle des faits séparément constatés. Si l'on n'a besoin d'aucune déduction pour reconnaître la propriété minimum de la route perpendiculaire, il convient que l'emploi d'un point symétrique, envers le cas élémentaire, ramène ce fait à celui du chemin minimum entre deux points.

A l'aide d'une telle règle, dont l'application, comme celle de tout autre, dépend de l'organe personnel, on peut beaucoup simplifier l'étude normale de la géométrie, surtout préliminaire, en évitant également la rigueur pédantesque et le vague relâchement. Nous pourrons ainsi perfectionner la continuité théorique sans avoir jamais besoin d'excéder les étroites

limites prescrites à cet enseignement par le plan général de l'éducation encyclopédique. Guidés, d'après ces explications nécessaires, vers le vrai régime didactique, nous devons maintenant commencer son élaboration directe en instituant le préambule normal sur lequel repose l'ensemble de la géométrie préliminaire. Les deux parties essentielles de ce préambule consistent dans les théories respectivement propres, d'abord à la ligne droite, puis à la surface plane. Elles sont à la fois complétées et liées par la théorie des angles, rectilignes ou dièdres, normalement placée après les deux autres, suivant la quinzième loi de la philosophie première.

Conformément à la règle précédente, ce préambule doit naturellement commencer par un hommage spécial au grand géomètre déjà cité comme ayant seul perfectionné l'enseignement mathématique avant l'avénement du positivisme. Le principal constructeur de la mécanique céleste ne dédaigna pas d'ouvrir sa noble carrière en élaborant le meilleur traité didactique sur la géométrie préliminaire. Écartant, pour la première fois, l'empirisme classique, il fit dignement ressortir la filiation logique des principales notions établies dans l'antiquité. Rapidement altérée par l'anarchie académique, cette ébauche spontanée de la régénération didactique en a spécialement préparé l'avénement systématique. On vit cette impulsion faiblement prolongée chez deux géomètres secondaires, l'un plus pratique et plus synthétique, l'autre plus théorique et plus analytique, après lesquels l'enseignement mathématique se dégrada continuellement jusqu'à la rénovation universelle.

On peut coordonner la théorie fondamentale de la ligne droite en la rattachant à la mesure indirecte des longueurs rectilignes. Sous cet aspect, le préambule géométrique se trouve pleinement motivé par la définition générale de la géométrie, où les comparaisons quelconques sont finalement réductibles à

celles des lignes droites. Tout le système des notions relatives à la mesure de l'étendue doit donc reposer sur la détermination du rapport de deux longueurs rectilignes. Il est souvent impossible de mesurer une ligne droite par la superposition immédiate de l'unité correspondante : trop de grandeur ou de petitesse, une situation inaccessible, ou même une direction défavorable, suffisent pour empêcher une telle comparaison. A vrai dire, on ne peut guère l'accomplir, avec la précision convenable, qu'envers des longueurs artificiellement instituées afin de bien satisfaire à l'ensemble des conditions qu'elle exige.

Rapportée à cette destination, la théorie fondamentale de la ligne droite doit surtout consister dans l'étude des assemblages rectilignes, dont certains éléments peuvent être déduits des autres en vertu de leurs relations fondamentales. Elaborée complètement, cette question comporte deux solutions générales, la première graphique, la seconde algébrique, respectivement instituées aux deux extrémités de la géométrie préliminaire. Pour concevoir l'enchaînement de ces deux procédés, il suffit de bien distinguer les deux modes propres au premier, qui consiste à construire un polygone, tantôt égal, tantôt semblable, à la figure considérée. A peine applicable aux cas vraiment usuels, le mode fondé sur l'égalité doit être surtout étudié comme préparation nécessaire de celui qui construit par similitude. Surgie de celui-ci, la solution algébrique en émane d'après les deux lois, angulaire et linéaire, que le fondateur de la géométrie abstraite découvrit envers les triangles rectilignes.

Dans la première de ces lois connexes, on peut aisément condenser l'ensemble des notions relatives au parallélisme, qui, complétant la théorie de l'égalité, prépare celle de la similitude. Il faut dogmatiquement fonder cette loi sur l'explication conjecturale que la sociologie institua pour l'apprécier historiquement, en la rattachant à la considération des aires, source

nécessaire de la géométrie. La démonstration, assez indiquée au tome troisième de mon principal ouvrage, fournit l'occasion d'introduire, dès le début du préambule géométrique, l'usage spontané du principe infinitésimal. Elle peut être utilement complétée en appréciant le sophisme algébrique où l'empirisme académique manifesta la dégradation métaphysique de l'esprit mathématique, en s'efforçant de donner une source purement abstraite à la sommation des angles d'un triangle rectiligne. Grossièrement fondé sur l'homogénéité méconnue, ce prétendu raisonnement pourrait autant prouver l'existence d'une relation constante entre les trois côtés qu'entre les trois angles. Normalement appréciée, cette déviation d'un géomètre, passagèrement investi d'un grand crédit, suffirait pour indiquer combien la science fondamentale avait spécialement besoin de la régénération positiviste. On voit ainsi coexister les raisonnements vagues et les argumentations minutieuses chez celui qui commença la rétrogradation anarchique ci-dessus signalée envers l'enseignement mathématique.

Il faut rattacher toutes les équations géométriques à la loi qui représente le supplément d'un angle comme équivalent à la somme des deux autres dans tout triangle rectiligne. Graduellement transformé, ce théorème fondamental peut bientôt conduire à la relation linéaire qui constitua la théorie de la similitude. Nous ne pouvons historiquement accepter la démonstration dogmatiquement consacrée par le géomètre didactique de l'antiquité pour la proportionnalité des côtés entre deux triangles équiangles convenablement superposés. Étendue sans effort jusqu'à cette relation, la théorie du parallélisme, condensée dans la loi des angles, en manifeste la source normale, tant dogmatique qu'historique. On doit même enseigner comme linéaire l'équation qui s'en déduit entre les côtés de tout triangle rectangle, quoique la géométrie théocratique l'ait directement

trouvée d'après la considération des aires, que l'étude normale convertit en vérification spéciale.

A cette occasion, il faut convenablement caractériser l'imperfection algébrique des proportions. Ce premier mode géométrique du calcul des relations est si peu propre à seconder la déduction que l'antiquité ne pouvait rattacher la loi théocratique à la source linéaire qui doit normalement prévaloir envers un tel théorème. Quand on compare la situation mentale des castes sacerdotales avec celle des jeunes disciples de l'Humanité, la discordance ainsi surgie entre l'exposition dogmatique et l'avénement historique se trouve bientôt dissipée. Un premier essor des études algébriques suffit pour disposer tout esprit juste à l'accomplissement de cette déduction. Elle offrait des difficultés presque insurmontables aux meilleures intelligences quand il fallait ajouter deux proportions préalablement transformées en équations.

La similitude des triangles, normalement rattachée à la loi des angles, comporte plusieurs modes, équivalents mais distincts, qui correspondent aux divers cas de détermination. Il faut regarder cette théorie comme consistant à reconnaître qu'une moitié des conditions propres aux triangles semblables résulte de l'autre moitié. Cet enchaînement fournit trois théorèmes usuels, qui combinent convenablement la proportionnalité des côtés et l'égalité des angles, de manière à susciter autant de constructions de similitude. Elles doivent ensuite s'étendre à tous les polygones plans, où la similitude est toujours réductible à celle des triangles qui les composent, sans que des conditions directes puissent rentrer les unes dans les autres, vu la moindre liaison d'éléments plus nombreux. Toutes les figures rectilignes ne peuvent jamais comporter que trois relations distinctes entre les côtés et les angles, quelque multipliés qu'ils y soient ; ce qui doit naturellement ramener au type

triangulaire toutes les notions sur la similitude et l'égalité.

Dans ce début des études géométriques, il faut normalement indiquer l'appréciation concrète des bases propres à la théorie subjective des nombres, abstraitement instituée en arithmétique. On voit les trois nombres sacrés distinctement représentés et spontanément combinés par l'élément des assemblages géométriques, qui réunit les trois images de côté, d'angle et de triangle. Les relations angulaires consacrent le nombre moyen, d'abord entre les angles supplémentaires, puis entre tous ceux d'un même triangle, et finalement envers la demi-somme des suppléments de ceux de tout polygone plan. Cette représentation géométrique des éléments numériques devient linéaire pour le dernier, qui toujours détermine la subordination mutuelle des parties d'un assemblage rectiligne. Il faut signaler ces intimes rapprochements entre l'abstrait et le concret comme la source naturelle des illusions métaphysiques sur la liaison mystérieuse de la géométrie avec l'arithmétique, quand on chercha la cause au lieu de la loi d'un tel ordre de faits mathématiques.

Instituée d'après leur décomposition en triangles, la similitude des polygones plans peut aussi se juger et se construire suivant deux autres modes plus usuels. Nous pouvons d'abord instituer le second polygone d'après des sommets déterminés par des triangles, à base commune, respectivement semblables à ceux qui dérivent, envers une base homologue, des sommets du premier. On peut ensuite rattacher la similitude à la parité d'aspect pour un point de vue convenable, en vertu du parallélisme simultané que comportent alors les côtés correspondants. Placés ainsi, les sommets se joignent à leurs homologues par des lignes toutes dirigées au centre de comparaison, d'où leurs longueurs respectives offrent une constante proportionnalité, qui, réciproquement, suffit à la vérification, et même à l'institution, de la similitude. Étendues aux figures curvilignes, ces

deux propriétés générales y conviennent mieux que la définition directe et le théorème fondamental, parce qu'elles sont naturellement indépendantes du nombre et de la grandeur des éléments primitifs.

Sans insister davantage à cet égard, il faut terminer la première partie du préambule géométrique par quelques réflexions philosophiques sur l'irrationnalité des figures dans l'enseignement normal de la Logique, qui doit autant les éviter que les lettres et les chiffres. A des disciples synthétiquement disposés, il convient de réserver l'usage personnel des divers moyens analytiques qui peuvent assister la méditation mathématique. Nous ne devons jamais craindre que des âmes, habituées, dès l'enfance, à goûter les chefs-d'œuvre poétiques, et journellement vouées au culte affectif des images les plus variées, puissent éprouver aucun embarras à suivre un discours géométrique sans figures matérielles. Un heureux usage montra, dans l'évolution de la biologie, quelle clarté peuvent ainsi trouver les descriptions les plus complexes, surtout chez l'incomparable théoricien que le calendrier occidental fait dignement présider à la science moderne. Mieux appréciée, quand les préventions chrétiennes furent assez écartées, l'interdiction religieuse des images parmi les musulmans n'y saurait jamais indiquer ou susciter l'affaiblissement de l'imagination.

Conformément à ces épreuves spontanées, individuelles et collectives, l'enseignement géométrique peut et doit systématiquement s'accomplir sans figures quelconques. Après avoir suivi des leçons d'arithmétique et d'algèbre dépourvues de chiffres et de lettres, les jeunes disciples de l'Humanité n'éprouveront aucun embarras à comprendre la géométrie indépendamment des dessins ou modèles. L'emploi des images extérieures doit seulement assister les méditations privées qui succèdent, hors de l'école, à l'exposition publique. Il faut même

recommander aux élèves d'y recourir le moins possible, et d'aspirer, par des efforts graduels, à s'en passer entièrement. Dans l'état normal de l'Humanité, les figures, planes ou solides, ne sont vraiment nécessaires que pour l'exécution, et jamais envers la conception. On a souvent reconnu leur tendance à comprimer ou déranger l'essor naturel des images intérieures à l'égard des cas géométriques les plus compliqués, où la pratique de l'enseignement fit toujours reconnaître le danger des modèles en relief. Si donc les dignes professeurs s'abstiennent aussi des figures planes, il ne font que compléter et systématiser, pour l'état normal, une règle didactique que l'évolution préliminaire ébaucha d'une manière spontanée mais décisive.

On doit finalement regarder l'usage scolastique des images extérieures comme indiquant l'imperfection des descriptions du maître ou l'insuffisance des efforts de l'élève. Rapprochées des images intérieures qu'exige l'élaboration géométrique, active ou passive, celles que suscitent le culte intime et les études poétiques offrent une complication supérieure avec une plus grande variété. Leur efficacité journalière, sans aucun effort, chez les jeunes âmes dignement exercées, dissipe toute incertitude sur la convenance et la possibilité d'instituer ainsi l'enseignement de la géométrie. Alors il doit spécialement perfectionner l'essor général de l'imagination humaine, en y développant, outre la clarté commune à tous les cas, la précision, et même la consistance, propres à l'exercice géométrique. Sous la funeste assistance des dessins ou modèles, la logique des images reste sans culture directe et systématique dans le domaine le mieux apte à consolider et compléter son évolution concrète par son élaboration abstraite.

Une telle indication doit ici suffire pour motiver, dès le début du régime encyclopédique, un mode didactique dont la rationalité n'est pas contestable, sans attendre que les générations

suivantes en aient manifesté la salutaire efficacité. La réforme systématique de l'enseignement mathématique, en y supprimant l'usage public des chiffres, des lettres, et des figures, constate et consolide un progrès universel dans la constitution mentale de l'humanité. Tous les exercices spontanément résultés de l'évolution préparatoire ont amélioré, suivant la loi de l'hérédité, la nature cérébrale des Occidentaux. On doit regarder leur imagination comme étant, dès la naissance, supérieure à celle des populations, même blanches, qui n'ont pas été suffisamment modifiées par la culture polythéique suivie de la discipline monothéique. Rien ne peut donc empêcher l'introduction occidentale d'un mode didactique destiné bientôt à devenir graduellement universel, pour élever partout l'enseignement philosophique au niveau des études poétiques.

Rapprochés des Occidentaux par la similitude sociale autant que d'après la contiguïté de séjour et la conformité de race, les musulmans constituent, sous un aspect quelconque, les intermédiaires normaux d'une telle propagation. Ils se trouvent spécialement préparés à la réformation qu'exige l'enseignement géométrique d'après l'interdiction religieuse qui leur est propre envers toute image extérieure. Cette discipline monothéique, scrupuleusement pratiquée, pendant treize siècles, par des populations que le polythéisme avait assez élaborées, les a profondément adaptées à l'essor universel de la véritable imagination, en les poussant à développer la vie subjective. On peut donc regarder le second tiers de la race blanche comme mieux préparé que le premier aux usages didactiques qu'exige la systématisation finale. Si les images extérieures convinrent au culte des monothéistes chez lesquels la division des deux puissances fut exceptionnellement ébauchée, leur interdiction ne convint pas moins parmi ceux qui conservèrent la confusion propre au théologisme.

Fondée sur la théorie de la ligne droite, la seconde partie du préambule géométrique vient normalement compléter la première, en instituant la théorie de la surface plane. Une liaison directe et générale surgit entre elles d'après leur destination commune pour la mesure, algébrique ou graphique, des longueurs rectilignes. Nous avons tacitement supposé jusqu'ici que l'assemblage linéaire dont l'étude institue la solution quelconque d'un tel problème était seulement composé d'éléments tous compris dans un même plan. D'après la nature de cette question, ce cas, quoique particulier, doit être plus développé que le cas général, auquel d'ailleurs il sert de base normale. On peut aussi reconnaître que la théorie des figures rectilignes est essentiellement relative au type triangulaire, où la condition plane se trouve spontanément remplie.

Rapportée aux polygones quelconques, cette étude fait bientôt sentir la nécessité de la compléter, surtout envers la similitude, par l'examen des assemblages linéaires dont les triangles élémentaires constituent des plans différents. Élaborées directement, ces figures doivent ordinairement caractériser les cas naturels, tandis que les groupes plans ne sont essentiellement propres qu'à des types artificiels, auxquels on s'efforce de ramener les autres. Toutes les solutions du problème fondamental sur la mesure indirecte des longueurs rectilignes resteraient donc insuffisantes sans leur extension aux assemblages gauches. On voit ainsi confirmer la nécessité de renoncer, dès la première partie du préambule géométrique, aux images extérieures, dont l'usage devrait déjà cesser envers la seconde, à la fin de la même semaine. Si les maîtres et les élèves employaient cette vicieuse assistance pour étudier la ligne droite et les polygones, ils deviendraient aussitôt inconséquents en s'abstenant d'y recourir dans la théorie plus difficile de la surface plane des polyèdres.

A l'égard du plan, l'étude systématique est essentiellement réductible, comme en tout autre cas, aux divers modes que comporte sa génération par le mouvement d'une ligne. L'enseignement normal doit utiliser cette occasion de faire naturellement connaître, dès le début, les principaux modes de la génération des surfaces quelconques, d'où doit finalement résulter la taxonomie géométrique. Tous ceux qui sont vraiment usuels peuvent exceptionnellement convenir au plan, ainsi classé parmi les différentes familles de surfaces. Une facile modification le fait directement rentrer dans celles qu'on a collectivement qualifiées de *cylindriques*, faute d'une meilleure dénomination. Si la base ou directrice y devient rectiligne, la génératrice produit un plan, qui se distingue des autres cylindres en ce qu'il comporte une infinité de génératrices différentes.

Nous pouvons aussi ranger le plan parmi les surfaces dites *coniques*, puisque leur génération lui convient, quand la ligne fixe est droite, auquel cas le sommet, normalement unique, peut, exceptionnellement, résider en un point quelconque du cône. Une comparaison plus générale classe la surface plane dans le groupe, plus vaste, de celles qui doivent être collectivement qualifiées de *rectilignes*, comme étant engendrées par le mouvement quelconque d'une ligne droite. Pour que leur génération soit assez définie, il faut toujours assujettir la génératrice à trois conditions de fixité, qui peuvent constamment équivaloir à l'obligation simultanée de glisser sur trois directrices. Ce mouvement ne produit pas un plan si ces bases deviennent toutes rectilignes, quoique la surface plane puisse rentrer dans le type ainsi construit. Il reste alors à modifier ce cas remarquable en supposant que chaque directrice rencontre les deux autres, dont l'une devient exceptionnellement inutile. Après avoir ainsi généralisé les divers modes rectilignes de la formation du plan,

il faut compléter son appréciation en l'agrégeant au groupe, plus varié, des surfaces *circulaires*, qui résultent du mouvement quelconque d'un cercle dont le rayon peut simultanément changer. Leur plus simple famille, celle des *corps ronds*, comprend le plan, quand le méridien est une droite perpendiculaire à l'axe, lequel peut alors occuper une infinité de situations, suivant l'exception toujours due à l'uniformité qui caractérise le plan.

Comme ensemble des points équidistants de deux pôles, le plan comporte une cinquième définition, aisément réductible à la précédente, en faisant tourner autour de cet axe la droite dirigée, de son milieu, vers le point décrivant. On peut directement constater la nature de la surface ainsi produite, d'après le caractère fondamental du plan, de permettre, en tous sens, l'entière application d'une ligne droite. Réunissant par une droite deux positions quelconques du point décrivant, il devient facile de reconnaître que tout autre point de la même ligne se trouve pareillement équidistant des deux pôles, vu l'égalité respective des triangles dirigés de chaque pôle aux divers points combinés. Telles sont, parmi les cinq générations du plan, les deux définitions équivalentes qui seules exigent une véritable démonstration pour devenir pleinement appréciables. Elles reproduisent, sous de nouvelles formes, l'indétermination exceptionnelle qui toujours caractérise le plan, où l'axe peut être une quelconque des perpendiculaires ; les pôles sont séparément arbitraires pourvu qu'ils soient mutuellement symétriques.

Une telle série de générations fait assez connaître les propriétés essentielles du plan ; elle n'a besoin de complément qu'envers le parallélisme et la perpendicularité. Les notions secondaires qui s'y rapportent peuvent être aisément groupées, en évitant d'ériger en considérations distinctes les divers inci-

dents d'une même appréciation. Il faut toujours ramener la comparaison de deux plans à celle de deux droites, en caractérisant leur parallélisme par celui de deux lignes de l'un envers l'autre, et leur perpendicularité par celle d'une droite de l'un à l'égard de l'autre. Voilà comment surgit, entre ces deux cas, une distinction remarquable, qui n'a pas d'analogue dans la théorie de la ligne droite, où la perpendicularité n'est pas moins unique que le parallélisme. On achève d'apprécier ces deux dispositions en les rapprochant, d'après l'obligation des plans parallèles d'avoir la même perpendiculaire, d'où résulte la détermination de la plus courte distance de deux droites quelconques.

Succédant à l'étude directe des propriétés du plan, celle des angles polyèdres constitue, dans la seconde partie du préambule géométrique, un nouvel élément essentiel, dont la première ne pouvait offrir l'équivalent. Un tel ordre de notions fournit l'intermédiaire normal entre l'appréciation de la surface plane et celle des polyèdres. Bien institué, cet examen devient essentiellement réductible au cas de l'angle trièdre, d'où l'on peut déduire tout ce qui concerne les angles plus composés. Il consiste surtout à reconnaître que les six éléments, rectilignes ou dièdres, d'un tel assemblage angulaire, y présentent une connexité non moins intime que celle des six éléments d'un triangle. Toutefois, l'exacte comparaison des deux types suscite une distinction importante, où, sous le nom de *symétrie*, on reconnaît une égalité sans coïncidence, qui ne peut exister dans les figures planes.

Généralisé convenablement, le caractère fondamental des angles trièdres, dont la plus grande face est moindre que la somme des deux autres, consiste, envers les assemblages plus composés, en ce que la somme des faces y reste toujours inférieure à quatre angles droits. Étendue aux corps entière-

ment limités, cette loi fournit la source d'une importante notion de la géométrie ancienne sur les polyèdres réguliers, vu l'accroissement des angles réunis à chaque sommet, à mesure qu'ils proviennent de polygones plus complexes. Nous pouvons seulement remplir les conditions de la régularité des trois manières différentes avec des faces triangulaires, dont trois, quatre, ou cinq se groupent aux sommets du corps, ainsi formé de quatre, huit, ou vingt triangles. Un examen semblable envers les polygones suivants exclut déjà l'hexagone, et constate l'existence de deux autres polyèdres réguliers, respectivement composés de six quarrés et douze pentagones, trois à chaque sommet. Sous cet aspect, la seconde partie du préambule géométrique développe l'interprétation concrète instituée par la première envers les nombres élémentaires : quatre correspond à la structure du plus simple polyèdre, et cinq à la diversité des corps réguliers.

Il reste à compléter la théorie des surfaces planes en étendant aux polyèdres les lois de la similitude, d'abord surgies pour les polygones. La considération des formes prismatiques, et surtout pyramidales, doit normalement lier les deux cas extrêmes, par l'examen de corps dont la diversité se trouve essentiellement réduite à celle de leurs bases. A l'égard de ces deux cas intermédiaires, la pleine similitude exige seulement celle des trois faces respectivement assemblées en l'un des sommets de la base polygonale. Rattachée à ce préambule spécial, l'appréciation générale résulte de la décomposition nécessaire des polyèdres semblables en pyramides semblables, analogue à celle des polygones en triangles. Elle permet de toujours réduire les conditions de la similitude au plus petit nombre possible ; ce qui constitue la destination normale d'une telle théorie, dès lors capable de constater et de produire cette corrélation.

On peut aisément étendre aux polyèdres les deux propriétés générales qui complètent ci-dessus la théorie des polygones semblables. Construits, d'après une commune base, par des tétraèdres propres à chaque sommet, les triangles qui composent les faces de premier polyèdre fournissent au second des faces semblables et pareillement inclinées, si les tétraèdres de l'un ressemblent à ceux de l'autre. Une équivalente extension devient facilement appréciable envers le dernier théorème, quand les deux polyèdres sont placés dans la situation parallèle, toujours applicable aux cas de similitude. Les lignes de jonction des sommets homologues y vont toutes aboutir au centre de comparaison, d'où leurs longueurs respectives offrent, avec plus d'efficacité, la même proportionalité caractéristique que dans le cas polygonal. Il faut pareillement apprécier l'aptitude spontanée des deux lois complémentaires à s'étendre directement aux surfaces courbes, pour y vérifier ou construire la similitude.

Voilà comment, après avoir établi les notions par lesquelles la théorie du plan diffère de celle de la ligne droite, on doit convenablement généraliser les considérations communes aux deux parties essentielles du préambule géométrique. Il faut terminer la seconde en reproduisant, sous un nouvel aspect, les indications propres à la fin de la première sur l'interdiction normale des figures quelconques dans l'enseignement encyclopédique. Notre étude des polyèdres fournit des motifs spéciaux à l'appui des réflexions suscitées par les polygones, où du moins les dessins pouvaient exactement représenter la réalité, tandis qu'ils la dissimulent ou l'altèrent envers le cas le plus complexe. Convenablement écartées de la seconde partie du préambule géométrique, les images extérieures cessent ainsi de convenir à la première, toujours mêlée à l'autre et plus simple. Une saine appréciation de l'ensemble du positivisme fait aussitôt

sentir combien il importe que l'éducation encyclopédique y systématise, de bonne heure, le développement de la vie subjective, sur lequel repose le culte, public et privé, de l'Humanité. Les images extérieures y doivent toujours avoir une destination esthétique, et jamais un but scientifique : elles y sont employées à susciter des émotions, sans suggérer des notions, qui peuvent constamment surgir en dedans, d'après leurs objets, sauf les besoins pratiques. On ne saurait maintenant douter que, sous le régime empirique, les principales difficultés propres aux études géométriques fussent surtout dues à l'insuffisante activité de l'imagination chez les maîtres et les élèves, par suite du recours aux dessins ou modèles.

Après avoir suffisamment apprécié la ligne droite et la surface plane, le préambule général de la géométrie préliminaire doit se compléter en instituant la mesure des angles, normalement liée aux deux autres théories. Mais ce complément nécessaire se trouve naturellement composé de deux cas successifs, suivant que les angles sont rectilignes ou dièdres, et précédé des notions fondamentales sur les propriétés du cercle, unique source d'une telle détermination. Nous devons séparément caractériser, suivant leur enchaînement normal, ces trois éléments essentiels de la théorie destinée à terminer le préambule géométrique. Il faut donc considérer, en premier lieu, les principales propriétés de la forme circulaire, suivant la loi d'équidistance envers le point central, directement emanée de l'observation à l'égard de la courbe plane uniformément courbée. La parfaite uniformité fait aussitôt surgir le caractère qui, d'après la comparaison avec la ligne droite, la distingue le mieux des figures les plus analogues, en indiquant sa symétrie en tous sens autour du centre.

Rapproché de la ligne droite suivant cette uniformité, d'où résulte la constante similitude, le cercle s'y trouve aussi lié par

un attribut commun, quoique inégal, en ce que ces deux cas sont les seuls où le nombre de points déterminant ne soit jamais reproduit ailleurs. Étendue à quatre conditions, la détermination comporte la même règle envers une foule de types différents, dont plusieurs doivent être normalement considérés en géométrie préliminaire ; et la multiplicité des figures croît davantage que celle des points. Caractérisés seuls par deux et trois points, les cas rectiligne et circulaire complètent, sous un nouvel aspect, l'appréciation concrète des nombres sacrés en les liant à l'attribut exceptionnel des figures uniformes. Tous les rapprochements ainsi surgis entre la ligne droite et le cercle font aussitôt sentir que la taxonomie géométrique ne doit jamais les séparer, malgré le cours indéfini de l'une et la clôture de l'autre, liée à sa courbure uniforme. On peut déjà prévoir que, parmi l'infinité de types capables d'embrasser le cercle, le meilleur classement consiste à le ranger, entre la ligne droite et l'hélice, dans les figures uniformes, divisées d'après le nombre de points déterminant.

Étudiée sous un autre aspect, la corrélation des deux formes élémentaires fait spontanément surgir, en géométrie préliminaire, la notion de *contact*, qui, destinée à devenir générale, doit directement comporter l'extension convenable. Dès sa première ébauche, il y faut soigneusement éviter les notions qui troubleraient sa généralisation ultérieure, sans pourtant négliger les modifications propres aux courbes fermées et convexes. Il devient aisé de concilier ces conditions, en définissant d'abord la tangente d'après la rotation d'une sécante dont la seconde intersection se rapproche indéfiniment de la première, pour faire ensuite sentir quand conviennent la translation et l'unité de rencontre. Telle est la seule recommandation philosophique qu'exige le second degré de l'ébauche du cercle, où la loi spéciale des tangentes résulte immédiatement de la pro-

priété fondamentale. Successivement liées à cette loi, plusieurs notions secondaires viennent compléter cette étude, soit quant à la détermination des tangentes, soit envers leur usage pour celle du cercle, en substituant ou mêlant les contacts aux passages.

Heureusement liée, par sa nature, à l'uniformité circulaire, la mesure des angles ne put jamais offrir d'embarras dans le cas fondamental, d'où tous les autres furent aisément déduits, quand la théorie rectiligne fut assez développée. Un examen général de cet office du cercle y fait aussitôt sentir la liaison normale entre l'aptitude théorique et l'efficacité pratique, également dues à l'uniformité d'une telle courbe plane. Mesurés ainsi, les angles sont, au centre, proportionnels aux arcs, et ceux-ci se comparent comme des lignes droites, si leurs rayons sont égaux. On ne pourrait obtenir cette proportionnalité d'après aucune autre ligne ; et, quand même on l'y supposerait, elle serait stérile pour la mesure des angles, dont la comparaison directe deviendrait plus facile que celle de tels arcs. Source commune de l'aptitude et de l'efficacité du cercle envers cet office, l'uniformité, qui caractérise cette courbe, la lie profondément à l'ensemble du préambule géométrique, quoiqu'il doive surtout concerner la ligne droite et le plan.

Il faut utiliser cette occasion pour instituer la théorie générale de la proportionnalité, qui peut éclaircir et simplifier tous les cas spéciaux. Nous devons toujours regarder la proportionnalité de deux grandeurs quelconques comme due au concours de deux conditions, entièrement indépendantes et souvent séparées. Elles consistent dans la correspondance constante, d'une part des égalités, d'une autre part des sommes. Réunies, ces deux conditions assurent la proportionnalité des grandeurs comparées, d'abord commensurables, puis même incommensurables ; tandis que, séparées, chacune devient toujours in-

suffisante. Toute l'appréciation propre à chaque cas de proportionnalité doit donc se réduire à constater l'accomplissement des conditions fondamentales. On peut ainsi considérer directement les motifs spéciaux, sans reproduire les raisonnements généraux qui, de ce double caractère, déduisent la proportionnalité. Suivant cette règle, les arcs de cercle ne sont pas proportionnels à leurs cordes, la seconde condition n'étant point remplie, quoique la première le soit ; tandis qu'une pareille conclusion conviendrait, en sens inverse, à la mesure des angles par des lignes droites.

D'après le cas fondamental, où le sommet est au centre, on peut successivement étendre l'usage d'un même cercle à l'estimation de tous les angles dont les deux côtés atteignent sa circonférence d'une manière quelconque. On peut d'abord constater que, si le sommet se trouve sur la circonférence, l'angle doit être mesuré par la moitié de l'arc correspondant. Graduellement appliquée aux autres positions du sommet, la loi s'y complète en les ramenant à celle-là, par l'entremise de deux angles auxiliaires, dont les sommets sont respectivement placés aux intersections du cercle avec les deux côtés de l'angle proposé. Même quand les côtés deviennent tangents au cercle, séparément ou simultanément, la règle d'estimation ne subit aucun changement. Alors elle comporte une vérification spéciale, où, substituant la normale à la tangente, on remplace l'angle par son complément ou son supplément.

A l'aide d'une telle généralisation, la loi sur la mesure des angles fait directement saisir des rapprochements qu'elle n'aurait jamais dévoilés dans son état primitif. Sous cet aspect, la notion la plus précieuse concerne l'égalité de tous les angles formés en joignant deux points fixes de la circonférence à tous les autres. Par suite de cette propriété, le cercle peut s'engendrer d'après le mouvement d'un angle invariable au-

tour de deux pôles, qui se trouvent diamétralement opposés si l'angle est droit. Étudiée ainsi, cette courbe manifeste d'importantes notions, liées à la théorie de la ligne droite. Convenablement rapprochés, ces théorèmes sont tous réductibles à la fixité du produit des distances d'un point quelconque aux deux côtés du cercle, en quelque direction qu'elles soient estimées. Telle est la source des notions sur les moyennes proportionnelles, ainsi passées de la théorie de la ligne droite à celle du cercle, qui les complète, les étend, et les résume. On voit comment l'office angulaire du cercle le rend apte à condenser les deux principales équations émanées de la première partie du préambule géométrique, l'une envers la somme des angles de tout triangle, l'autre entre les trois côtés du triangle rectangle.

La théorie de la mesure des angles se complète en ramenant le cas des angles dièdres à celui des angles rectilignes, suivant deux constructions équivalentes mais distinctes, dont chacune offre des avantages spéciaux. Il faut instituer la plus directe en coupant les deux plans combinés par un plan perpendiculaire à leur intersection : ses traces sur chacun d'eux forment un angle proportionnel à leur inclinaison. Ce cas, soumis à la théorie de la proportionnalité, montre que ses deux conditions sont remplies d'après cette direction de l'angle rectiligne, tandis que son obliquité violerait la seconde, quoique sa fixité suffit à la première. Étendue à l'autre mode, la même appréciation fait immédiatement reconnaître que l'angle de deux plans est toujours proportionnel à celui de leurs normales menées d'un point quelconque : des obliques fixes ne comporteraient pas la proportionnalité. Séparément appréciées, les deux constructions doivent être finalement identifiées, en considérant qu'elles assignent à l'angle rectiligne deux situations mutuellement perpendiculaires.

Grâce à ces notions, l'office angulaire du cercle s'étend du

cas de deux droites à celui de deux plans. Rien n'empêche de le compléter envers le cas intermédiaire, où l'on mesure l'inclinaison d'une droite sur un plan, en remplaçant l'un par la projection de l'autre. A celle-ci correspond le plus petit des angles formés par la droite extérieure avec toutes celles du plan. Voilà comment le dernier cas de la mesure angulaire se rapproche du précédent, où, dans la première construction, les deux droites ont chacune la plus grande inclinaison sur l'autre plan, de manière à former entre elles le plus grand angle. Établie directement, cette corrélation fournirait un troisième mode pour instituer la mesure des angles dièdres ; mais les deux précédents sont logiquement préférables.

On peut utilement joindre à la dernière partie du préambule géométrique deux indications connexes, l'une pratique, l'autre théorique, envers sa réaction naturelle sur la seconde. Mesurées par des angles rectilignes, les inclinaisons d'un angle trièdre deviennent comparables à ses faces avec lesquelles il faut les combiner pour la détermination mutuelle de ses six éléments. Nous sommes ainsi conduits, comme les anciens, à l'ébauche scientifique de l'art spécial qui consiste à remplacer les constructions en relief par des constructions planes, seules assez praticables. Il suffit de caractériser ces transformations envers le cas principal, où les faces d'un angle trièdre font graphiquement trouver ses inclinaisons. Bien appréciée, cette construction comprend aussi le problème inverse, d'après la corrélation générale entre tout angle trièdre et celui dont les arêtes sont normales à ses plans. Un examen direct fait aisément reconnaître que cette disposition est nécessairement réciproque, d'où l'on conclut, entre deux angles trièdres ainsi conjugués, que les faces de chacun équivalent aux suppléments des inclinaisons de l'autre. Suivant cette connexité, la moitié des six cas d'un angle trièdre se ramène à l'autre moitié, pourvu qu'on ait toujours

soin de prendre les suppléments des données et des inconnues propres à chaque problème.

Coordination spéciale.

Afin de compléter l'appréciation philosophique de la géométrie préliminaire, il faut destiner le dernier tiers de ce chapitre, comme envers l'algèbre et l'arithmétique, à la coordination spéciale des seize leçons qui s'y rapportent d'après le plan général de l'éducation encyclopédique. Guidé par les explications propres aux deux premières parties du présent chapitre, l'enseignement normal consacre les deux leçons initiales à l'institution de l'espace et des types ; puis il affecte une leçon à chacun des trois éléments successifs du préambule géométrique. On voit ainsi que, en réservant, comme de coutume, la leçon finale pour le résumé général, il reste dix leçons, dont je dois spécialement caractériser la destination et l'enchaînement.

Nous instituons, dans la première, l'ensemble des notions relatives à la rectification du cercle. Outre la similitude nécessaire de toutes les courbes de même espèce quand leur grandeur ne dépend que d'un seul paramètre, celle des cercles devient spécialement appréciable d'après chacun des deux théorèmes complémentaires sur les polygones semblables. Rattachée au dernier, elle est directement évidente envers deux cercles concentriques. Telle fut la source naturelle de la proportionnalité reconnue entre la longueur d'un cercle et celle de son rayon. Elle réduit la rectification de cette courbe à la détermination du rapport constant de la circonférence au diamètre.

Graduellement liée à l'ensemble des notions sur la mesure du cercle et des corps ronds, l'évaluation de ce nombre fondamental constitue, par son importance et sa difficulté, la principale découverte du plus grand des purs géomètres. Une telle approximation ne peut s'accomplir qu'en substituant au cercle une suite de polygones réguliers, inscrits ou circonscrits, dont

le nombre de côtés soit toujours croissant. Il convient de simplifier leur succession en se bornant à doubler continuellement le nombre de leurs côtés. Alors il est facile d'instituer les formules qui déduisent de chaque polygone le contour ou le côté du suivant. Rien ne peut ici dispenser de combiner le polygone inscrit avec le polygone circonscrit, afin de pouvoir estimer et régler l'approximation, alternativement accomplie ainsi par excès et par défaut.

Une telle corrélation, toujours susceptible de renversement, réduit la difficulté de rectifier le cercle à celle de connaître, d'après son rayon, le côté d'un seul polygone régulier, inscrit ou circonscrit, d'où tous les autres pourront graduellement résulter. Relativement au choix de ce point de départ, les deux séries de polygones qui correspondent aux nombres sacrés sont préférables à toutes les autres. Bien comparées entre elles, chacune peut successivement prévaloir suivant qu'elle procède du polygone inscrit ou du polygone circonscrit. A la première vue, on reconnait que le côté du carré circonscrit équivaut au diamètre ; et la loi fondamentale sur la somme des angles d'un triangle suffit pour indiquer que le côté de l'hexagone inscrit est égal au rayon. Nous pouvons aussi, d'après cette loi, constituer, à partir du décagone inscrit, une troisième série, dont l'efficacité pratique reste pourtant inférieure à sa difficulté théorique. On voit alors que, dans le triangle qui joint le centre au côté cherché, les angles à la base sont doubles de l'angle au sommet; d'où résulte sa décomposition caractéristique en deux triangles isocèles. Si l'on compare leurs côtés, on réduit l'inscription du décagone à partager le rayon en deux segments dont l'un soit moyen proportionnel entre l'autre et leur somme ; ce qui suffit pour instituer la solution, d'abord algébrique, puis graphique.

Les trois principales séries de polygones étant ainsi constituées, leur combinaison permet d'en déduire une quatrième,

qui complète l'exacte division du cercle en parties égales avec la règle et le compas ou les calculs équivalents. Il suffit de noter le fait arithmétique sur la différence du dixième au sixième, pour reconnaître que les côtés du pentédécagone, du décagone, et de l'hexagone forment un triangle inscrit, où le premier peut se déduire des deux autres. Telle est la seule série nouvelle qui puisse résulter des trois primitives en les combinant par superposition ou juxtaposition.

On peut ainsi rectifier le cercle, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, sans éprouver d'autres embarras que ceux qui proviennent de l'exécution des calculs numériques, extrêmement pénibles pour l'antiquité. Dans la vue de les simplifier, on a finalement institué cette rectification en sens inverse, c'est-à-dire en cherchant le rayon d'après le contour. Alors il faut rapporter les deux rayons d'un polygone régulier à ceux d'un polygone de même contour dont le nombre de côtés est moitié moindre.

Sous cet aspect, qui ne pouvait être original, les formules fondamentales deviennent plus simples, et les calculs successifs plus praticables. A la quadrature du cercle correspond un troisième mode, plus naturel et moins commode que le second, pour instituer sa rectification, en concevant le rapport du contour au diamètre comme égal à celui de l'aire au carré du rayon. Bien que ces deux procédés méritent d'être toujours indiqués, leur simplicité supérieure ne fera jamais oublier la spontanéité du premier, seule source possible d'une évaluation qui, depuis son accomplissement primitif, suffit à tous les besoins essentiels. Elle est d'ailleurs susceptible d'une exécution plus facile qu'aucune autre, d'après les séries algébriques sur le développement des formations circulaires en puissances de l'arc. Retardé jusqu'à la dernière phase de la révolution occidentale, ce mode final n'a vraiment servi qu'à

procurer sans effort un degré superflu de précision à l'ensemble des approximations antérieures.

Basée sur la première partie du préambule géométrique, la seconde des dix leçons spéciales que je dois ici caractériser institue la quadrature fondamentale des aires planes, d'abord rectilignes, puis circulaires. Réduisant le premier cas au triangle, on ne peut traiter celui-ci que d'après sa relation au rectangle, pour l'entremise du parallélogramme. Une application directe de la théorie de la proportionnalité permet alors de ramener la comparaison des aires à celle des dimensions, d'abord entre deux rectangles de même base, et, par suite, quand ils n'ont aucun côté commun. Tel est le vrai point de départ de cette série de mesures, où l'unité consiste dans un rectangle équilatéral, auquel on peut immédiatement rapporter les rectangles quelconques, puis les parallélogrammes, d'où les triangles et tous les polygones. Sous cet aspect, l'exposition philosophique doit spécialement motiver la préférence toujours due à ce terme de comparaison, plus familier et mieux composable qu'aucun de ceux que des besoins exceptionnels peuvent lui faire temporairement substituer.

Étendue aux polygones réguliers, la décomposition triangulaire y comporte un mode caractéristique, où tous les éléments deviennent égaux, en préférant les rayons aux diagonales. Ce mode, naturellement apprécié dès le début théocratique de la géométrie, facilite la sommation des triangles, ainsi résumée dans le demi-produit du contour par l'apothème. Rien n'empêche d'étendre au cercle, inscrit ou circonscrit, une loi toujours indépendante du nombre et de la longueur des côtés. Une telle extension a dû spontanément s'accomplir chez les castes sacerdotales, quoiqu'elle dût rester insuffisante pour la quadrature du cercle jusqu'à ce que le grand géomètre eût institué la rectification, à laquelle la mesure de l'aire se trouve ainsi

ramenée. Sous cet aspect, surgit le troisième mode indiqué ci-dessus envers l'évaluation fondamentale, d'après les lois, plus simples mais moins naturelles qu'à l'égard des contours, suivant lesquelles varient les aires des polygones réguliers, quand le nombre de côtés devient double.

Nous devons appliquer la quadrature des polygones à deux appréciations générales sur la comparaison directe des aires et leur transformation linéaire. Il faut d'abord rapporter au premier mode la source historique des trois lois dogmatiquement attribuées à l'algèbre envers les carrés de deux binomes inverses et leur produit mutuel. De la même origine, la géométrie fait directement surgir une réaction devenue aussi précieuse à la mécanique que celle-là le fut au calcul. Un des meilleurs géomètres du second ordre découvrit, au début de la dernière phase moderne, que, à partir d'un sommet quelconque, le triangle aboutissant à la diagonale d'un parallélogramme est la somme ou la différence de ceux qui correspondent aux deux côtés adjacents. Si la loi propre au triangle rectangle n'était pas normalement rattachée au préambule géométrique, elle devrait se déduire des quadratures, où l'on peut se borner à montrer sa source théocratique, type éternel de la géométrie primitive.

D'après la mesure des aires, toutes les recherches sur leurs transformations et combinaisons sont finalement réductibles à des questions rectilignes. On peut d'abord accomplir ainsi leur quadrature proprement dite, toujours numérique, et souvent graphique, en déterminant le côté du carré qui résume leur surface : il suffit de la spécifier envers les trois cas élémentaires. Une loi générale doit ensuite compléter, à l'égard des aires, la théorie de la similitude, en ramenant la comparaison des figures semblables, rectilignes ou curvilignes, à celle des carrés homologues. Bien appréciée, cette loi se condense, avec celle des contours, dans un précieux résumé que fournit à l'ensemble des

notions sur la similitude l'éminent précurseur de la régénération de l'enseignement mathématique. La diversité des formes semblables se trouve ainsi réduite, sous tous les aspects géométriques, à celle de leurs échelles. Étendue spécialement aux cercles, cette loi permet d'ajouter et retrancher leurs aires d'après la construction que le triangle rectangle suscite envers les carrés. Sous cet aspect, l'un des géomètres les plus secondaires de l'antiquité fit, à peu de frais, survivre son nom, en l'attachant à la représentation de l'aire d'un triangle rectangle par la somme de deux aires circulaires aisément construites.

Il faut normalement réduire à deux types essentiels les nombreuses spéculations que comporte la seconde leçon de géométrie spéciale sur la comparaison des aires rectilignes. Dans le premier, on compare les rectangles inscrits au même triangle, pour déterminer leurs côtés d'après leur surface. La résolution d'une équation du second degré facilement institué suffit à calculer ou construire la hauteur, et par suite la base. Elle fait aussitôt reconnaître que le maximum du rectangle correspond à la moitié du triangle, d'après des dimensions moitié moindres. Rattachée à cette interprétation concrète, la théorie abstraite des équations du second degré comporte, sous le même aspect, une plus simple peinture, quand on construit les côtés d'un rectangle dont l'aire et le contour sont donnés.

Tel est le double modèle qui doit normalement caractériser les spéculations relatives à la construction des aires rectilignes. On doit prendre pour type de leur comparaison la série indéfinie de triangles semblables dont tout triangle rectangle peut être regardé comme la somme, quand on projette, dans chacun d'eux, le sommet sur l'hypoténuse. Rapportée à cette construction, la sommation abstraite des progressions géométriques indéfiniment prolongées devient concrètement appréciable envers les aires, quand on a reconnu la constance du rapport

suivant lequel décroissent les hypoténuses successives. Dans un tel assemblage, on trouve toute la généralité qu'exige son aptitude à représenter une progression géométrique arbitrairement formée. Une analyse directe de ce rapprochement fait bientôt reconnaître que les angles de la figure correspondent au rapport des termes consécutifs et ses côtés à leur grandeur respective.

On pourrait utilement joindre aux types précédents plusieurs autres des combinaisons et comparaisons que le fondateur du positivisme institua quand il élabora la régénération mathématique. Bornée aux deux indications principales, la seconde leçon de géométrie spéciale aura suffisamment caractérisé ces spéculations accessoires. La fin de cette leçon doit normalement ébaucher la détermination de la plus grande aire parmi les figures de même contour, en commençant par les triangles à base commune. A ce cas fondamental on peut aisément rattacher l'appréciation analogue envers des triangles quelconques, en faisant déjà sentir comment la pluralité des variables se ramène à l'unité dans les questions de maximum. Toutes ces notions aboutissent à l'admirable propriété que les anciens reconnurent au cercle, d'offrir la plus grande aire sous le même contour, entre les diverses figures planes.

Considérée historiquement, la cubature des polyèdres, objet de la troisième leçon de géométrie spéciale, offrit trois phases successives, qu'il faut dogmatiquement condenser en une évolution unique, mais après avoir caractérisé leur filiation. A l'origine, la géométrie théocratique mesura seulement les parallélipipèdes rectangles, qui suffisent aux principaux besoins pratiques. Pendant la phase philosophique de l'essor abstrait, la géométrie grecque passa, du cas fondamental, par l'entremise du parallélipipède oblique, à la mesure des prismes, d'où résulta celle des cylindres, sauf la quadrature de leurs bases. Troisièmement, la phase scientifique s'ouvrit en instituant,

d'après le prisme, la cubature des pyramides, qui fit aussitôt surgir celle des polyèdres quelconques. Il faut même noter que, dès ce début du principal essor théorique de l'antiquité, la mesure des volumes s'étendit, non-seulement aux cônes, mais jusqu'à la sphère, en y subordonnant la cubature à la quadrature, réservée au grand géomètre.

On doit normalement instituer la cubature des polyèdres en combinant ses trois degrés naturels dans un enchaînement inverse, où l'on descend du général au particulier, pour remonter du cas le plus simple au plus compliqué. Malgré la diversité des deux corps triangulaires, on peut directement reconnaître, indépendamment des mesures respectives, que la pyramide est le tiers du prisme de mêmes dimensions. Nous devons ensuite sentir que le prisme triangulaire équivaut à la moitié du parallélipipède correspondant, comme le triangle envers le parallélogramme. Établie ainsi, la succession des cas polyédriques aboutit à la réduction finale, en ramenant, par un double redressement, le paraléllipipède quelconque au parallélipipède rectangle. Sous cette triple préparation, où réside la principale difficulté d'un tel problème, la cubature des polyèdres peut directement surgir envers le corps fondamental.

Nous pouvons toujours réduire la comparaison de deux parallélipipédes rectangles à l'examen de la loi suivant laquelle varie leur volume quand on fait seulement changer une des trois arêtes. A ce cas pourront se ramener les deux autres, en supposant successifs les changements simultanés des trois dimensions. Sous cet aspect, on fait directement surgir la loi fondamentale des cubatures, en reconnaissant que le volume d'un parallélipipède rectangle varie proportionnellement au produit de ses trois arêtes, ou de sa base par sa hauteur. Ce fondement permet, d'après l'enchaînement primitif, de mesurer d'abord les parallélipipèdes quelconques, puis les prismes,

enfin les pyramides, et dès lors tous les polyèdres. Il faut spécialement étendre à cette série de règles les remarques de la leçon précédente sur l'unité de mesure, en faisant directement sentir que le type cubique est plus nécessaire envers les volumes que le type carré pour les aires.

Fondée sur une triple réduction préalable, la cubature des polyèdres constitue un problème plus difficile que la quadrature des polygones, où l'examen direct n'exige que deux préparations successives. On voit la disparité des deux enchaînements résulter de ce que le type triangulaire, simple envers les aires, se divise, pour les volumes, en deux cas distincts, le prisme et la pyramide. Leur comparaison constitue la principale difficulté, tant dogmatique qu'historique, de l'institution des cubatures. Elle comporte, outre la décomposition directe du prisme en trois pyramides, un mode inverse qu'il faut accessoirement incorporer à l'exposition normale. Tout tétraèdre devient graduellement décomposable en prismes d'après les lignes qui joignent les milieux de ses arêtes, pourvu qu'on applique la même construction aux deux pyramides égales qu'elle a d'abord séparées du corps. Un redoublement continu de cette décomposition envers des pyramides toujours décroissantes permet de concevoir le tétraèdre comme la somme d'une infinité de prismes dont les dimensions et les volumes diminuent en progression géométrique. Sommée d'après la formule ordinaire, cette progression reproduit la mesure de la pyramide suivant un mode qui, malgré sa nature indirecte et factice, mérite une attention spéciale, même sous l'aspect logique, outre son utilité scientifique.

Il faut compléter la cubature des polyèdres en instituant, par leur décomposition générale en tétraèdres, les règles particulières qui conviennent, d'abord au tronc de pyramide à bases parallèles, puis au prisme tronqué. La fin de cette leçon

doit être surtout consacrée à ramener la comparaison des volumes semblables, à surfaces planes ou courbes, au rapport des cubes homologues, en partant du cas pyramidal. Une dernière extension fait alors apprécier le résumé ci-dessus indiqué pour l'ensemble de la théorie de la similitude, en réduisant, sous un aspect quelconque, la diversité des formes semblables à l'inégalité de leurs échelles. Suivant cette loi, la cubature des polyèdres réguliers consisterait à déterminer, pour chacun d'eux, le coefficient numérique du cube de l'arête; ce qu'il faut seulement accomplir envers le tétraèdre. On peut assez indiquer les questions accessoires sur la comparaison des volumes en cherchant le point d'où procède le partage d'un tétraèdre quelconque en quatre équivalents.

Étendue, sans difficulté, d'abord aux cylindres, puis aux cônes, la cubature des polyèdres aboutit spontanément à la sphère, objet de la quatrième leçon de géométrie spéciale. La décomposition en pyramides à partir du centre suffit pour reconnaître, d'après la facilité de sommation résultée de l'égalité des hauteurs, que le volume de tout polyèdre circonscrit à la sphère est le tiers du produit de sa surface par son rayon. Appliquée à la sphère, cette loi ramène sa cubature à sa quadrature, dont l'institution fournit l'un des principaux opuscules du grand géomètre. Traitée convenablement, elle exige un préambule, d'ailleurs utile en lui-même, sur les propriétés de la forme sphérique, triplement liée à la figure circulaire, vu sa parfaite rondeur, la nature de ses coupes planes, et le plus court chemin entre ses points. On doit spécialement instituer, d'après la théorie des angles trièdres, celle des triangles sphériques, y compris la connexité polaire, en poussant cette étude jusqu'à la loi suivant laquelle l'aire correspondante se subordonne à celle de la sphère entière.

Réductible à la quadrature d'une calotte, la question princi-

pale de la quatrième leçon a d'abord besoin, pour la mieux caractériser, d'être logiquement comparée à la même recherche envers les cylindres et les cônes. Étendue à l'aire cylindrique, la méthode infinitésimale, spontanément surgie à l'égard du cercle, ne présente aucune dificulté, quelle que soit la base, tant que le cylindre est droit, parce que les facettes ayant alors même hauteur, leurs aires sont aisément sommées. Cette sommation, qui ramène la quadrature des cylindres à la rectification de leurs bases, comporte une vérification spéciale en développant la surface sur un plan, de manière à la transformer en rectangle, sans que l'aire ait pu changer. Il importe de noter que les deux modes avortent, chacun à sa manière, si le cylindre devient oblique, auquel cas l'esprit humain doit normalement renoncer à la solution. Transportées aux cônes, les deux méthodes n'obtiennent d'efficacité que si la base est circulaire et l'axe perpendiculaire, sans que l'ensemble des études accomplies depuis l'essor grec ait aucunement agrandi ce succès spontané.

De la quadrature du cône entier, on peut aisément déduire celle du tronc à bases parallèles, directement apte à fournir les éléments de l'aire sphérique, qui ne pourrait être immédiatement ramenée au cas plan, seul primitivement accessible. Une application naturelle de la formule conique manifeste la difficulté propre à la calotte, dont l'aire se trouverait ainsi mesurée par le produit, nécessairement indéterminé, de deux facteurs devenus, à la limite, l'un nul, et l'autre infini. Ce nœud de la question sphérique doit être normalement apprécié, soit pour caractériser le principal effort du grand géomètre envers un embarras qui n'avait jamais surgi, soit afin de motiver le complément général de l'institution infinitésinale. Avant le positivisme, cette appréciation n'avait été spontanément ébauchée que dans l'éminente tentative que j'ai souvent signalée envers

la régénération de l'enseignement géométrique. Le dénouement sphérique résulte d'une transformation, plus facile à réaliser qu'à projeter, où l'un des facteurs des produits élémentaires devient constant, en sorte que la sommation des autres ne peut plus échouer.

Il serait aisé de fournir un second exemple de la même élaboration en cherchant directement la cubature d'un secteur sphérique d'après celle du cône, sans la déduire des éléments pyramidaux formés au centre. Mais un seul cas décisif suffit pour faire nettement apprécier une difficulté générale immédiatement liée à la nature de la méthode infinitésimale. Par rapport au volume de la sphère, il faut seulement instituer, d'après le secteur, la mesure de l'espace compris entre une calotte et sa base. L'usage de cette formule permet de mettre en équation plusieurs questions intéressantes, parmi lesquelles il faut signaler la bissection d'un hémisphère, et surtout la détermination d'un segment par son aire et son volume. A la fin de cette leçon, la sphère doit être spécialement comparée, sous ses deux aspects, aux principaux cas du cône inscrit ou circonscrit, et d'abord au cylindre, en souvenir du grand géomètre.

Les quatre leçons que je viens d'instituer caractérisent toutes les notions essentielles de la géométrie spéciale, entre le préambule général et le complément trigonométrique. On doit pourtant faire précéder celui-ci de deux leçons destinées à faire directement ressortir l'extension spontanée du domaine géométrique aux figures les mieux liées à sa double base linéaire. Conçue ainsi, la cinquième leçon de la géométrie spéciale ébauche, à la manière des anciens, l'étude propre aux trois sections du cône circulaire, surtout droit, en commençant par la parabole. Un premier examen de sa définition conique fait directement surgir son équation de celle du cercle, en montrant que les carrés des distances de ses points à son axe sont tou-

jours proportionnels aux distances de leurs projections à son sommet. Sous cette impulsion, on peut spécialement accomplir la quadrature de la parabole, d'après la cubature de la pyramide de base numériquement équivalente et de même hauteur que le segment convexe, la loi des éléments étant commune aux deux cas.

A l'égard des deux autres sections coniques, une semblable comparaison avec le cercle peut aussi fournir les équations plus compliquées qui les caractérisent, et la simplification qu'y permet l'existence d'un centre ou d'un second axe. L'origine cylindrique qui distingue l'ellipse ramène sa quadrature à celle du cercle, d'après la loi générale sur la projection des aires planes. Guidée par la similitude des sections pyramidales dont les plans sont parallèles, la considération du cône fait spécialement sentir que toutes les paraboles sont semblables, conformément à leur unité paramétrique. Une pareille appréciation représente les ellipses et les hyperboles comme assujetties à la condition de similitude qui consiste dans la proportionnalité de leurs axes, d'après le parallélisme de leurs plans. Nous pouvons même étendre cette considération jusqu'à l'origine conique du caractère le plus prononcé de l'hyperbole, que ses asymptotes séparent profondément des deux autres sections du cône, malgré leurs divers rapprochements. On rattache cet attribut à la similitude des hyperboles parallèles ; à mesure que leurs plans se rapprochent du sommet, ces droites y conservent leur direction propre, qui devient appréciable dans cette position extrême, où la courbe se réduit à leur couple. Si, de ce point de départ, on revient à la situation générale, il est aisé de reconnaître l'asymptotisme de la courbe envers les droites ainsi menées de son centre.

Toutes les propriétés essentielles de ces trois courbes ne peuvent pas être spécialement rattachées à leur origine co-

nique sans développer cette étude au delà de ce qui convient au domaine normal de la géométrie préliminaire. Il faut donc réserver à la géométrie générale l'appréciation de plusieurs attributs importants, malgré leur apparente simplicité, surtout quant au nombre de points déterminant, qu'il serait difficile d'assigner autrement. Rien ne doit pourtant empêcher de terminer la cinquième leçon de géométrie spéciale en indiquant l'origine conique des propriétés focales. Elles peuvent aisément ressortir du triangle formé par l'axe de la section avec les deux génératrices extrêmes ; il devient un parallélogramme indéfini dans le cas parabolique. Si l'on projette sur cet axe les intersections des deux bissectrices rectangulaires de cette figure avec l'axe du cône, on obtient deux points dont les distances à chacun de ceux de la courbe forment une somme ou différence constante.

Étendue au cas parabolique, cette construction y détermine un point unique, qui se trouve alors caractérisé d'après la perpendiculaire à l'axe également distante du sommet. Sous le même aspect, on reconnaît aussi facilement que chaque point de la courbe est équidistant de ce foyer et de cette directrice. Un tel changement dans la propriété caractéristique semble d'abord séparer, sans motifs suffisants, la parabole des deux autres sections coniques. La géométrie générale fait directement cesser l'anomalie en représentant l'ellipse et l'hyperbole comme douées d'un attribut analogue. Il consiste à remplacer l'égalité des distances par leur proportionnalité, de manière à produire successivement les trois sections coniques, suivant que le rapport constant est égal, inférieur, ou supérieur à l'unité.

Rien n'empêche d'annoncer cette appréciation sans l'accomplir, afin de terminer la cinquième leçon de géométrie spéciale en caractérisant, sous un aspect commun à ces trois courbes,

leurs propriétés focales. On peut ainsi dispenser la géométrie générale d'instituer une théorie qui ne mérite pas d'y figurer, parce qu'elle n'offre aucun sens concret envers d'autres figures. Mais l'importance de cet attribut à l'égard des trois sections coniques doit pourtant introduire son étude dans la géométrie préliminaire. Pour la mieux caractériser, il y faut sommairement lier la détermination spéciale des tangentes, ainsi devenue presque aussi facile qu'envers le cercle. Un seul problème doit alors compléter cette ébauche, en instituant la construction de ces courbes d'après un foyer et trois passages ou trois contacts.

Fondée sur la génération particulière au cône proprement dit, l'étude ébauchée dans cette leçon offre une telle spécialité qu'elle ne peut assez réussir si le cône, en restant circulaire, devient oblique. Rien n'empêche pourtant d'étendre à ce cas la comparaison fondamentale avec le cercle et l'équation qu'elle fournit, pourvu que le plan coupant soit perpendiculaire au plan principal du cône. Etudiée spécialement envers la situation elliptique, la section devient circulaire si son axe est incliné sur l'une des génératrices extrêmes comme l'autre sur la base. Nous devons attacher une importance spéciale à cette propriété remarquable, parce qu'elle fournit, au second géomètrie de l'antiquité, la loi de la construction des mappemondes. On peut ainsi reconnaître que, dans un tel système de cartes, tout cercle terrestre se trouve représenté par un cercle, dont le centre et le rayon deviennent aisément assignables, d'après les latitudes et longitudes, surtout pour les cas usuels.

A la sixième leçon de géométrie spéciale appartiennent quatre courbes destinées à développer le domaine géométrique par des ébauches assez indépendantes de la géométrie générale : la cissoïde, la spirale ordinaire, la cycloïde, et l'hélice. Pour la première, sa génération primitive d'après le cercle,

permet de caractériser suffisamment l'ensemble de sa figure, puis son rebroussement, sa tangente initiale, et même son asymptote finale. Toute son étude doit ici consister à reconnaître l'équivalence entre sa construction par points chez les anciens et sa description d'après un mouvement continu parmi les modernes. Une légère modification de la première définition fait aisément apprécier sa coïncidence nécessaire avec la seconde. Sous tout autre aspect, l'étude de la cissoïde appartient à la géométrie générale, surtout quant à sa quadrature, quoique son équation puisse immédiatement résulter de sa construction.

C'est envers la spirale justement dédiée au grand géomètre qu'on peut le mieux apprécier l'extension spontanée de la méthode infinitésimale, indépendamment du calcul correspondant. Il suffit d'y considérer une suite de rayons également écartés pour reconnaître que les éléments, triangulaires ou circulaires, qu'ils instituent dans l'aire curviligne croissent comme les carrés des nombres naturels, vu la proportionnalité de ces rayons aux angles respectifs. Toute la difficulté de leur sommation pourrait donc être directement surmontée à l'aide de la formule précédemment établie envers une telle progression, d'où résulterait la quadrature du secteur spiral. Elle sera mieux accomplie si l'on se borne à remarquer l'identité de la loi suivant laquelle varient ces éléments avec celle qui convient aux éléments rectangulaires de l'aire parabolique, et d'abord aux éléments prismatiques du volume pyramidal. Sous cet aspect, la cubature de la pyramide, qui peut déja fournir la quadrature de la parabole, fait aussi trouver celle de la spirale ordinaire, dont le secteur est ainsi reconnu toujours équivalent au tiers du secteur circulaire correspondant.

Il faut attacher plus d'importance logique, outre l'intérêt scientifique, à l'ébauche spéciale de la cycloïde, parce qu'elle manifeste une liaison remarquable entre la construction de la

tangente et la mesure de l'aire. Mû par translation et rotation à la fois, le point décrivant s'y montre animé, d'après la définition, d'une égale vitesse dans les deux sens, estimés l'un parallèlement à la base, et l'autre suivant la tangente à la position correspondante du cercle générateur. Par conséquent, la tangente à la cycloïde doit être la bissextrice de l'angle que forment ces deux droites ; ce qui la fait aboutir au point culminant du cercle correspondant. Alors il devient possible de reconnaître l'équivalence des éléments de l'aire cycloïdale convexe à ceux de même hauteur du cercle générateur passant au sommet de la cycloïde. Réduite à celles de leurs bases, leur comparaison s'accomplit en substituant, au rapport de celles-ci, celui de la base à la hauteur du segment circulaire ; la loi des tangentes permet cette substitution en manifestant la similitude des triangles correspondants. Écrite sous forme d'équation, cette proportion fait aussitôt apercevoir l'égalité des rectangles élémentaires ; d'ou résulte l'équivalence du segment cycloïdal au segment circulaire de même hauteur, et, par suite, l'aire concave de la cycloïde totale. Si l'on compare cette quadrature aux précédentes, on achève d'apprécier l'aptitude de la géométrie spéciale à comporter l'application directe de la méthode infinitésimale, en éludant, par divers artifices particuliers, l'emploi du calcul correspondant.

L'uniformité de l'hélice la destine à remplir, envers les courbes quelconques, un office équivalent à celui du cercle à l'égard des lignes planes, surtout pour mesurer les courbures. Il faut donc rendre bientôt cette figure suffisamment familière aux jeunes disciples de l'Humanité, d'après la facilité spéciale qu'y présente la triple étude des tangentes, des rectifications, et des quadratures. Vue sous l'aspect pratique, elle fera toujours admirer le grand géomètre, qui sut y puiser une merveilleuse conversion de la descente en ascension. Rattachée à la loi des

tangentes, cette propriété mécanique se trouve ainsi liée à l'ensemble des attributs géométriques de l'hélice. Étudiés d'après la considération spéciale du développement rectiligne, ils deviennent aussitôt appréciables, en faisant d'ailleurs ressortir l'aptitude d'une telle courbe à caractériser le chemin minimum sur le cylindre.

Étendue ainsi, la géométrie spéciale se trouve assez liée à la géométrie générale, en manifestant le besoin de généraliser les méthodes à mesure que le domaine s'agrandit. Cette liaison devient directe dans l'étude complémentaire que je dois maintenant instituer pour la solution algébrique du problème fondamental sur la mesure des longueurs rectilignes, dont le préambule géométrique établit la solution graphique. Réduit autant que possible, ce complément nécessaire exige trois leçons, respectivement consacrées aux formules trigonométriques, à la construction des tables, à la résolution des triangles d'abord rectilignes, puis sphériques. Il faut ensuite destiner la dixième leçon de géométrie spéciale à caractériser la triple réaction de la trigonométrie sur l'algèbre. Nous devons commencer ces quatre dernières leçons du cours normal de géométrie préliminaire en appréciant l'institution fondamentale des lignes trigonométriques, leur multiplicité directe, et leur essor indirect par les arcs auxiliaires.

Septième leçon de géométrie spéciale, l'étude générale des relations entre les lignes trigonométriques se condense dans la loi du quadrilatère inscriptible que le plus grand astronome de l'antiquité lui donna pour base en fondant la trigonométrie. A l'aide de cette loi déduite, de la similitude des triangles, on peut aisément trouver la corde de la somme ou de la différence de deux arcs dont les cordes sont données ; il suffit de placer le centre sur une diagonale ou sur un côté. Nous pouvons ensuite adapter le théorème hipparquien à l'usage mo-

derne, d'après la substitution arabe des sinus et cosinus aux cordes qui les suscitent en introduisant les demi-arcs. Toutefois, on peut utilement compléter cette étude fondamentale en indiquant la décomposition directe de chacun des sinus ou cosinus cherchés en deux segments susceptibles de résulter des sinus et cosinus donnés par la comparaison des triangles semblables. Étendue à tous les cas possibles, cette relation fournit l'une des meilleurs vérifications de la loi cartésienne du signe concret, sans laquelle on ne saurait obtenir une généralisation propre à manifester la principale supériorité des sinus sur les cordes.

Graduellement appliquée aux multiples successifs d'un même arc, la double formule fondamentale de la trigonométrie permet de saisir, par induction, la loi suivant laquelle leurs sinus et cosinus dérivent des siens. On peut ainsi constater que les deux suites de coefficients numériques correspondent, sauf les signes, à l'ensemble de ceux de la puissance semblable d'un binome. Une telle conformité constitue l'un des meilleurs types de l'admirable corrélation qui se développe entre l'abstrait et le concret d'après la subordination nécessaire du subjectif à l'objectif. Toutefois, cette induction deviendrait mieux appréciable si les deux groupes de coefficients se trouvaient combinés dans la même formule, au lieu d'appartenir l'un à celle du sinus, l'autre à celle du cosinus. Sous cet aspect, on doit préférer la considération des tangentes, où la loi s'exprime par une seule formule, dont le numérateur et le dénominateur réunissent tous les coefficients du théorème binomial, ainsi surgi chez le précurseur cartésien.

Un usage inverse de la loi des multiples, sous l'une quelconque de ses trois formes, fait aisément obtenir l'équation qui détermine le sinus, le cosinus, ou la tangente, du sous-multiple correspondant. Nullement susceptible d'être algébrique-

ment résolue, au delà de la simple ou double bissection, elle est éminemment propre à manifester l'imperfection nécessaire du calcul des relations et la difficulté supérieure des études géométriques. Il faut spécialement utiliser cette occasion pour indiquer comment l'origine concrète d'une équation peut directement perfectionner son appréciation abstraite, en faisant ainsi prévoir la réalité des racines dans cette classe d'équations de tous les degrés. Convenablement posée, la question trigonométrique du sous-multiple comporte autant de résultats différents qu'il surgit de lignes distinctes en subdivisant les divers arcs susceptibles des mêmes sinus, cosinus, ou tangentes. A ce point de vue, le nombre de ces racines devient toujours égal au degré de l'équation obtenue, et l'on peut d'avance les ranger suivant leur grandeur d'après leur signe, de manière à les faire exactement correspondre aux valeurs finales.

Il faut ensuite compléter la septième leçon de géométrie préliminaire en condensant la loi trigonométrique des multiples dans le précieux théorème spécialement institué pour cela par l'un des meilleurs géomètres du second ordre. Nous y devons logiquement apprécier l'un des principaux exemples de l'heureuse généralisation spontanément introduite, au début de la dernière phase moderne, envers les relations algébriques, en étendant aux imaginaires les transformations quelconques. Toutes les formules trigonométriques peuvent ainsi rentrer dans la propriété de multiplication par addition des arcs, qui caractérise le binome imaginairement composé du cosinus et du sinus, ajoutés ou retranchés. Étendue aux multiples quelconques, cette relation permet d'en formuler la loi trigonométrique, de manière à faire directement saisir sa liaison générale avec le théorème binomial, sans exiger aucune induction. Réciproquement appliquée, une telle condensation conduit à développer les puissances du sinus et du cosinus en une suite de sinus et co-

sinus des divers multiples jusqu'à l'exposant correspondant.

A la huitième leçon de géométrie préliminaire appartient l'ensemble des notions relatives à la construction des tables trigonométriques. Rattachée à cette attribution, l'élaboration du grand géomètre sur la rectification du cercle ébaucha spontanément l'évaluation des cordes, et même des tangentes, de manière à caractériser son indépendance envers la loi des formations correspondantes. D'après ce début, le théorème du grand astronome envers l'addition trigonométrique permit d'instituer une table assez continue; sa construction fut ensuite simplifiée par l'introduction des sinus. Elle comporte divers modes d'exécution, dont le meilleur consiste à subordonner entre eux les sinus et cosinus de trois multiples successifs de l'arc élémentaire. Nous devons d'abord accomplir ces évaluations en y prenant le rayon pour unité, mais finalement former leurs logarithmes, seuls vraiment usuels, en le représentant par la puissance de la base numérale affectée d'un exposant égal à cette base. Toutes les opérations algébriques restent conformes au premier mode, d'où la loi d'homogénéité permet de passer au second, quand les calculs deviennent numériques. Il faut instituer l'arc élémentaire d'après l'une des séries évaluables de polygones réguliers, en supposant les sinus proportionels aux arcs suffisamment petits, ou substituer à son sinus sa propre valeur immédiatement déduite du rapport fondamental.

Dans une telle construction, où les trois âges de la progression occidentale ont nécessairement concouru, la leçon que j'institue doit logiquement apprécier l'aptitude à traiter la question arithmétique en éludant la question algébrique. On peut alors examiner la solution pleinement rationnelle, que fit spontanément surgir l'élaboration des formules trigonométriques, surtout envers les multiples, au début de la dernière

phase moderne. Une nouvelle application de la méthode des coefficients indéterminés doit conjointement établir les séries propres à développer le sinus en puissances impaires de l'arc et le cosinus en puissances paires, Ce double développement s'accomplit d'après la loi qui représente le sinus du double comme équivalent au double produit des sinus et cosinus du simple. Elle exige, pour ne pas compliquer la propriété caractéristique en éliminant le cosinus, qu'on y joigne sa relation usuelle au sinus, qui rend égale à l'unité la somme des carrés des deux séries cherchées.

On trouve ainsi les deux développements propres aux principales formations trigonométriques, comme ceux que la même méthode fournit envers les formations exponentielle et logarithmique, en perfectionnant son appréciation logique par cette extension. Fondée sur de telles séries, la construction des tables de sinus et cosinus eût été beaucoup simplifiée, surtout en utilisant la division, presque indéfinie, que l'indépendance des opérations y permet pour l'ensemble du travail. Toutes les conditions de convergence et de mesure s' y trouvent spontanément remplies, d'après l'alternance des signes, et la petitesse de la variable, toujours inférieure à l'unité, même quant aux plus grands arcs, convenablement rapportés au rayon. Étudiées historiquement, ces séries n'ont pourtant réalisé de puissants effets que sous l'aspect algébrique, parce que leur office arithmétique se trouvait essentiellement accompli, d'une autre manière, longtemps avant leur institution. Nous devons dogmatiquement les regarder comme destinées davantage aux transformations qu'aux évaluations, afin de mieux maintenir les privilèges sur lesquels repose l'introduction du cinquième couple des éléments propres au calcul des relations.

Relativement à la formation inverse, où l'on doit surtout rapporter l'arc à la tangente, la même méthode permet aussi

d'instituer une série remarquable, d'après un caractère essentiellement analogue. On l'établit en regardant la tangente du double comme équivalente au double de celle du simple divisée par l'unité moins son carré ; ce qui permet de développer la comparaison décisive, à l'aide du théorème binomial pour les puissances soustractives ainsi surgies. Constituée très-simplement, cette série, outre son office algébrique, comporte une aptitude arithmétique, en fournissant le meilleur mode d'expression, et même d'évaluation, envers le rapport fondamental de la circonférence au diamètre. Appliquée au cas où la tangente est l'unité, le quart de ce nombre y surgit comme l'ensemble des réciproques des nombres impairs, alternativement combinées par addition ou soustraction. Si, pour faire mieux converger la série, on décompose cet arc en ceux dont les tangentes sont respectivement deux et trois fois moindre, on institue une expression moins simple, mais rapidement approchée, qui dispense d'un partage plus complexe.

Heureusement dispensée, d'après la relation angulaire, de fournir plus de deux équations, la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés, immédiatement surgie du cercle circonscrit, suffit pour instituer la résolution des triangles rectilignes. A ce principe, seul nécessaire, on peut joindre ou substituer celui qui représente chaque côté comme la somme des projections des autres sur lui, ces projections étant directement mesurées par les cosinus des angles correspondants, pourvu qu'on applique la loi d'homogénéité. Bien appréciées, les trois équations ainsi formées ne déterminent, d'après les angles, que les rapports des côtés : l'élimination de ces deux rapports y reproduit, sous forme trigonométrique, la relation angulaire ; en sorte qu'un tel mode est vraiment complet. Il faut pourtant le réserver pour servir seulement d'auxiliaire au premier, dont l'usage sera toujours préférable, comme fournissant des équa-

tions plus simples. Toutes les relations qu'exige la résolution des triangles rectilignes doivent être uniformément déduites du principe fondamental, quoique chacune puisse aussi comporter une source spéciale, dont la considération altérerait l'unité de cette neuvième leçon.

Il est aisé d'obtenir ainsi les formules qui conviennent aux cas où l'on donne, d'abord deux angles avec un seul côté, puis deux côtés et l'angle auquel l'un se trouve opposé. Mais, s'ils comprennent l'angle donné, les équations primitives exigent qu'on élimine les autres angles, afin de former celle qui détermine le côté cherché, dont le carré devient alors égal à la somme de ceux des autres moins le double de leur produit par le cosinus de leur angle. Pour simplifier le calcul numérique, fondé sur les logarithmes, il convient d'instituer une solution inverse, où l'on cherche d'abord les angles, en introduisant la tangente de leur demi-différence, aisément déduite des données d'après une proportion spéciale. Une autre transformation convient à la formule propre au quatrième cas, afin d'y faciliter l'évaluation des angles relativement aux côtés, en substituant, à leurs cosinus, les sinus de leurs moitiés. Tous les cas de la résolution des triangles rectilignes doivent être complétés en déterminant l'aire, immédiatement équivalente au demi-produit de deux côtés par le sinus de leur angle. Rien n'empêche d'étendre cette formule aux divers systèmes de données en y substituant, à l'angle qu'elle contient, l'expression, déjà trouvée, envers chacun d'eux, de manière à pouvoir, au besoin, mesurer le triangle sans le résoudre.

Pour instituer la résolution des triangles sphériques, il faut considérer un angle trièdre, où, les faces étant données, on cherche l'inclinaison de deux d'entre elles. Une section perpendiculaire à leur intersection, faite à l'unité de distance du sommet, représente les côtés de l'angle rectiligne qui mesure cette

inclinaison comme les tangentes des faces adjacentes, dont les sécantes comprennent la face opposée. Bornée à déterminer le troisième côté du triangle propre à l'angle cherché, la solution résulte de ce qu'il est commun au triangle formé par ces sécantes et la troisième face. La double application de la relation rectiligne entre un angle et les trois côtés fait ainsi surgir la loi shérique, où le cosinus d'un côté quelconque équivaut au produit de ceux des autres plus le produit de leurs sinus par le cosinus de leur angle. Il est facile d'appliquer ces trois équations à chacun des six cas propres à la résolution des triangles sphériques; sauf à transformer les formules finales pour l'usage logarithmique, en y changeant les binomes trigonométriques en monomes à l'aide d'arcs auxiliaires. Conformément à la réciprocité des triangles polaires, on se borne à formuler ainsi la principale moitié de ces cas, l'autre pouvant aussitôt s'y ramener, soit arithmétiquement, soit algébriquement. A l'ensemble de ces relations, on peut utilement joindre la proportionnalité qu'elles démontrent entre les sinus des côtés et ceux des angles opposés : elle pourrait aisément résulter de la considération directe de l'angle trièdre.

On doit compléter la neuvième leçon de géométrie préliminaire en appliquant la résolution des triangles, d'abord rectilignes, puis sphériques, à la solution algébrique de quelques questions aussi susceptibles d'efficacité théorique que d'utilité pratique. Rapportant un point à trois autres dont les distances mutuelles sont données, on peut déterminer leurs distances respectives au quatrième d'après les angles qu'elles font entre elles, en combinant les trois équations qui détermineraient les côtés donnés. Il est aisé de rattacher à la détermination de l'aire d'un triangle par les trois côtés, d'abord celle du cercle inscrit, puis, à l'aide d'une transformation spéciale, celle du cercle circonscrit. Nous devons seulement instituer des solutions ana-

logues envers la sphère, inscrite ou circonscrite, au tétraèdre dont les six arêtes sont données, sans établir les formules correspondantes, que leur complication rendrait inutiles. A la résolution des triangles sphériques, il faut uniquement rattacher la formule propre à mesurer le volume d'un parallèlipipède quelconque d'après ses trois arêtes et leurs angles : elle pourrait aussi servir au tétraèdre à côtés donnés.

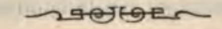
Caractérisant la réaction, historique et dogmatique, de la trigonométrie sur l'algèbre, la dixième leçon termine le cours normal de géométrie préliminaire, en appréciant d'abord la résolution instituée, par le précurseur cartésien, pour les équations du troisième degré dont les trois racines sont réelles. A ce cas principal, justement qualifié d'*irréductible*, il appliqua l'issue trigonométrique qui résulte de ce que l'équation peut alors représenter la trisection d'un angle dont le sinus est donné. Rien n'entrave cette interprétation, où, disposant du rayon et du sinus, la conception concrète comporte la même généralité que la relation abstraite, qui contient seulement deux termes. Une comparaison spéciale identifie les deux cas, et puise, dans les tables trigonométriques, le meilleur mode d'évaluation des racines, dont la condition de réalité se trouve ainsi dévoilée, comme suite de la prépondérance nécessaire du rayon sur le sinus. Si cette méthode était appliquée aux degrés plus élevés, elle n'y pourrait convenir qu'envers des cas particuliers, qui méritent peu d'attention ; le type trigonométrique ne comportant jamais que deux constantes, il cesserait d'être ordinairement comparable à la relation algébrique.

Rattachée au théorème ci-dessus apprécié comme résumé général des formules trigonométriques, la résolution complète des équations binomes est directement propre à manifester la réaction spéciale de la géométrie sur l'algèbre d'après la subordination normale de l'abstrait au concret. On doit d'abord la

réduire à déterminer les racines imaginaires, d'un degré quelconque, de l'unité, tant soustractive qu'additive, afin d'appliquer la loi trigonométrique qui transforme les puissances en multiples pour le binome imaginairement composé du cosinus et du sinus. Une expression directe surgit ainsi quant à ces racines, trigonométriquement déterminées d'après une subdivision, marquée par leur degré, de tout multiple, tantôt pair, tantôt impair, de la demi-circonférence. Toutes s'y montrent, dans le cas additif, des puissances successives de l'une d'elles, conformément à la nature de l'équation correspondante : leur conjugaison et leur réciprocité s'y trouvent spontanément représentées. Elles peuvent ainsi s'accoupler de manière à décomposer un binome d'un degré quelconque en facteurs du second degré : leur dernier terme est toujours l'unité ; le précédent, seul variable, a son coefficient exactement assignable en cosinus.

Après avoir apprécié la réaction, d'abord spéciale, puis générale, de la trigonométrie sur la résolution des équations, il faut caractériser son influence, plus élevée, envers le perfectionnement du calcul des relations par la connexité des deux derniers couples d'éléments algébriques. Pour instituer cette liaison fondamentale, il suffit de comparer la série exponentielle avec celles du sinus et cosinus, dont l'ensemble comprend, sauf les signes, tous les termes de la première, qui peut ainsi devenir leur somme en y modifiant l'exposant. Étudiées sous cet aspect, les propriétés du binome imaginairement composé du cosinus et du sinus rentrent dans celles de la formation exponentielle, dès lors susceptible de fournir l'expression algébrique des formations trigonométriques. Rien ne mérite plus d'attention philosphique, parmi les découvertes spéciales du génie mathématique, que ce type décisif institué par le plus fécond des grands géomètres pour les relations particulières entre l'abstrait et le concret. Tel est le dernier complément qu'exi-

geait la constitution algébrique, dont les deux couples d'éléments supplémentaires, l'un artificiel, l'autre exceptionnel, acquièrent, d'après leur équivalence, une aptitude pleinement normale envers les véritables équations. Une comparaison analogue entre la série logarithmique et celle qui rapporte l'arc à la tangente permet de reproduire, sous forme inverse, la même connexité, d'après une préparation moins spontanée. Mais le premier mode restera toujours préférable, quoique le second, d'abord surgi de l'intégration, eût dévoilé la liaison fondamentale un demi-siècle plus tôt, si l'esprit mathématique s'était mieux dégagé des scrupules relatifs aux symboles imaginaires.



CHAPITRE QUATRIÈME.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Conception fondamentale.

Après avoir été longtemps cultivée indépendamment l'une de l'autre, l'algèbre et la géométrie durent leur principal perfectionnement à leur combinaison générale et systématique, toujours annoncée et graduellement préparée par leurs réactions spéciales et spontanées. Voilà comment surgit la philosophie mathématique, directement caractérisée par la subordination continue de l'abstrait au concret. Elle fut nécessairement liée à la rénovation totale de l'entendement humain, qui put seule consolider et développer une construction essentiellement méconnue jusqu'à l'avénement du positivisme.

Due au principal précurseur de la synthèse finale, la fondation de la géométrie générale indiqua le caractère subjectif de la systématisation universelle, en coordonnant d'après les sujets un domaine rapporté jusqu'alors aux objets. Une telle institution ébaucha la subordination normale des études encyclopédiques suivant la généralité décroissante et la dignité croissante des spéculations relatives à des phénomènes de plus en plus compliqués. Convenablement appréciée, elle fit surgir, du plus simple domaine, le premier type de l'harmonie fondamentale

entre l'abstrait et le concret, destinée à combiner la raison théorique et la raison pratique, en faisant dignement prévaloir la synthèse sur l'analyse.

On doit donc regarder la systématisation finale comme ayant été spontanément annoncée, et même directement préparée, quand le plus grand des philosophes modernes régénéra la science mathématique en combinant ses deux éléments nécessaires avant le principal développement de la spécialité dispersive. Malgré son dégoût personnel pour le régime académique, il ne put en arrêter l'essor, qui bientôt compromit cette synthèse partielle, au point d'en dissimuler l'influence sur les progrès, algébriques et géométriques, qu'elle avait naturellement produits. Examiné philosophiquement, le sort de la conception cartésienne confirme sa connexité nécessaire avec l'ensemble de la rénovation humaine. Retardée jusqu'à l'avénement du positivisme, la discipline mathématique qu'elle était destinée à fonder ne peut surgir que sous l'impulsion universelle qui résulta de l'ébranlement social. Indivisible par sa nature, la synthèse finale peut seule faire assez apprécier les efforts partiels qui l'ont annoncée et préparée, surtout le plus décisif et le plus difficile, relatif au domaine le plus éloigné de la source régénératrice.

Pour substituer le sujet à l'objet dans la coordination géométrique, il faut instituer, entre toutes les figures, l'uniformité de définition, sans laquelle on ne pourrait élaborer, ni même saisir, la partie commune de chaque problème envers les différents types. Il importe de reconnaître que cette uniformité constitue le principal privilége des équations immuables par lesquels le fondateur de la philosophie mathématique remplaça les générations variables des lignes quelconques. Convenablement interprétée d'après le système de coordonnées adopté, chaque équation définit la forme correspondante à l'aide d'une relation spéciale entre les éléments fixes qui déterminent la po-

sition d'un point, à quelque ensemble qu'il appartienne. Toutefois, une telle relation ne doit jamais être regardée comme purement abstraite, puisqu'elle n'offrirait aucune image à quiconque oublierait la signification géométrique des variables qu'elle lie. Une appréciation inverse fait normalement ressortir le caractère concret que le principe cartésien procure aux équations ainsi conçues. Relevant les nombres par les figures, et simplifiant les figures par les nombres, cette institution ébaucha la systématisation de la vraie logique en combinant les images et les signes dans le domaine mathématique. Afin de compléter et de consolider une telle combinaison, la synthèse universelle la subordonne au sentiment, soit généralement en rapportant tout à l'Humanité, soit spécialement en animant l'espace, siége normal des formes et des équations.

Toute la constitution cartésienne doit directement reposer sur la réduction de la comparaison des points à de simples comparaisons de nombres, d'après un système fixe de détermination géométrique. On ne saurait immédiatement assujettir au calcul que les notions de grandeur, auxquelles il faut donc ramener les idées de formes par l'entremise des considérations de position. Nous pouvons toujours concevoir la forme d'une ligne ou d'une surface comme due à la disposition mutuelle de ses points, seule directement appréciable d'après l'équation correspondante, dont les modifications pourraient ainsi susciter des méprises qu'il faudra prévenir ou réparer. Une infinité de constructions peuvent ramener la détermination d'un point à de simples considérations de grandeur envers les éléments géométriques qui le rapportent à des situations fixes. Si, parmi tous ces modes, on adopte un procédé spécial, on y pourra subordonner des équations capables de fournir, envers tous les types, des définitions uniformément comparables, ainsi devenues autant abstraites que possible.

Il faut donc regarder l'institution des coordonnées comme un préambule nécessaire pour la constitution cartésienne de la géométrie générale. Nous pouvons le borner à systématiser et généraliser un usage spontanément émané, sous divers modes, de la raison pratique. Forcé d'indiquer une position sans pouvoir la montrer, l'instinct universel a toujours recours aux déterminations numériques qui résultent de la liaison du point à des termes également connus des deux esprits entre lesquels cette communication s'accomplit. Rendue théori que, cette institution pratique fournit le préambule qu'exige la géométrie générale, où la diversité des formes se trouve ainsi réduite à celle des relations correspondantes entre les éléments fixes de la construction d'un point. A sa source spontanée, cet artifice présente autant de variété qu'en demande sa destination systématique, puisqu'il emploie successivement plusieurs modes pour comparer les positions.

Fondée sur un tel préambule, la définition algébrique des types géométriques consiste à spécifier la relation des mouvements généraux du point décrivant. Elle comporte, parmi tous les modes possibles, deux constitutions principales, qui correspondent aux meilleures décompositions du mouvement, d'abord en simples translations, puis en translation mêlée de rotation, la combinaison des seules rotations étant normalement écartée. Une saine appréciation fait également émaner ces deux procédés de l'instinct universel, qui détermine habituellement un point, tantôt d'après ses distances à des droites ou plans fixes, tantôt en combinant une distance avec une direction.

Bornée aux divers points d'une même ligne, la comparaison géométrique caractérise chaque position à l'aide d'un seul élément, naturellement fourni par la portion correspondante de l'orbite. On doit combiner deux éléments quand le point fait seulement partie d'une surface donnée, sur laquelle sa position

[illegible]

Les divers systèmes de coordonnées se distinguent, d'abord par la nature des lignes ou surfaces qu'ils emploient, puis d'après le mode de variation propre à chacune d'elles. Un système quelconque n'est assez défini que quand toutes les conditions déterminantes de chaque siége s'y trouvent fixées, sauf une seule variable, qui constitue l'ordonnée correspondante. Il faut habituellement exclure, comme trop compliqués, les systèmes où la construction d'un point exigerait d'autres figures que celles dont le domaine préliminaire est essentiellement composé, savoir la ligne droite et le cercle, avec le plan et les trois corps ronds. Réduite à ces six éléments, l'institution des coordonnées reste néanmoins susceptible d'une infinité de modes différents, vu la diversité des déterminations propres à chacun d'eux. Elle doit pourtant être d'abord conçue dans sa plus grande généralité, de manière à comporter des siéges quelconques, sauf à restreindre son extension usuelle conformément à sa destination principale.

Afin d'instituer l'uniformité de définition qu'exige la géométrie générale, il importe que ses théories soient toujours établies

d'après le système de coordonnées rectilignes adopté par son fondateur. Mais le besoin de simplifier les équations doit aussi faire admettre, envers certaines figures, le système qualifié de *polaire*, d'ailleurs susceptible, en divers cas d'une meilleure interprétation concrète, surtout pour la mécanique et l'astronomie. Également formulées sous ces deux modes, les conceptions propres à la géométrie générale ne pourront jamais cesser de manifester leur relativité nécessaire. Nous devons cependant accorder une préférence habituelle au premier, afin d'introduire une suffisante fixité dans la correspondance fondamentale entre les formes et les équations. Outre sa simplicité supérieure, il comporte, mieux qu'aucun autre, la pleine application de la loi cartésienne sur le signe concret, et ne présente jamais d'ambiguité pour la corrélation entre les valeurs des coordonnées et les positions des points.

Nous devons normalement distinguer trois modes ou degrés successifs dans la conception fondamentale et les théories essentielles de la géométrie générale, suivant qu'on y considère les courbes planes, les lignes quelconques, ou les surfaces. Une judicieuse comparaison subordonne le cas intermédiaire aux deux extrêmes, sous tous les aspects algébriques et géométriques, conformément à la quinzième loi de la philosophie première. Mais cette division objective, quoique nécessaire à la clarté de l'exposition, et même à la netteté des conceptions, ne doit jamais altérer ni dissimuler l'unité subjective qui caractérise la géométrie générale. Etudiées convenablement, les théories principales sont essentiellement communes à ces trois cas, dont l'analogie peut même devenir assez complète pour comporter la simultanéité d'institution envers les notions suffisamment simples. Réduit à subdiviser l'élaboration et l'exposition de chaque conception, le partage objectif se subordonne à la constitution subjective, de manière à faire toujours prévaloir

le principe essentiel sur les modifications secondaires. On peut même reconnaître la prépondérance normale de la subjectivité dans la préférence spontanément accordée et systématiquement maintenue au cas plan, quoiqu'il soit objectivement le moins étendu. Si le fondateur s'y borna toujours, et si ses successeurs le laissèrent essentiellement prévaloir, c'est parce qu'il convient mieux que les deux autres à la destination, plus logique que scientifique, de la géométrie générale.

D'après cette distinction, il faut d'abord considérer le principe cartésien envers les figures planes, qui firent surgir la correspondance fondamentale entre les formes et les équations. Élaborée sous un mode quelconque, leur corrélation doit toujours résulter de la dépendance mutuelle entre les deux coordonnées d'un point situé sur une ligne déterminée, où chaque position devient assez appréciable à l'aide d'un seul élément, auquel l'autre est donc lié. Ces deux variables, restées indépendantes tant que le point se meut arbitrairement sur le plan, deviennent necessairement connexes aussitôt qu'il y suit un trajet spécial, dont le caractère géométrique correspond à leur relation algébrique. Il faut donc regarder toute ligne exactement définie d'après une propriété commune à tous ses points comme toujours susceptible d'être abstraitement caractérisée par une équation immuable entre les coordonnées variables du point décrivant. Réciproquement, toute équation à deux variables comporte une image géométrique, ainsi pourvue d'une définition rigoureuse, quand chaque solution détermine un point dont ses éléments deviennent les coordonnées.

On doit toujours regarder cette correspondance comme subordonnée au système de coordonnées adopté, sans que la préférence habituellement accordée au système rectiligne puisse jamais motiver une liaison absolue entre la figure et l'équation. La même ligne pourrait successivement founir toutes les équa-

tions imaginables en faisant convenablement changer le système des coordonnées. Etudiée comparativement sous tous les modes possibles, la même équation pourrait respectivement convenir à toutes les lignes, si l'institution des coordonnées était assez généralisée. Une comparaison plus restreinte fait mieux sentir la relativité normale d'une telle harmonie, d'après le contraste décisif, soit entre les équations rectiligne et polaire d'une même courbe, soit entre les images rectiligne et polaire d'une même équation. Mais, envers chaque système de coordonnées, la liaison devient nécessairement fixe : les générations quelconques d'une même ligne y fournissent toujours la même équation, ainsi susceptible de manifester leur équivalence.

Si l'on examine davantage l'harmonie fondamentale entre les formes et les relations, on reconnaît que la vraie difficulté d'instituer les équations résulte de l'obligation normale d'adopter un système unique de coordonnées. Étudiée convenablement, toute véritable génération d'une figure quelconque fournit aussitôt son équation dans un certain système, puisque le mouvement d'un point ne peut se définir que d'après une liaison entre les éléments géométriques qui déterminent sa position. Nous ne devons excepter d'une telle appréciation que les propriétés susceptibles de caractériser une figure sans indiquer sa description ; par exemple, en définissant le cercle comme maximun des aires isopérimètres. Il faut reconnaître que cette notion comporte, outre son efficacité logique envers la conception fondamentale, une utilité scientifique pour l'établissement spécial des équations géométriques. Le seul conseil général qui convienne à leur institution consiste à partir de l'équation naturellement émanée de la définition, afin de la rapporter aux coordonnées finales en y liant les coordonnées initiales par des relations directes ou même indirectes.

Considérée historiquement, la correspondance fondamentale

des équations aux lignes n'est guère moins ancienne que la géométrie, où chaque figure a bientôt suscité la loi qui la caractérise entre des coordonnées suffisamment adaptées à sa définition. Avec le théorème théocratique sur le triangle rectangle, surgit l'équation rectiligne du cercle, dont l'équation polaire était d'ailleurs immédiate. Peu de temps après l'introduction des sections coniques, elles furent aisément pourvues des équations qui leur sont encore consacrées. Étudié philosophiquement, le principe cartésien ne consista point à regarder toutes les figures comme caractérisées par des équations. Le vrai mérite et la difficulté réelle de cette conception résultèrent de la fondation de la géométrie générale d'après une considération restée spéciale jusqu'alors.

Une telle institution, plus philosophique que scientifique, a profondément réagi sur le caractère logique de l'algèbre, en y perfectionnant l'équivalence nécessaire entre l'idée d'équation et l'idée de loi, l'une plus précise, l'autre plus systématique. La géométrie, en tant que concrète, a seule généralisé la notion de loi, spontanément surgie, sous forme abstraite, en arithmétique, et confusément appréciée en algèbre, faute d'un but assez déterminé. Toutes les questions relatives à la mesure de l'étendue font directement ressortir le principe de la saine philosophie, avec ses trois éléments essentiels, deux variables corrélatives, plus une constante spécifique. Rectifier, carrer, cuber, consiste à saisir la liaison immuable entre l'arc, l'aire, le volume, et la longueur correspondante, à l'aide du paramètre propre à chaque figure. A toutes les spéculations géométriques qui concernent la génération sans la mesure, l'idée de loi convient d'une manière aussi générale quoique moins directe ; chacune de ces études manifeste la relation fixe de deux grandeurs variables subordonnées à la constante spéciale.

Moins philosophique que la géométrie, l'algèbre se trouve

immédiatement restreinte au cas d'une seule inconnue, seul objet de la résolution directe. Il ne présente pas l'idée de loi d'une manière assez nette pour l'y faire spontanément surgir, sans les lumières émanées de sa source concrète. Nous pouvons aujourd'hui considérer la formule résultée de l'équation comme exprimant la loi suivant laquelle l'inconnue y dépend de chaque coefficient, successivement supposé seul variable; l'un d'eux, spécialement censé constant, tient lieu de paramètre spécifique. Avant la réaction de la géométrie sur l'algèbre d'après le principe cartésien, une telle appréciation devait habituellement échapper aux esprits les plus philosophiques, parce que sa source abstraite est indirete et confuse. Sans les habitudes géométriques, l'idée d'équation n'aurait jamais suscité l'idée de loi, faute de précision, et même de netteté, dans la distinction entre les variables et les constantes, toujours factice pour une seule inconnue.

Par suite de la réaction cartésienne, toute équation est habituellement conçue envers deux variables, dont l'une peut quelquefois rester sous-entendue, en supposant une élimination préalable. On doit toujours concevoir chaque équation qui ne contient qu'une inconnue comme ayant été formée ainsi d'après deux équations directement relatives à deux lois simultanées entre les mêmes grandeurs. Nous devons systématiquement rectifier l'usage empiriquement introduit envers les qualifications d'*indéterminés* et *déterminés* avant que l'algèbre fût philosophiquement subordonnée à la géométrie. Toute équation d'une seule inconnue est réellement indéterminée sous l'aspect concret, puisqu'elle peut correspondre à l'intersection d'une infinité de courbes dont les définitions algébriques seraient également capables de la fournir à l'aide des éliminations convenables. Il faut regarder le mode abstraitement usité comme choisissant, parmi tous les couples géométriques, celui dans lequel les or-

données sont respectivement exprimées par les deux membres de l'équation proposée. Formé plus simplement qu'aucun autre, il est le plus propre à guider les spéculations algébriques d'après les images correspondantes. Élaboré convenablement, il peut ensuite conduire à des constructions mieux exécutables, en introduisant des courbes plus faciles à décrire, quoique moins inspirées par l'équation primitive.

Les équations à deux variables sont immédiatement déterminées sous l'aspect géométrique, et chacune exprime une loi qui n'exige aucun artifice pour être pleinement caractérisée, d'après un système défini de coordonnées. A cette aptitude se rattachera toujours le privilége philosophique de la géométrie plane, naturellement adaptée à la dualité qui caractérise la notion générale de loi. Rapportée à deux variables indépendantes l'une de l'autre, la variable dépendante ne représente une loi nettement appréciable qu'en y supposant sucessivement constante chacune des premières, ou les liant par une relation quelconque. Elle ne pourrait autrement suggérer qu'une idée vague de loi, d'après laquelle l'esprit flotterait entre toutes les hypothèses propres à ramener la pluralité des variables à l'unité, seule directement jugeable. Si le fondateur de la géométrie générale n'a point étendu son principe jusqu'aux surfaces, c'est parce qu'il a senti la nécessité d'instituer la philosophie mathématique d'après la meilleure surbordination de l'abstrait au concret.

Introduite pour le cas plan, la conception cartésienne a facilement subi la généralisation qu'exigeaient les deux autres modes géométriques, quand leur appréciation algébrique a suffisamment surgi dans les premiers travaux du principal constructeur de la mécanique céleste. Modifiée envers les surfaces, l'institution fondamentale y fait également ressortir l'idée d'équation de la liaison nécessaire entre les trois coordonnées, dont

deux peuvent seules rester arbitraires si le point affecte un siège spécial, qui tient lieu de la troisième. Bien appréciée, la pluralité des variables indépendantes est réellement issue de la géométrie, quoique la mécanique l'ait ensuite confirmée, et même étendue. Une équation à trois variables devient ainsi susceptible d'être géométriquement représentée dans son ensemble, sans qu'on soit d'abord obligé de la regarder comme embrassant une infinité de lois différentes, toutes construites sur la surface unique qu'elles caractérisent. Si l'image géométrique cesse au delà de deux variables indépendantes, la philosophie mathématique ne doit pas le regretter, puisque la réaction de la géométrie sur l'algèbre n'est vraiment efficace qu'envers une, quoique elle puisse s'étendre à deux.

Rattaché convenablement aux deux degrés extrêmes du principe cartésien, le mode intermédiaire n'exige aucune notion distincte, soit géométrique, soit algébrique. Élaborée sous la forme la plus simple par le fondateur de la géométrie générale, la considération des courbes quelconques fut immédiatement ramenée à celle des courbes planes, en introduisant les projections simultanées sur deux plans différents. A cette appréciation géométrique, correspond le privilège algébrique de laisser seulement coexister deux variables dans chacune des équations dont l'ensemble caractérise la ligne proposée, quoiqu'elles soient respectivement propres aux cylindres qui la projètent. L'accouplement des surfaces quelconques d'où cette ligne peut aussi résulter n'est réellement convenable que pour faciliter l'établissement des équations, souvent difficiles à former envers ces cylindres. Il importe de conserver un libre choix entre les divers modes propres à l'institution algébrique de chaque ligne à l'aide des surfaces les mieux formulables, d'où, par une double élimination, on pourra toujours déduire les cylindres projetants, qui doivent être finalement préférés.

D'après ces indications générales, il faut maintenant spécifier l'appréciation du principe cartésien avec le soin qu'exige une conception aussi capitale. Il convient d'abord de motiver la préférence toujours accordée aux coordonnées rectilignes depuis la fondation de la philosophie mathématique. Généralement envisagé, le choix du système de coordonnées ne saurait jamais comporter une décision systématique tant qu'on n'y distingue pas les deux aspects continuellement combinés en géométrie. Nous devons séparément considérer ce choix d'abord envers l'institution algébrique des formes, puis quant à la représentation géométrique des équations. Alors la combinaison finale des deux appréciations préliminaires fera directement ressortir l'explication systématique de l'usage universel.

On ne doit regarder aucun système de coordonnées comme mieux adapté que les autres à l'institution algébrique des lignes et des surfaces. Tous peuvent successivement mériter, à cet égard, la préférence, suivant la nature des formes considérées, et même selon la diversité de leurs définitions. Étudié convenablement, chaque cas géométrique suscite un système de coordonnées plus propre qu'aucun autre, soit à former l'équation avec plus de facilité, soit à la simplifier davantage. A ce premier point de vue, il est donc impossible de motiver la préférence habituellement accordée aux coordonnées rectilignes. Regardé sous le second aspect, cet usage comporte, au contraire, une explication décisive, vu l'aptitude d'un tel système à rendre plus simple, plus nette, et même plus fidèle, la peinture des équations.

Moins compliquée que sous tout autre mode, l'image élémentaire y construit chaque point d'après les meilleurs sièges, soumis aux meilleures variations, de manière à mieux manifester la correspondance entre les valeurs et les positions. Une intersection de deux droites ou de trois plans est toujours plus

facile à concevoir qu'aucune autre combinaison de lignes ou de surfaces. Guidé par cette comparaison, le choix du système de coordonnées se complète en reconnaissant que le déplacement le mieux appréciable consiste, pour chaque siège, en une simple translation, parallèlement aux situations fixes. Étudiée d'abord envers des modes quelconques, la supériorité de l'image rectiligne devient ensuite plus sensible en restreignant l'examen à la construction polaire, où, dans le cas plan, une droite tourne autour du centre fixe d'un cercle variable. Relativement aux surfaces, cette construction, simplifiée autant que possible, exige un plan tournant autour de l'axe fixe d'uu cylindre variable, plus un cône variable dont l'axe fixe est perpendiculaire à celui du cylindre, quelquefois remplacé par une sphère concentrique au cône.

Il faut compléter l'appréciation de la supériorité du système rectiligne pour la peinture des équations en y motivant, sous le même aspect, la rectangularité des axes. Nous ne pouvons d'ailleurs attribuer à cette inclinaison aucun privilège envers la formation ou la simplification des équations, où, suivant les cas, des axes obliques peuvent devenir préférables. Convenablement réduite à l'institution des images, la comparaison secondaire ne comporte pas plus d'incertitude que le choix principal. La rectangularité des axes produit des constructions, non-seulement plus simples envers les différents points, mais surtout plus fidèles relativement à leur succession. Une exacte coïncidence ainsi produite entre les quatre régions du plan ou les huit régions de l'espace garantit que, si l'image s'étend à toutes, ses diverses parties ne différeront que d'après les indications correspondantes de l'équation. Sous une autre inclinaison, chaque région n'étant identique qu'avec l'opposée, les portions adjacentes de la figure offriront, à ce seul titre, des distinctions dépourvues de sources algébrique, et capables d'al-

térer la représentation. On rend ce motif spécialement sensible en considérant des équations qui, seulement composées de puissances paires des variables, devraient toujours produire une image exactement symétrique en tous sens, ce qu'empêcherait l'obliquité des axes.

Nous devons ainsi remarquer, dans le système polaire, outre l'embarras des constructions, une double source de l'insuffisance, et même l'infidélité, des tableaux. Une des coordonnées s'y trouve, d'après sa direction variable, soustraite à l'interprétation concrète du signe, en sorte que l'image confond deux solutions qui diffèrent seulement en ce que le rayon y reçoit une valeur additive ou soustractive. Dans le système rectiligne, la peinture du signe compense l'obligation d'un tel complément envers une détermitation que le mode polaire accomplit à l'aide des seules grandeurs. On doit aussi noter, pour les ordonnées angulaires, la confusion géométrique des solutions algébriques où le même rayon correspond successivement à des arcs dont la différence est un multiple de la circonférence. Sous ce double aspect, le système polaire suscite une ambiguïté toujours impossible dans le mode rectiligne, et que plusieurs autres pourraient également éviter.

Après avoir convenablement comparé les diverses institutions propres à la subordination géométrique de l'abstrait au concret, on est aussitôt conduit à l'explication systématique des usages spontanés. Voilà pourquoi les coordonnées rectilignes doivent être habituellement préférées pour élaborer la géométrie générale, sans qu'elles y soient exclusivement adaptées, si leur emploi complique la formation ou la composition des équations. Il suffit, d'après une expérience maintenant décisive, d'introduire le système polaire pour les cas exceptionnels où le mode rectiligne ne saurait assez convenir. Sans instituer la géométrie générale envers d'autres coordonnées, elles y doi-

vent provisoirement servir, afin de faciliter l'établissement des équations rectiligne et polaire. On peut même appliquer les équations provisoires à la première ébauche de la représentation géométrique, en compensant la complication de la construction par la simplicité de la relation.

Rien ne peut dispenser les jeunes disciples de l'Humanité de compléter cette appréciation générale en l'appliquant à quelques lignes particulières, dont ils doivent spontanément former et discuter les équations sans aucun secours spécial. Étendus aux sept courbes considérées dans les cinquième et sixième leçons de géométrie préliminaire, ces exercices auront assez atteint leur but logique et scientifique, où la spontanéité des essais constitue la principale condition du succès. Il faut autrement procéder à l'égard des surfaces, dont l'institution algébrique comporte des études générales, qui seront ci-dessous caractérisées. Nous ne pouvons rien statuer sur l'établissement de l'équation propre au trajet d'un point, qui, n'ayant aucune forme, ne peut jamais susciter une appréciation indépendante de la courbe produite en chaque cas. A l'égard d'une ligne, son mouvement devient généralement jugeable d'après la figure génératrice, avant de considérer la surface spécialement engendrée.

Faute d'avoir assez apprécié la destination philosophique du principe cartésien, on l'a vicieusement taxé de deux inconvénients, plus apparents que réels, imparfaitement caractérisés dans mon ouvrage fondamental. Relativement au premier, il faut finalement regarder l'omission géométrique des solutions imaginaires comme plus utile que nuisible à la constitution de la philosophie mathématique. A cet égard, on doit d'abord reconnaître les conséquences générales de cette lacune spontanée, d'après laquelle la peinture des équations reste plus ou moins incomplète en un cas quelconque, et peut souvent devenir in-

suffisante. Nous devons ainsi concevoir des équations, à deux ou trois variables, où la représentation, sans produire aucune ligne ou surface, se trouvera bornée à quelques points isolés, qui ne pourront jamais caractériser leur source algébrique. Convenablement formées, les équations peuvent même devenir entièrement dépourvues d'interprétation concrète, si toutes les solutions y sont imaginaires, du moins envers l'une des variables.

Une telle lacune peut, réciproquement, altérer l'institution algébrique des figures, en suscitant des modifications abstraites qui n'auront pas d'équivalent géométrique. Mieux appréciée, cette influence consiste à surcharger ou priver les équations de facteurs incapables de peinture, en tant que dépourvus de solutions réelles. A ces accidents, il faut toutefois attribuer une action plus salutaire que nuisible, parce qu'ils peuvent quelquefois expliquer la diversité des équations rectilignes d'une même figure diversement formulée. Nous devons généralement regarder l'omission géométrique de solutions imaginaires comme plus propre à perfectionner qu'à troubler la subordination de l'abstrait au concret. Il importe davantage de pouvoir ainsi noter algébriquement la discontinuité partielle des lignes et des surfaces que de représenter géométriquement des équations ou solutions essentiellement inutiles.

L'appréciation philosophique des meilleurs modes propres à combler cette lacune peut directement confirmer un tel jugement, en faisant spécialement sentir que la plénitude d'interprétation tendrait à porter la confusion dans les tableaux correspondants. Instituée aussi simplement que possible, la représentation géométrique des solutions imaginaires consisterait à les construire en écartant le facteur constant qui les rend ordinairement telles, sauf à marquer distinctement les points ainsi produits. Nous pourrions alors combiner, envers les mêmes di-

mensions, l'hyperbole et l'ellipse, de manière à rendre chacune de ces lignes propre à représenter les solutions imaginaires de l'autre équation. Étendue à la cissoïde, et successivement à tous les cas suffisamment favorables, cette peinture instituerait des accouplements plus contraires que conformes à l'ensemble des comparaisons géométriques. Assimilée algébriquement à l'ellipse, l'hyperbole s'en éloigne géométriquement par ses propriétés principales, qui doivent la faire finalement classer parmi les courbes susceptibles d'équation binome envers deux asymptotes.

Même dans les cas les plus favorables, la peinture des solutions imaginaires pourrait donc troubler la géométrie générale en y suscitant des rapprochements vicieux. On doit d'ailleurs reconnaître que cette représentation resterait ainsi bornée à certains modes de l'équation propre à chaque figure, et deviendrait confuse envers ses types les plus étendus. Si, par exemple, on considère la conjugaison ci-dessus indiquée entre l'ellipse et l'hyperbole, on reconnaît qu'elle ne convient qu'à leurs plus simples équations, de manière à ne pouvoir nettement s'adapter à leur situation quelconque. A plus forte raison, un tel mode serait habituellement inapplicable au delà du second degré, sauf envers des cas de plus en plus exceptionnels. Relativement aux procédés plus généraux qui furent directement destinés à peindre les solutions imaginaires, ils sont trop indirects et trop compliqués pour devenir jamais admissibles. Tel est le jugement final qui convient à des spéculations dépourvues de direction philosophique, où l'on oublie le but, essentiellement géométrique, de l'institution cartésienne. Elles manifestent une tendance absolue à développer isolément la peinture des équations quelconques au lieu de la subordonner à sa destination principale, comme élément nécessaire de la constitution propre à la géométrie générale.

Il faut maintenant apprécier l'inconvénient inverse du principe cartésien, où les conditions géométriques peuvent quelquefois rester dépourvues d'expression algébrique. Modifié par la conversion des cordes en ordonnées perpendiculaires au diamètre, le cercle se transforme en parabole, sans que la métamorphose puisse s'étendre au delà du point parabolique dont les coordonnées sont égales au paramètre. Beaucoup d'autres définitions comportent des restrictions analogues, même envers des courbes fermées, comme quand le cercle résulte du mouvement d'un angle invariable autour de deux points fixes. Établies d'après ces générations, les équations seront pourtant applicables à l'ensemble des lignes correspondantes, sans que la limitation géométrique s'y trouve jamais prise en considération algébrique. Relativement à de telles lois, on peut donc regarder comme incomplète l'harmonie fondamentale entre l'abstrait et le concret.

Nous ne devons pas juger cette imperfection entièrement insurmontable, quoique les moyens d'y remédier ne puissent jamais devenir vraiment usuels. Une admirable tentative, mentionnée au chapitre précédent, conduisit le plus éminent des trois représentants extrêmes de l'évolution mathématique à concevoir et à réaliser des transformations algébriques qui pourraient surmonter ces difficultés géométriques. Il institua des séries trigonométriques d'après lesquelles on pourrait exprimer l'ordonnée d'une portion de ligne et même celle d'un contour hétérogène ou discontinu. Toutefois, ces développements indéfinis, qui furent toujours destinés à la théorie mathématique de la chaleur, sont trop compliqués pour pouvoir jamais convenir à la géométrie. Sous l'aspect philosophique, ils n'y comportent d'autre efficacité que de mieux caractériser la connexité de l'imperfection signalée avec la nature des éléments propres au calcul des relations.

A cet égard, il suffit de reconnaître qu'une telle imperfection résulte de la continuité normale des formations simples dont se composent nos équations. Rapportée au couple exceptionnel qui complète la constitution algébrique , la discontinuité concrète deviendrait susceptible d'expression abstraite, en introduisant des éléments périodiques, suivant le mode que je viens d'indiquer. Convenablement examinée, cette modification doit être finalement écartée en géométrie, quoiqu'elle fournisse un éclatant témoignage du génie mathématique de son auteur. Une saine appréciation fait normalement reconnaître, quand même la discontinuité serait mieux formulable, que les avantages de la continuité, tant géométrique qu'algébrique, surpassent ses inconvénients. Si la géométrie concrète peut souvent offrir des figures discontinues, la géométrie abstraite doit toujours se borner aux formes continues, seules adaptées à sa destination logique.

Garantie des tendances absolues, la philosophie mathématique subordonne ses institutions, algébriques et géométriques, à la satisfaction normale de nos vrais besoins intellectuels. Rationnellement appréciée, la continuité doit toujours caractériser nos conceptions théoriques, d'après sa relation nécessaire avec l'ensemble de la nature humaine, où toute discontinuité devient directement contraire à l'unité fondamentale. A ce besoin général, on peut normalement lier les motifs spéciaux qui prescrivent de maintenir la continuité mathématique afin d'assurer la fixité de la correspondance entre l'abstrait et le concret. Voilà comment le principe cartésien institue, dans chaque système de coordonnées, une immuable connexité de la forme avec l'équation, malgré la diversité quelconque des définitions géométriques. Il serait impossible de fixer l'expression abstraite du type concret, si l'on voulait avoir égard à la discontinuité particulière aux générations exceptionnelles.

Un examen philosophique du principe cartésien fait finalement rejeter les deux imputations inverses qu'il semble d'abord mériter. Nous ne pourrions remédier à ces imperfections secondaires qu'en altérant, par des artifices indirects et compliqués, son aptitude principale à constituer la subordination géométrique de l'abstrait au concret. Il faut scrupuleusement maintenir la connexité normale que le fondateur de la philosophie mathématique établit entre les formes et les équations, suivant le mode le plus simple et le plus spontané. D'après une telle liaison, la logique positive se trouve systématiquement ébauchée, puisque les images sont finalement combinées avec les signes dans les spéculations mathématiques. A chaque tableau correspond une relation, dont, réciproquement, il fournit la représentation, de manière à développer l'essor mutuel des inductions et déductions, tant algébriques que géométriques.

Sous l'aspect logique, la principale efficacité du principe cartésien résulte de la liaison entre les lignes planes et les équations à deux variables. A ce cas fondamental, il faut toujours attribuer le privilége philosophique de mieux représenter la notion générale de loi, partout relative à des combinaisons, où le dualisme devient normalement nécessaire. Nous ne pouvons nettement saisir la constance à travers la variété qu'en nous bornant à comparer deux changements simultanés. Tel est l'avantage naturellement propre au cas plan dans la constitution systématique de la géométrie générale où les lois quelconques peuvent ainsi trouver des types logiques. Il offre, entre l'abstrait et le concret, une réciprocité de liaison qui ne saurait autant convenir au reste du domaine géométrique.

Tous les progrès que l'algèbre suscita dans la géométrie furent exactement compensés par des perfectionnements inverses, d'après la connexité normale des figures planes avec les équations à deux variables. Il faut même regarder la réac-

tion algébrique de la géométrie comme ayant été plus efficace que l'influence géométrique de l'algèbre. Étendue aux surfaces, l'institution cartésienne a cessé d'offrir une telle réciprocité théorique, et son importance est devenue plus scientifique que logique. Réduite à perfectionner la géométrie, elle a seulement agrandi le champ de l'algèbre, comme le fit la mécanique, sans y fournir de nouvelles inspirations. Nous pouvons porter le même jugement envers l'étude des courbes quelconques, où l'accouplement algébrique altère la correspondance entre l'abstrait et le concret. On doit donc regarder la destination logique de la géométrie générale comme finalement concentrée dans le domaine auquel se borna son fondateur. Sous la discipline positive, cette conednsation fait mieux apprécier la restriction normale de la géométrie aux formes pleinement susceptibles d'expression abstraite et de l'algèbre aux équations entièrement capables de représentation concrète.

Attentivement considérée, la concentration finale de la connexité logique entre la géométrie et l'algèbre achève de caractériser, dans le domaine mathématique, la corrélation générale qui résulte de la hiérarchie encyclopédique. La réaction normale de chaque science sur la précédente consiste à lui fournir une destination nécessaire à sa discipline, sans lui procurer des lumières directes, qui doivent naturellement monter des études plus simples aux plus compliquées Bien appréciées, les deux extrémités de la progression encyclopédique comportent une réciprocité plus complète entre leurs éléments respectifs. Universellement compétente, la morale procure à la sociologie, et même à la biologie, outre la destination et la discipline, des lumières spécialement propres à perfectionner leur constitution subjective. Semblablement, l'enceinte mathématique voit la géométrie fournir à l'algèbre, avec le but et le régime, des ins-

pirations directement capables de développer ses spéculations en améliorant ses conceptions.

Dans cette réaction exceptionnelle d'une étude plus compliquée sur une science plus simple, le contact se borne au domaine le moins étendu mais le plus fondamental. Il résulte de l'aptitude de la géométrie à perfectionner la constitution logique de l'algèbre en y combinant les images avec les signes, pour y développer autant l'induction que la déduction. Considérée sous l'aspect scientifique, la corrélation reprend le caractère normal, en faisant habituellement prévaloir l'influence émanée du domaine le plus simple. Toujours l'algèbre peut perfectionner la géométrie, en lui procurant une généralité de méthodes qui n'y pourrait autrement surgir, et dont l'importance augmente à mesure que les spéculations se compliquent, en passant des lignes aux surfaces. Étudiée en sens inverse, la corrélation se borne à l'amélioration géométrique des plus simples conceptions algébriques, concentrées sur les équations à deux variables, au delà desquelles l'image, même en restant suffisante, conserve peu d'efficacité logique.

On ne saurait beaucoup regretter une telle disparité quand on substitue le point de vue encyclopédique au point de vue mathématique dans l'appréciation normale de la subordination géométrique de l'abstrait au concret. Malgré sa restriction logique aux plus simples domaines de la géométrie et de l'algèbre, l'harmonie fondamentale entre les formes et les équations remplit son principal office philosophique en systématisant la notion générale de loi par la combinaison des images avec les signes. Il ne manquait à ce dualisme que la consécration affective qu'il reçoit de la synthèse subjective en s'y subordonnant au sentiment, non-seulement d'après la prépondérance universelle de l'Humanité, mais sous l'intervention spéciale de l'Espace envers

ses deux éléments. Si l'institution religieuse de l'Espace pouvait déjà trouver l'essor que le temps doit seul réaliser, l'habitude d'y rapporter les formes et les équations développerait une réaction morale qui ne saurait être assez sentie maintenant. Avec l'efficacité mentale d'une représentation plus nette et plus vive, le Grand-Milieu comporte une aptitude affective, en animant les images et les signes dont il devient le siège, d'après sa disposition sympathique à seconder les spéculations abstraites.

Historiquement considérée, l'institution de l'Espace, quoique surgie de la fin de l'âge purement fétichique, resta toujours incomplète, par suite de son objectivité supposée, jusqu'à l'avénement du positivisme. Alors elle prit un caractère pleinement subjectif, qui poussa graduellement à la compléter en la systématisant, à mesure que se manifestèrent les besoins généraux de la synthèse finale. Bientôt doué du sentiment, le Grand-Milieu développa son aptitude religieuse, confusément ébauchée par la fétichité la plus systématique. Il devint ainsi capable de perfectionner sa destination primitive, en permettant d'animer les images, et même les signes, dont il fournit le siège subjectif. L'efficacité théorique de l'Espace, seule sentie avant que le positivisme eût régénéré le fétichisme, est finalement inséparable de son influence morale, développée dans le culte qu'il reçoit comme représentant la suprême fatalité, résultée de l'ensemble des lois universelles.

Il faut sagement attendre le suffisant essor de cette réaction pour apprécier le perfectionnement que la destination religieuse du Grand-Milieu doit normalement procurer à son office intellectuel. Nous ne pouvons encore sentir une telle efficacité parce que nous restons trop rapprochés de l'avènement systématique du triumvirat religieux. On doit seulement concevoir aujourd'hui que, si la Logique est la cience de l'Espace, réciproquement, l'Espace constitue la pleine représentation de la

Logique. Considéré comme le siège normal des images et des signes il les combine avec le sentiment qui caractérise sa participation au type humain. Une longue habitude peut seule rendre assez appréciable cette personnification de l'unité logique, devenue plus complète en vertu de sa subjectivité, qui fait mieux sentir la subordination de l'Espace à l'Humanité. Le Grand-Milieu, poussé par son instinct sympathique, se colore partiellement, et temporairement, des emblèmes du Grand-Être, pour fournir le fond et les empreintes propres à fixer les images et les signes qui doivent assister les méditations mathématiques des vrais croyants. Élaborée pendant quelques générations, cette institution comporte une efficacité, mentale et morale, que nous pouvons seulement entrevoir jusqu'à ce qu'elle s'étende aux autres domaines théoriques.

La subjectivité qui la caractérise doit maintenant entraver son influence, quoiqu'elle doive normalement la développer quand son avénement n'aura plus de témoins directs. On voit, d'après l'ensemble de l'initiation humaine, que des institutions purement subjectives peuvent bientôt acquérir assez d'ascendant pour être unanimement regardées comme objectives. Une subjectivité directe et reconnue doit naturellement augmenter la puissance de celles qui sont vraiment adaptées à notre état normal. Elle y fait mieux sentir le type humain, dont l'universelle extension peut toujours perfectionner la synthèse en développant la sympathie. Regardé comme une institution du Grand-Être, le Grand-Milieu doit bientôt devenir, non seulement plus accessible et plus efficace, mais aussi plus sympathique et plus respectable, que quand on croyait à son objectivité.

D'après ces réflexions, il ne faut pas prendre les impressions actuelles pour mesure de l'efficacité logique qui convient à la systématisation de l'Espace. Étant liée à l'ensemble des attributions du Grand-Milieu, cette influence ne pourra devenir assez

complète que chez les âmes exclusivement élevées sous l'ascendant universel de la religion de l'Humanité. Gênée par la nouveauté des croyances positivistes, une telle aptitude doit seulement être conçue aujourd'hui comme un résultat nécessaire des lois fondamentales de notre nature, où le perfectionnement de l'unité constitue le principal besoin. Nous pouvons ainsi reconnaître la connexité normale de la systématisation de l'Espace avec l'appréciation philosophique du principe cartésien, qui commença l'élaboration directe de la synthèse subjective. On ne doit plus s'étonner de l'affinité spéciale qui lie la personnification finale de l'unité logique à l'ébauche résultée de la combinaison mathématique entre les images et les signes, qu'il fallait seulement subordonner au sentiment par la religion positive.

Bien appréciée, la géométrie générale consiste à développer l'efficacité logique du principe cartésien, en spécifiant, sous tous les aspects essentiels, la subordination de l'abstrait au concret. Elle doit donc combiner les théories géométriques et les conceptions algébriques, en systématisant envers les fonctions une concentration spontanément ébauchée à l'égard des organes, d'après l'extension que l'usage occidental a graduellement procurée au titre de géomètre. Notre maturité destine l'algèbre à perfectionner la géométrie, en y rendant les méthodes aussi générales que les questions, par la simplification simultanée des inductions et des déductions. D'après la combinaison normale de ses deux éléments, la philosophie mathématique peut directement remplir son office fondamental, en élaborant des constructions théoriques qui doivent partout fournir des types de clarté, de précision, et de consistance. Il faut finalement regarder l'influence géométrique de l'algèbre comme autant, et même plus, scientifique que logique, puisqu'elle est immédiatement propre à constituer les principales doctrines, en réduisant les notions d'étendue aux considérations de nombre. Toute la

réaction algébrique de la géométrie se trouve nécessairement bornée à la méthode, en y suscitant des aperçus généraux, d'après l'aptitude synthétique du résumé que la courbe fournit à l'équation. On voit la puissance déductive de l'algèbre, longtemps bornée aux études spéciales, devenir constructive, en géométrie, sous le régime cartésien ; tandis que l'influence de la géométrie reste, en algèbre, essentiellement inductive, sauf la discipline qu'elle y permet.

Réduites à seconder l'élaboration géométrique, les institutions algébriques doivent toujours être rapportées à cette destination, qui, développant leur dignité, les rend à la fois plus nettes, plus précises, et plus consistantes. Alternativement occupé de l'abstrait et du concret, l'esprit mathématique ne perd jamais de vue leur harmonie mutuelle, principale source de leur perfectionnement respectif. Mais ces alternances ne sauraient être aussi fréquentes dans l'exposition dogmatique que pour l'avénement historique des conceptions essentielles de l'algèbre et de la géométrie, dont l'ensemble constitue la Logique. Étudiée d'abord isolément, l'algèbre se développe de manière à devenir systématiqnement applicable à la géométrie générale, après avoir spontanément ébauché son office déductif envers la géométrie spéciale. Sous cette assistance, la géométrie se trouve assez perfectionnée pour réagir sur l'ensemble de l'algèbre, de manière à susciter sa principale évolution directement propre à développer et consolider la constitution géométrique.

Appréciée ainsi, la succession dogmatique des conceptions mathématiques devient tellement conforme à leur enchaînement historique qu'elle ne dissimule aucune filiation essentielle, sans jamais altérer la continuité didactique. La géométrie vraiment élémentaire, d'abord spéciale, puis générale, se trouve normalement comprise entre la partie inférieure du calcul des relations directes, instituée au second chapitre, et sa partie su-

périeure, caractérisée à la fin du quatrième. Élaborée sous l'impulsion géométrique, l'algèbre devient transcendante en constituant le calcul des relations indirectes, qui complète la méthode infinitésimale, pour aborder, dans leur généralité normale, les questions propres à la mesure de l'étendue. Rapportée à cette institution, la géométrie en suit la marche principale, de manière à se décomposer en deux parties successives, l'une différentielle, l'autre intégrale, objets respectifs des cinquième et sixième chapitres. Elles y doivent être systématiquement précédées des théories algébriques correspondantes convenablement réduites au développement qu'exige leur destination géométrique. Tel est le plan normal des trois chapitres directement propres à caractériser la philosophie mathématique, élaborée dans les trois précédents quant à ses éléments nécessaires, et complétée au septième en s'étendant jusqu'à la mécanique. Suivant ces indications, on voit l'algèbre et la géométrie respectivement partagées en trois domaines successifs, préliminaire, supérieur, et transcendant, dont le premier exige une culture isolée, tandis que les deux autres combinent l'abstrait et le concret.

Avant de caractériser le préambule général de la géométrie algébrique, il faut compléter l'appréciation de sa conception fondamentale en jugeant le mode concret qu'elle suscita dans le matérialisme mathématique, assez examiné, sous l'aspect abstrait, au second chapitre. Capable ainsi de mieux séduire, cette dégénération de l'esprit scientifique exige quelques considérations particulièrement adaptées à sa forme la plus spécieuse. Une telle tendance doit longtemps rester inhérente à la première phase de l'initiation encyclopédique ; les jeunes disciples de l'Humanité ne peuvent en être alors préservés ou corrigés que par la sollicitude du sacerdoce. Préambule général.

Dans le mode abstrait du matérialisme mathématique, l'al-

gèbre, isolément cultivée, et dépourvue de toute discipline, aspire à la domination ouverte et directe de l'ensemble des théories positives, au nom de la logique universelle. Il faut regarder le mode inverse comme consistant à transférer la présidence encyclopédique au domaine géométrique et mécanique, où l'algèbre s'érige en régulateur général, de manière à conserver les mêmes prétentions sous une nouvelle forme. Une telle transformation, quoique ayant d'abord développé l'usurpation algébrique, en annonça l'extinction normale, par l'ébauche mathématique de la subordination subjective de chaque science envers la suivante.

Il faut d'abord reconnaître que le principe cartésien inaugura, pour l'algèbre, une discipline spontanée, en lui procurant une destination géométrique, qui devait naturellement régénérer sa culture. Néanmoins, ce régime fut bientôt compromis d'après l'essor même qu'il suscita dans les conceptions algébriques, dont l'évolution ne pouvait être convenablement appréciée, tant que le positivisme n'avait point surgi. Tout le calcul infinitésimal dut essentiellement émaner de la géométrie générale, d'où procédèrent à la fois son but et son principe. Rarement et faiblement sentie, faute d'une théorie philosophique, cette influence, loin de développer la subordination de l'algèbre à la géométrie, tendit à reproduire ou consolider la culture isolée des spéculations algébriques. Alors l'avènement de la mécanique d'après l'institution infinitésimale vint directement seconder la disposition anarchique de l'algèbre, en ouvrant au domaine abstrait deux destinations concrètes, entre lesquelles il espérait mieux rétablir son indépendance antérieure.

Convenablement jugé, le principe cartésien ne pouvait assez instituer la discipline mathématique, faute de liaison avec l'ensemble du régime encyclopédique. Après avoir subordonné l'algèbre à la géométrie, et bientôt à la mécanique, il laissait

indéterminée la destination normale qui devait, à leur tour, régler ces deux sciences. L'enchaînement encyclopédique ne peut vraiment instituer la discipline théorique qu'autant qu'il est dignement poussé jusqu'au terme où l'abstrait confine au concret d'après la coïncidence entre l'objet et le sujet. Depuis que l'esprit positif a réellement embrassé le domaine humain, d'abord collectif, puis individuel, il a naturellement subi la règle suscitée par son entière extension, et qui n'avait jamais pu résulter d'une source hétérogène. Ralliées à leur destination morale, où la théorie confine à la pratique, toutes les études scientifiques se trouvent dignement disciplinées, d'après le seul point de vue vraiment universel. On voit alors cesser l'inconséquence qui disposait chaque science à dominer la suivante en protestant contre les usurpations de la précédente. Nous pouvons ainsi juger les imputations de matérialisme que l'ignorance théologique et la malveillance métaphysique adressèrent au positivisme, seul capable d'expliquer et d'extirper une aberration nécessairement résultée de l'indiscipline théorique qu'il a seul surmontée.

Toute l'évolution scientifique fut réellement accomplie sous la présidence du théologisme et de l'ontologisme, dont l'impuissance à la discipliner est historiquement irrécusable. Une appréciation dogmatique fait même sentir que ce régime a spontanément secondé le matérialisme contre lequel il a vainement protesté, faute d'en connaître la source et la nature. Aspirant à la synthèse objective en vertu de son principe absolu, surtout depuis le monothéisme, il a nécessairement consacré les prétentions encyclopédiques de la science placée au seul point de vue objectivement universel.

On doit ainsi reconnaître que le principe cartésien n'avait réellement ébauché la discipline mathématique qu'en commençant la synthèse subjective, dont l'institution était naturelle-

ment réservée au positivisme. Rapportée à la géométrie, l'algèbre a dès lors cessé, chez les théoriciens d'élite, de manifester ses prétentions directes à la présidence encyclopédique. Toutefois, la géométrie restant encore indisciplinée, ses usurpations ont ranimé celles de l'algèbre, ainsi devenues plus indirectes mais plus plausibles. Une vicieuse appréciation de l'unité théorique a sincèrement poussé les meilleurs esprits du dix-huitième siècle vers l'utopie mathématique où toutes les explications scientifiques résulteraient des lois de l'étendue et du mouvement, que l'algèbre pouvait seule développer. Si le positivisme n'avait pas surgi, cette disposition prévaudrait encore, malgré sa profonde inanité, parcequ'elle est nécessairement liée à la recherche de la synthèse objective, que l'avénement de la synthèse subjective a seul discréditée.

Subordonnée à l'appréciation historique du matérialisme théorique, son appréciation dogmatique fait ainsi ressortir le danger de sa reproduction spontanée tant que la religion de l'Humanité n'aura point régénéré les habitudes cérébrales, des Occidentaux. On doit donc regarder les premiers siècles de l'état normal comme exigeant, à cet égard, une sollicitude sacerdotale qui ne sera plus nécessaire quand l'ensemble de l'initiation encyclopédique se trouvera pleinement senti dès son début, d'après sa préparation affective et poétique. Une évolution théorique dont la discipline ne peut systématiquement résulter que de sa phase finale tend à reproduire, chez l'individu, la dégénération qu'elle suscita pour l'espèce. Rien ne saurait y dispenser de prévenir ou de rectifier, par l'examen philosophique, les aberrations naturellement propres à la culture scientifique jusqu'à ce qu'elle devienne complète. Dans cet intervalle, le sentiment et l'art fourniront, d'après l'adoration intime, une garantie spontanée, qui protégera mieux le cœur et l'esprit contre le matérialisme théorique qu'on ne put

jamais l'espérer de sa réprobation théologique et métaphysique.

Basée sur les lois générales de l'évolution intellectuelle, la théorie positive du matérialisme le fait toujours consister à violer l'indépendance encyclopédique en poussant les études inférieures à dominer les supérieures, au nom de l'influence déductive et de la priorité nécessaire. Rapportée à la même source, l'explication du spiritualisme le caractérise comme s'efforçant de maintenir la dignité de chaque science en niant sa subordination objective à la précédente. Alors on conçoit l'essor abstrait continuellement accompli sous la lutte croissante de deux aberrations connexes quoique inverses. Mais leur appréciation positive fait directement reconnaître la différence essentielle de l'actif au passif, le matérialisme ayant toujours possédé l'initiative du mouvement théorique, et le spiritualisme n'ayant jamais constitué qu'une protestation. Étendus autant que possible, ces deux régimes développent, en philosophie, un contraste équivalent à celui qui surgit, en politique, entre l'anarchie et la rétrogradation.

Afin de mieux apprécier un vice dont la nature et la gravité sont méconnues par ceux qui le déplorent le plus, il faut d'abord reconnaître que les trois états intellectuels y concoururent, chacun à sa manière, pendant tout le cours de l'évolution théorique. L'esprit scientifique dut toujours être le siége direct du matérialisme, d'après sa marche nécessaire du monde vers l'homme, jusqu'à ce que sa préparation objective fût entièrement terminée. Toutefois, l'esprit métaphysique tendit spontanément à développer cette aberration, même en la combattant, parce qu'il constitua la méthode isolément de la doctrine, et consacra l'abus de la déduction. On doit enfin regarder l'esprit théologique comme ayant involontairement secondé, surtout depuis le monothéisme, une déviation hostile à sa suprématie, en poussant à construire une synthèse objective, et

suscitant une fausse appréciation de l'unité théorique. Sous cette triple influence, le matérialisme a toujours grandi jusqu'à ce que l'Occident ait accompli la transition nécessaire entre la théocratie et la sociocratie en inaugurant le positivisme, qui fit également cesser les deux aberrations opposées.

Rationnellement jugée, la suspension que le matérialisme subit au moyen âge fut plus apparente que réelle, puisqu'elle résulta seulement de l'ascendant prématuré du sentiment sur l'intelligence, sans que les dispositions de celle-ci fussent aucunement changées. Elles eurent bientôt repris leur essor antérieur, qui se trouva même développé, pendant le cours de la transition affective, d'après l'empire théorique de l'astrologie, essentiellement manifesté dans l'avénemeut de la chimie. Guidé par un instinct confus des besoins propres à la situation moderne, l'esprit positif aspira de plus en plus à remplacer l'esprit théologique pour le gouvernement spirituel des Occidentaux. Nous devons même regarder la compression qu'il subit au moyen âge comme ayant finalement développé son incompatibilité radicale avec le théologisme, dont la domination oppressive indiquait l'épuisement naturel. On vit, pendant cinq siècles, l'instinct occidental de plus en plus repousser la culture morale, d'après une réaction spontanée contre le caractère rétrograde qu'elle avait graduellement manifesté dans sa prépondérance anticipée.

Le matérialisme constitue le symptôme théorique de la maladie occidentale, essentiellement caractérisée, depuis l'essor grec, par une tendance croissante à rejeter la subordination fondamentale de l'esprit au cœur. A mesure que la révolution moderne s'est développée, cette aberration a toujours grandi, d'après sa liaison nécessaire avec les besoins de l'intelligence et de l'activité. Borné longtemps au domaine mathématique, où réside sa source spontanée, le matérialisme a graduellement

prévalu, pendant ces cinq siècles, dans toutes les parties de la philosophie naturelle. On doit attribuer cette extension à la nécessité d'élaborer chaque science sous l'impulsion de la précédente, consacrée à des phénomènes plus simples et plus généraux. Rien n'a pu retarder cet essor jusqu'à ce que le développement des forces théoriques et pratiques ait irrévocablement manifesté le besoin de les régler, en les subordonnant à l'influence morale. Étendue au domaine humain, la positivité rationnelle fit alors surgir la seule terminaison que comportât la révolution moderne, en poussant l'esprit à construire la synthèse destinée à le discipliner, sous l'irrésistible impulsion de la réalité combinée avec l'utilité. Si le positivisme n'avait pas prévalu, la raison occidentale aurait indéfiniment persisté dans sa fluctuation spontanée entre le matérialisme, de plus en plus anarchique, et le spiritualisme, de plus en plus rétrogade.

Une saine appréciation de ce conflit doit le faire juger incurable tant que son traitement reste purement intellectuel, sans procéder du sentiment social, seule source de la véritable unité. Mais, d'un autre côté, la discipline prématurée du moyen âge avait tellement discrédité le remède moral qu'il ne pouvait prévaloir que quand l'esprit positif aurait été conduit, par sa propre évolution, à se subordonner librement au cœur en devenant religieux. Bien appréciée, cette unique issue de la maladie occidentale ne fut aucunement fortuite, quelque incompatible qu'elle dût d'abord sembler avec les dispositions dominantes. Rien ne pouvait empêcher la positivité rationnelle de s'étendre lentement du domaine de la mort à celui de la vie, d'où son ascension devait rapidement parvenir jusqu'à l'enceinte de la sociabilité, source directe de la synthèse finale. Avec cette disposition théorique concourut l'impulsion pratique qui résulta de l'épuisement radical du dernier régime propre à la synthèse provisoire.

Malgré l'apparence contradictoire d'une telle solution, l'esprit positif, convenablement étendu jusqu'à son principal domaine, pouvait seul surmonter le matérialisme suscité par son évolution préliminaire. On ne devait point attendre ce résultat, ni du théologisme, dont la résistance rétrograde entretenait ce vice, ni de l'ontologisme qui le développait d'après une excitation anarchique. Réservée au positivisme, cette issue a directement surgi quand il a fondé la science sociale, et par suite morale, sur l'ensemble des préparations théoriques. Étendue ainsi, la positivité s'est spontanément disciplinée, en consacrant la subordination objective et suscitant la subordination subjective. Sous leur concours normal, une révolution essentiellement intellectuelle a trouvé sa terminaison mentale, directement liée au digne rétablissement de la prépondérance nécessaire du cœur sur l'esprit.

Il faut ainsi reconnaître que le positivisme a radicalement surmonté le matérialisme et le spiritualisme en conciliant et réalisant leurs aspirations légitimes, qu'ils n'avaient jamais pu faire assez prévaloir, par suite de leurs vices respectifs. Généralisé convenablement, l'esprit positif perd le caractère irréligieux qu'il tenait seulement de sa spécialité provisoire, dont la terminaison le conduit à devenir plus religieux que ne put l'être l'esprit théologique, son précurseur nécessaire au gouvernement des âmes. Nous lui devons la suprématie universelle du sentiment, la prépondérance encyclopédique de la morale, et la séparation sociale des deux puissances, triple garantie normalement résumée par le digne ascendant de la femme. Établie ainsi, la constitution finale de l'existence humaine oppose d'invincibles barrières aux aberrations inverses qui troublèrent l'évolution préliminaire. Mais elle ne dispense pas des soins spéciaux que le sacerdoce doit développer, pendant les premiers siècles de l'état normal, pour préserver les jeunes

disciples de l'Humanité d'une dégénération spontanément liée à l'initiation théorique.

Convenablement appréciée, la discipline positiviste de l'essor abstraite résulte de la hiérarchie encyclopédique, qui subordonne chaque science objectivement à la précédente et subjectivement à la suivante. Avec un tel régime, on surmonte à la fois le matérialisme et le spiritualisme, en procurant à leurs aspirations respectives une satisfaction plus complète et plus stable. Si, d'une part, les études supérieures doivent toujours reposer sur les inférieures, d'une autre part, elles peuvent seules en déterminer la destination, et même en régler l'extension. Toute l'application de chaque science à la suivante doit être normalement dirigée par celle-ci, qui reste exclusivement juge du mode et du degré d'une telle assistance. Il résulte de cette discipline une pleine conciliation entre l'indépendance inductive qu'exigent les études plus compliquées et l'influence déductive qui convient aux théories plus générales.

Réglée ainsi, la culture théorique obtient à la fois plus de réalité que n'en comporte l'impulsion matérialiste et plus de dignité que n'en procure la résistance spiritualiste. A la lutte sans issue entre deux régimes nécessairement oppressifs, le positivisme substitue une hiérarchie qui représente l'ensemble des rapports extérieurs et satisfait à l'ensemble des besoins humains. Vue convenablement, cette solution doit pourtant être jugée plus conforme au vrai spiritualisme, non métaphysique, mais théologique, qu'au matérialisme scientifique. Il faut, en effet, la regarder comme étant surtout caractérisée par la présidence encyclopédique qu'elle a normalement conférée à la morale. Sous cet aspect, le régime intellectuel de la sociocratie se trouve profondément rapproché de celui qu'institua la théocratie initiale, sauf la diversité des modes conformément à celle des âges.

Il faut toujours ramener l'appréciation du matérialisme à la détermination de l'élément encyclopédique auquel appartient la présidence scientifique et logique. Rationnellement examinée cette question n'a jamais comporté que deux solutions, l'une objective, l'autre subjective, qui font respectivement prévaloir les deux extrémités de l'échelle théorique, dont les degrés intermédiaires sont naturellement incapables d'un tel ascendant. A la science mathématique appartient le seul point de vue objectivement universel, d'où résultent son indépendance déductive et sa priorité normale, qui la disposent à l'usurpation successive de tous les autres domaines. Toujours la science morale posséda le privilège de l'universalité subjective, qui lui permet de surmonter l'impulsion matérialiste graduellement émanée de l'ensemble des théories antérieures, sans pouvoir jamais exercer une semblable oppression. On ne saurait aucunement transférer la présidence encyclopédique aux sciences qui, placées entre les deux extrêmes, sont nécessairement impuissantes contre le matérialisme des précédentes parce qu'elles développent le même vice envers les suivantes.

Attentivement considéré le matérialisme théorique doit donc consister à faire toujours prévaloir le point de vue mathématique, en vertu de sa généralité scientifique et de sa simplicité logique. Commune aux deux modes, abstrait et concret, d'une telle aberration, sa présidence objective ne pouvait être rationnellement surmontée que par la suprématie subjective du point de vue moral, depuis que le positivisme la dégagea des entraves théologiques et métaphysiques. Toute la diversité des deux modes consiste en ce que la prépondérance mathématique se trouve directement conférée, dans l'un, à l'algèbre érigée en logique universelle, et, d'après l'autre, en vertu de la généralité des lois correspondantes, à la géométrie complétée par la mécanique. Il faut regarder le matérialisme abstrait

disciples de l'Humanité d'une dégénération spontanément liée à l'initiation théorique.

Convenablement appréciée, la discipline positiviste de l'essor abstraite résulte de la hiérarchie encyclopédique, qui subordonne chaque science objectivement à la précédente et subjectivement à la suivante. Avec un tel régime, on surmonte à la fois le matérialisme et le spiritualisme, en procurant à leurs aspirations respectives une satisfaction plus complète et plus stable. Si, d'une part, les études supérieures doivent toujours reposer sur les inférieures, d'une autre part, elles peuvent seules en déterminer la destination, et même en régler l'extension. Toute l'application de chaque science à la suivante doit être normalement dirigée par celle-ci, qui reste exclusivement juge du mode et du degré d'une telle assistance. Il résulte de cette discipline une pleine conciliation entre l'indépendance inductive qu'exigent les études plus compliquées et l'influence déductive qui convient aux théories plus générales.

Réglée ainsi, la culture théorique obtient à la fois plus de réalité que n'en comporte l'impulsion matérialiste et plus de dignité que n'en procure la résistance spiritualiste. A la lutte sans issue entre deux régimes nécessairement oppressifs, le positivisme substitue une hiérarchie qui représente l'ensemble des rapports extérieurs et satisfait à l'ensemble des besoins humains. Vue convenablement, cette solution doit pourtant être jugée plus conforme au vrai spiritualisme, non métaphysique, mais théologique, qu'au matérialisme scientifique. Il faut, en effet, la regarder comme étant surtout caractérisée par la présidence encyclopédique qu'elle a normalement conférée à la morale. Sous cet aspect, le régime intellectuel de la sociocratie se trouve profondément rapproché de celui qu'institua la théocratie initiale, sauf la diversité des modes conformément à celle des âges.

réaction algébrique de la géométrie se trouve nécessairement bornée à la méthode, en y suscitant des aperçus généraux, d'après l'aptitude synthétique du résumé que la courbe fournit à l'équation. On voit la puissance déductive de l'algèbre, longtemps bornée aux études spéciales, devenir constructive, en géométrie, sous le régime cartésien; tandis que l'influence de la géométrie reste, en algèbre, essentiellement inductive, sauf la discipline qu'elle y permet.

Réduites à seconder l'élaboration géométrique, les institutions algébriques doivent toujours être rapportées à cette destination, qui, développant leur dignité, les rend à la fois plus nettes, plus précises, et plus consistantes. Alternativement occupé de l'abstrait et du concret, l'esprit mathématique ne perd jamais de vue leur harmonie mutuelle, principale source de leur perfectionnement respectif. Mais ces alternances ne sauraient être aussi fréquentes dans l'exposition dogmatique que pour l'avénement historique des conceptions essentielles de l'algèbre et de la géométrie, dont l'ensemble constitue la Logique. Étudiée d'abord isolément, l'algèbre se développe de manière à devenir systématiqnement applicable à la géométrie générale, après avoir spontanément ébauché son office déductif envers la géométrie spéciale. Sous cette assistance, la géométrie se trouve assez perfectionnée pour réagir sur l'ensemble de l'algèbre, de manière à susciter sa principale évolution directement propre à développer et consolider la constitution géométrique.

Appréciée ainsi, la succession dogmatique des conceptions mathématiques devient tellement conforme à leur enchainement historique qu'elle ne dissimule aucune filiation essentielle, sans jamais altérer la continuité didactique. La géométrie vraiment élémentaire, d'abord spéciale, puis générale, se trouve normalement comprise entre la partie inférieure du calcul des relations directes, instituée au second chapitre, et sa partie su-

périeure, caractérisée à la fin du quatrième. Élaborée sous l'impulsion géométrique, l'algèbre devient transcendante en constituant le calcul des relations indirectes, qui complète la méthode infinitésimale, pour aborder, dans leur généralité normale' les questions propres à la mesure de l'étendue. Rapportée à cette institution, la géométrie en suit la marche principale, de manière à se décomposer en deux parties successives, l'une différentielle, l'autre intégrale, objets respectifs des cinquième et sixième chapitres. Elles y doivent être systématiquement précédées des théories algébriques correspondantes convenablement réduites au développement qu'exige leur destination géométrique. Tel est le plan normal des trois chapitres directement propres à caractériser la philosophie mathématique, élaborée dans les trois précédents quant à ses éléments nécessaires, et complétée au septième en s'étendant jusqu'à la mécanique. Suivant ces indications, on voit l'algèbre et la géométrie respectivement partagées en trois domaines successifs, préliminaire, supérieur, et transcendant, dont le premier exige une culture isolée, tandis que les deux autres combinent l'abstrait et le concret.

Avant de caractériser le préambule général de la géométrie algébrique, il faut compléter l'appréciation de sa conception fondamentale en jugeant le mode concret qu'elle suscita dans le matérialisme mathématique, assez examiné, sous l'aspect abstrait, au second chapitre. Capable ainsi de mieux séduire, cette dégénération de l'esprit scientifique exige quelques considérations particulièrement adaptées à sa forme la plus spécieuse. Une telle tendance doit longtemps rester inhérente à la première phase de l'initiation encyclopédique ; les jeunes disciples de l'Humanité ne peuvent en être alors préservés ou corrigés que par la sollicitude du sacerdoce. Préambule général.

Dans le mode abstrait du matérialisme mathématique, l'al-

plus vicieux qu'aucun autre, parce qu'il développe davantage l'orgueil déductif et la sécheresse théorique. On voit ainsi que, sans la discipline religieuse, il serait aussi contraire à l'utilité qu'à la réalité, dont la combinaison institue la positivité, qu'il ne faut jamais confondre avec la rationnalité, quoique leur concours soit toujours indispensable à l'état normal de l'entendement.

Convenablement examiné, l'esprit mathématique est donc incapable d'exercer, sous aucun aspect, la présidence encyclopédique à laquelle il ne cessa d'aspirer jusqu'à l'avénement du positivisme, seul apte à le discipliner. On ne peut le régénérer de manière à dissoudre le matérialisme théorique, tant concret qu'abstrait, qu'en le renfermant, au nom de l'Humanité, dans sa double destination normale, directe et scientifique pour la Physique, indirecte et logique envers la Morale. Telle est la transformation qu'il tendit à subir quand le principe cartésien subordonna l'algèbre à la géométrie, quoique le but de celle-ci restât indéterminé jusqu'à ce que la systématisation universelle fût suffisamment instituée. Étudiée convenablement, la Logique peut toujours compenser, d'après sa simplicité supérieure, son éloignement spécial du centre synthétique, pour ne jamais négliger la fin en développant les moyens. Rattachée au culte de l'Espace, elle doit directement acquérir un caractère affectif, en faisant résider ses signes et ses images dans le milieu normalement propre à manifester la sympathie universelle, vu son origine et sa destination.

Toute la discipline qu'exige l'esprit mathématique s'y trouve spontanément préparée par l'influence continue du principe cartésien, qui fit irrévocablement prévaloir, en Logique, le point de vue humain, en rendant subjective une coordination auparavant objective. On doit seulement reconnaître que cette régénération resta nécessairement latente jusqu'à l'avénement

de la systémation universelle, dont toutes les parties sont mutuellement solidaires. Une telle discipline, aussi conforme à la raison qu'au sentiment, se trouve normalement complétée par le caractère encyclopédique du sacerdoce positif, toujours enclin à subordonner son office intellectuel à sa destination sociale. Rien ne pouvait mieux développer les tendances matérialistes que le régime académique, qui poussait chaque science à dominer la suivante, pour satisfaire l'orgueil et la vanité de la classe exclusivement vouée à sa culture. Nous devons donc regarder la discipline théorique comme directement garantie d'après la concentration de l'essor abstrait au sein d'un sacerdoce toujours préoccupé de l'ensemble des besoins humains, et jamais susceptible de prédilections absorbantes. Examiné convenablement, le matérialisme, tant concret qu'abstrait, fut radicalement éteint par le positivisme, seul apte à le surmonter, en faisant normalement prévaloir le cœur sur l'esprit, au nom de la réalité combinée avec l'utilité. Sous l'impulsion sociale, ce caratère principal de la synthèse finale eut bientôt acquis un tel ascendant que les révolutionnaires, seuls fortement attachés au matérialisme, rangèrent le fondateur de la religion universelle parmi les mystiques.

Avant d'instituer l'étude spéciale de la géométrie algébrique, il faut ainsi prémunir les jeunes disciples de l'Humanité contre la dégénération propre à l'esprit mathématique. Bien apprécié, le principe cartésien ébaucha la discipline théoriqne en introduisant la subordination subjective dans le domaine fondamental. On vit pourtant cette régénération bientôt devenir illusoire, parce qu'elle était encore isolée ; l'algèbre reprit, au nom de la géométrie et de la mécanique, l'ascendant qui lui fut directement retiré. Rien ne pouvait vraiment discipliner l'esprit mathématique avant que les besoins sociaux eussent nécessité la systématisation universelle, en faisant partout prévaloir la

synthèse subjective sur l'analyse objective. D'après cette liaison, il importe que l'enseignement normal utilise toutes les occasions de rattacher au principe fondamental la science qui s'en trouve le plus éloignée.

Rapportées à leur origine, les prétentions de l'esprit mathématique à la présidence théorique surgirent quand il sentit sa supériorité logique et scientifique sur l'esprit théologico-métaphysique. Elles sont finalement surmontées d'après sa destination encyclopédique, qui, l'érigeant en base nécessaire de la positivité rationnelle, lui défend d'aspirer au sommet. Garantie ainsi du matérialisme, tant concret qu'abstrait, la Logique se subordonne subjectivement, d'abord à la Physique, puis à la Morale, d'où proviennent à la fois sa discipline et sa consécration. Il faut pourtant reconnaître que la subordination normale exigera longtemps la sollicitude du sacerdoce, assisté du public, pour surmonter les tendances analytiques naturellement propres à l'intelligence, et même à l'activité, surtout industrielle. Seul spontanément synthétique, parmi les trois éléments de la constitution humaine, le sentiment doit toujours rattacher les deux autres à l'ensemble dont ils sont habituellement disposés à s'écarter, quoiqu'ils en tirent leur efficacité principale.

Examiné sous cet aspect, le positivisme est surtout caractérisé par la subordinatiou systématique du dogme au culte, d'après la prépondérauce fondamentale du cœur sur l'esprit. Quand l'état normal aura suffisamment prévalu, l'éducation encyclopédique sera toujours appréciée comme une transition nécessaire entre le culte privé, naturellement concret, et le culte public, essentiellement abstrait. Une telle maturité dispensera le sacerdoce des soins continus qu'il doit maintenant prendre pour préserver les Occidentaux du matérialisme théorique et pratique, auquel ils sont spontanément enclins d'après l'ensemble de leurs antécédents, et même de leur existence. On

peut vraiment réduire la régénération finale à surmonter cette disposition, qui résume tous les vices propres à la transition, de plus en plus révolutionnaire, entre la théocratie et la sociocratie. Sous cet aspect, l'ensemble des considérations précédentes devient pleinement opportun, quand l'esprit mathématique, ayant reçu, du principe cartésien, un commencement de discipline, doit mieux sentir le danger de reproduire concrètement le matérialisme abstraitement repoussé.

Fortifiés par ces explications, les jeunes disciples de l'Humanité peuvent directement aborder l'étude spéciale de la géométrie algébrique, en aspirant à développer la subordination subjective dont elle constitue le début décisif. On doit normalement regarder l'examen du matérialisme concret comme la partie philosophique du préambule général qu'il faut maintenant caractériser dans sa partie scientifique. Nous pouvons la réduire à la théorie algébrique de la ligne droite et du plan, suivie des formules relatives à la transposition des axes propres aux coordonnées usuelles. Telle est la destination des deux leçons scientifiques qui, succédant à la leçon philosophique, constitueront le préambule général de la géométrie subjective. Il peut déjà susciter les habitudes propres à la systématisation géométrique, en disposant au développement spécial de l'harmonie fondamentale entre l'abstrait et le concret.

La première de ces leçons se trouve normalement formée de trois parties, successivement relatives à la théorie plane de la ligne droite, à sa théorie générale, à la théorie du plan. Il faut les regarder comme ayant une destination plus logique que scientifique, puisque, sans instituer aucune notion vraiment nouvelle, elles se bornent à formuler algébriquement les principales notions géométriquement acquises sur la ligne droite et le plan. Convenablement apprécié, ce préambule doit surtout dispenser de reproduire les explications incidentes qui, sans

cela, deviendraient fréquemment nécessaires envers les éléments spéciaux de l'étude générale des lignes et des surfaces. On peut réduire chacune des théories préliminaires à former l'équation correspondante, afin d'y formuler le passage, l'inclinaison, et l'intersection. Réduites à ces problèmes, qui suffisent à leur destination, les trois théories peuvent être normalement établies dans une même leçon, vu leur simplicité respective et leur liaison mutuelle.

Une appréciation algébrique des lois thalésiennes suffit pour instituer l'équation rectiligne de la ligne droite, en formulant la route d'un point dont les distances aux deux axes sont constamment proportionnelles. Nous pouvons ainsi constater que, réciproquement, toute équation à deux variables du premier degré comporte, dans ce système de coordonées, une image rectiligne. Transformée convenablement, l'équation rectiligne de la ligne droite peut aisément fournir son équation polaire, immédiatement relative à l'identité de direction, où chaque rayon devient la sécante de son inclinaison variable sur la perpendiculaire menée du pôle à la droite. A chacune de ces équations correspondent deux coefficients normalement distincts, l'un angulaire, pour caractériser la direction de la droite, l'autre linéaire, qui complète sa détermination en marquant sa distance à l'origine des coordonnées, rectilignes ou polaires. Rapportée à tout autre système, la ligne droite susciterait une distinction équivalente, parce qu'elle y serait toujours déterminée d'après le concours de deux conditions séparables, respectivement relatives, l'une à sa rotation, l'autre à sa translation.

Il faut successivement regarder ces coefficients comme déterminés par la situation propre à chaque droite, et déterminant la disposition mutuelle de deux droites. Nous pouvons, sous le premier aspect, borner la théorie préliminaire à formuler le

passage de la ligne en des points donnés ; ce qui constitue la condition géométrique la mieux susceptible d'expression algébrique, dans un système quelconque de coordonnées. Formulé pour l'équation rectiligne, le coefficient angulaire équivaut au rapport des différences entre les coordonnées respectives des deux points combinés, de manière à devenir indéterminé quand ils coïncident. La disposition mutuelle de deux droites fait successivement surgir deux questions également usuelles, l'une spéciale, l'autre générale, afin de déduire, de leurs équations comparées, d'abord leur inclinaison, puis leur intersection. Une combinaison spontanée des coefficients angulaires suffit envers la première détermination ; car ils désignent, si les axes sont rectangulaires, les tangentes de deux angles dont la différence équivaut à l'inclinaison cherchée. Sous cet aspect, il faut noter l'expression du parallélisme ou de la perpendicularité, consistant en ce que les coefficients angulaires sont égaux ou réciproques au signe près. On formule l'intersection, d'après l'ensemble des coefficients, en résolvant les deux équations simultanées, sans que les résultats méritent d'être retenus.

De l'équation plane de la ligne droite on peut immédiatement déduire le couple algébrique qui correspond à sa situation quelconque envers trois axes coordonnés, en regardant les plans projetants comme exprimés par les équations propres à leurs traces. Une telle généralisation, outre qu'elle double le nombre des coefficients, rend plus indirecte et moins nette leur signification, angulaire ou linéaire, spontanément bornée à la projection correspondante. Néanmoins, les déterminations relatives, d'abord à chaque droite isolée, puis à l'inclinaison de deux droites, enfin à leur intersection, s'accomplissent comme dans le cas plan, sans même exiger aucune remarque envers la première. A la seconde seule convient une modification essentielle, parce que les coefficients angulaires cessent alors d'être

immédiatement significatifs. Sous cet aspect, la formule d'inclinaison semble exiger la résolution de l'angle trièdre des deux droites avec l'un des axes, après avoir déduit, des coefficients propres à chacune, son obliquité simultanée vers les trois axes.

On peut artificiellement ramener ce problème à la trigonométrie rectiligne en plaçant l'angle cherché dans le triangle résulté de deux points auxiliaires. Pour en calculer les trois côtés, il suffit d'instituer, d'après la loi théocratique, la formule, éminemment usuelle, où le carré de la distance de deux points équivaut à la somme des carrés des différences de leurs coordonnées respectives envers des axes rectangulaires. Il est facile d'épargner l'élimination spontanée des ordonnées restées arbitraires en les supposant égales à l'unité, ce qui rend les autres équivalentes aux coefficients correspondants. Mais la règle ainsi construite peut être utilement transformée, en y rapportant les coefficients de chaque droite à ses inclinaisons sur les trois axes, préalablement déduites de la formule générale, où l'autre droite serait successivement confondue avec l'un des axes. Établie sous cette forme, la loi d'inclinaison consiste en ce que le cosinus de l'angle de deux droites équivaut à la somme des produits des cosinus de leurs obliquités respectives vers trois axes rectangulaires.

Si, d'après les formules propres à cette mesure, on exprime les deux cas extrêmes, on trouve, entre le parallélisme et la perpendicularité, des diversités algébriques exactement équivalentes aux différences géométriques. Un cacul exceptionnel peut ainsi reproduire les deux relations géométriquement évidentes pour la première disposition; tandis que la seconde ne fournit qu'une équation, conformément à l'indétermination correspondante. Dans le dernier des trois problèmes usuels sur la ligne droite, le principe est, comme envers le premier exactement commun aux deux modes d'institution algébrique. Alors,

le nombre des équations ayant doublé, tandis que celui des coordonnées a seulement crû de moitié, cette disproportion introduit, comparativement au cas plan, une distinction qui correspond au défaut actuel d'intersection. Rédigée sous sa meilleure forme, la condition de rencontre entre deux droites quelconques consiste en ce que les différences de leurs coefficients angulaires soient proportionnelles à celles de leurs coefficients linéaires.

Guidées par cette proportion, les générations cylindrique, conique, et rectiligne du plan peuvent aisément fournir son équation, en éliminant les coefficients variables de la génératrice d'après les relations ainsi résultées de sa liaison aux directrices. On peut aussi formuler le plan comme surface de révolution, en exprimant la perpendicularité de la génératrice envers l'axe, dont les projections seront algébriquement reconnues perpendiculaires aux traces du plan ; ce qui devient géométriquement vérifiable. Nous pouvons encore instituer l'équation du plan d'après la formule des distances, suivant l'équidistance de chaque point à deux pôles ; ce qui suscite la confirmation algébrique de l'équivalence géométrique de cette définition à la précédente. De chacun de ces modes résulte la correspondance rectiligne du plan, comme de la ligne droite, à l'équation générale du premier degré, dont deux coefficients sont angulaires et le troisième linéaire. Sous tous ces aspects, l'indétermination exceptionnelle de la génération se trouve exprimée par l'excès du nombre total des constantes ainsi liées à l'équation sur celui des coefficients qu'elles y composent.

Réciproquement, l'examen géométrique de l'équation du premier degré fait immédiatement reconnaître le plan pour son image rectiligne, dont la direction correspond aux coefficients des deux variables indépendantes et la position au terme constant. A cet égard, il suffit de remarquer que, parallèlement à

chacun des plans coordonnés, les sections de la surface sont toujours des lignes droites, parallèles entre elles, et placées sur des traces rectilignes. D'ailleurs, le nombre des coefficients est naturellement égal à celui des conditions de détermination d'un plan ; ce qui garantit la pleine généralité d'une telle équation : la peinture pourrait ainsi dispenser de formuler. Il importe que la connexité nécessaire entre le plan et la ligne droite soit algébriquement manifestée en déduisant l'une des équations de l'autre, d'après les coupes parallèles aux plans coordonnés, quand l'une des variables devient constante. On voit ainsi que la surface plane doit avoir une équation rectiligne du premier degré, pour que de telles sections y soient toujours des lignes droites, ce qui rend l'institution algébrique entièrement indépendante de la formation géométrique.

Avec ce type, on peut aisément résoudre le premier des trois problèmes usuels sur le plan, en y formulant le passage aux points donnés. Convenablement transformée, la condition de contenir une droite pourrait ainsi s'exprimer, en assujettissant la surface à passer par deux quelconques des points de cette ligne, surtout ses traces. Une expression directe de la coïncidence géométrique s'obtient en obligeant les deux équations de la droite à satisfaire à l'équation du plan, quelle que soit la valeur de leur ordonnée indépendante. Tel est le mode suivant lequel le degré propre aux équations rectilignes de la ligne droite et du plan correspond à l'absorption de la ligne par la surface quand elles ont plus d'un point commun. Il faut spécialement distinguer, parmi les deux conditions ainsi formulées, celle qui, purement angulaire, caractérise le parallélisme ; l'autre, essentiellement linéaire, exprime que la trace de la droite appartient au plan.

Fondée géométriquement sur la mesure des angles rectilignes, celle des angles dièdres peut aussi s'y ramener algébriquement,

suivant chacun des deux modes mentionnés au chapitre précédent. Le premier susciterait un long calcul préliminaire, pour formuler d'abord l'intersection des deux plans donnés, puis le plan qui lui serait perpendiculaire, enfin ses traces sur les autres. On évite le circuit algébrique en adoptant le second mode, vu la facilité d'exprimer la perpendicularité d'une droite envers un plan. Ramenée au cas rectiligne, l'inclinaison de deux plans suscite une formule exactement semblable, qui comporte les mêmes tranformations, et des modifications analogues pour les cas extrêmes. Également surchargé d'angles, l'énoncé commun aux deux lois ne se trouve simplifié qu'en apparence, puisque chaque direction y fournit trois données, quoiqu'elle soit assez déterminée par deux, seules vraiment indépendantes. Sous cet aspect, l'usage de la formule d'inclinaison oblige à considérer la relation nécessaire entre les trois angles de chaque droite ou plan avec les trois axes ou plans coordonnés. Trouvée algébriquement d'après la comparaison des trois expressions, ou géométriquement déduite de la loi théocratique, cette liaison consiste dans la constance de la somme des carrés des cosinus ou des sinus, de ces trois angles, envers des axes rectangulaires.

Il serait ici superflu de spécifier la dernière question usuelle sur le plan; l'intersection de deux surfaces est toujours formulée par la simultanéité de leurs équations, sauf la double élimination qui de là conduit aux projections habituelles. Nous devons terminer la première leçon du préambule scientifique de la géométrie subjective en instituant les principales combinaisons des trois problèmes élémentaires qu'elle a successivement caractérisés sous leur triple aspect. Toutefois, la seule formule vraiment usuelle concerne, à cet égard, les distances des points aux plans ou droites, d'après la loi d'écartement, quand on a d'abord obtenu les coordonnées de l'intersection. Établie envers le plan, elle convient à la droite, en le rendant

perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, sur lequel on transporte le point. Rien n'est d'ailleurs plus facile que de l'instituer géométriquement d'après le triangle formé par la distance avec la partie extérieure au plan de l'ordonnée quelconque du point : cet excès devient le numérateur nécessaire de la formule cherchée.

Convenablement appréciées, les autres combinaisons des problèmes fondamentaux sur la théorie algébrique de la ligne droite et du plan sont essentiellement dépourvues de destination scientifique, mais susceptible d'efficacité logique. On doit surtout noter la mesure de la plus courte distance de deux droites quelconques, en y substituant celle de l'une au plan mené par l'autre parallèlement à la première. Rationnellement instituée, cette recherche consisterait à déterminer le minimun de la formule d'écartement, après avoir réduit les six coordonnées qu'elle contient aux deux variables indépendantes que comportent les équations données. Dans cette expression du second degré, le minimun serait aisément caractérisé par la condition d'égalité des racines correspondantes, ce qui fournirait les coordonnées des points cherchés, leur distance, et sa direction, ainsi reconnue perpendiculaire aux deux autres. Établie d'après la règle géométrique, la solution consisterait à formuler la rencontre et la perpendiculaire pour aboutir aux intersections, d'ou résulterait la mesure.

On peut utilement concevoir les calculs, d'ailleurs impraticables, qui rapporteraient aux coordonnées des sommets les lois fondamentales sur les aires et volumes des figures élémentaires. Un seul cas suffit pour caractériser ces projets, en mesurant un tétraèdre d'après les douze coordonnées rectilignes de ses quatre sommets envers trois axes rectangulaires. Toutefois, après avoir institué la solution directe pour l'aire de la base, elle peut être indirectement simplifiée, en substituant au carré

de cette aire la somme des carrés de ses projections sur les trois plans cordonnés. Il est aisé de formuler chacune des aires partielles, en combinant les trois parties de la théorie algébrique de la ligne droite dans le cas plan, qui rend les calculs pleinement exécutables. La loi préliminaire ainsi trouvée, seule usuelle de cette classe, peut d'ailleurs être géométriquement établie d'après la décomposition, additive et soustractive, du triangle en trapèzes ou secteurs correspondants aux coordonnées, rectilignes ou polaires, de ses sommets.

Habituellement divisée, suivant qu'elle concerne les courbes planes ou les surfaces, la théorie de la transposition des axes pourrait être normalement instituée comme unique, puisque le premier cas est naturellement compris dans le second. On doit pourtant maintenir cette décomposition, la première partie de la question étant à la fois plus usuelle et plus facile que la seconde. Toutefois, elles se trouvent successivement exposées dans la même leçon, qui complète le préambule général de la géométrie subjective. Elles exigent d'abord une appréciation commune de leur double destination envers la formulation des figures et la peinture des équations. La leçon finale du préambule cartésien se trouve ainsi décomposée en trois parties nettement distinctes et normalement enchaînées.

On doit d'abord reconnaître que le choix des axes n'est jamais indifférent dans l'instituion algébrique des courbes et des surfaces, dont les équations peuvent être beaucoup simplifiées ou compliquées d'après une disposition favorable ou contraire des coordonnées rectilignes. Bien que l'examen direct de la définition géométrique puisse souvent indiquer la meilleure situation, surtout quand il signale la symétrie ou l'asymptotisme, il ne saurait habituellement suffire à cet égard. Si l'on veut toujours déterminer les axes les plus propres à simplifier l'équation, il faut que leur recherche suscite une théorie spé-

ciale de géométrie subjective, destinée à compléter ou remplacer les indications objectives. Tel est l'office général que les lois sur la transposition des axes doivent directement remplir envers la formulation des courbes et des surfaces. Après avoir établi l'équation avec une situation arbitraire, par la substitution des formules qui rapportent les anciennes coordonnées aux nouvelles, on pourra toujours déduire les simplifications possibles en disposant des constantes ainsi mêlées aux coefficients.

Pour mesurer ce pouvoir de simplification, il suffit donc d'énumérer les données, angulaires ou linéaires, qui déterminent la position des nouveaux axes à l'égard des anciens. Alors on voit que, dans le cas plan, le déplacement de l'origine, qui correspond à la translation des figures, introduit deux constantes linéaires ; tandis que la déviation des axes suscite seulement un angle, si leur inclinaison ne change pas, afin de représenter la rotation. Presque toujours rectangulaires, ils ne doivent être rendus obliques que pour des études exceptionnelles ; parce que les avantages géométriques de la rectangularité sont ordinairement supérieurs à l'inconvénient algébrique de laisser un terme qui disparaîtrait sous une obliquité convenable. On ne peut donc supprimer, habituellement, en géométrie plane, que trois termes d'une équation rectiligne, par le déplacement des axes. Toutefois, l'efficacité de la rotation reste ainsi supérieure à celle de la translation ; parce que l'angle disponible peut faire disparaître l'un quelconque des termes du plus haut degré, tandis que les deux coordonnées de l'origine peuvent seulement modifier les autres degrés. Une équivalente appréciation envers les surfaces montre que la translation et la rotation y peuvent chacune supprimer trois termes, en disposant convenablement des six constantes, tant linéaires qu'angulaires, alors introduites par la transposition des axes. Si les équations à trois variables sont ainsi suscep-

tibles de simplifications plus étendues et plus importantes, cette faculté, de mois en moins précieuse à mesure que le degré s'élève, est loin de compenser leur complication supérieure.

Il faut, réciproquement, considérer la transposition des axes comme destinée à reconnaître l'identité des figures malgré la diversité des équations. Nous y pouvons ainsi voir un supplément nécessaire de la constitution subjective procurée à la géométrie générale par le principe cartésien. Comme la position est seule directement formulée, la comparaison algébrique expose à confondre, entre les équations rectilignes du même degré, les changements de figure avec les différences de situation. Elle a donc besoin d'un procédé général soit normalement institué pour déterminer la vraie source de la diversité de composition, où le déplacement peut quelquefois influer davantage que la dissemblance, surtout dans les petits degrés. Rapportée à de nouveaux axes, dont la situation soit entièrement arbitraire, sans changer leurs inclinaisons, l'équation quelconque acquiert toute la généralité que comporte la figure correspondante. Tableau complet des divers types propres à cette forme, elle peut alors indiquer si d'autres équations conviennent au même siège, en déterminant la transposition de manière à coïncider avec elles. On ne saurait autrement discerner entre le déplacement et la dissemblance, sauf quand la composition algébrique annonce la parité de situation.

Telle est la double explication générale qui suffit ici pour la théorie de la transposition des axes, où les formules de rotation peuvent être aisément établies d'après les règles trigonométriques, du moins envers les courbes planes. On évite la trigonométrie sphérique à l'égard des surfaces en appliquant un principe spécial, où, dans tout contour fermé, la projection d'un côté sur un axe quelconque équivaut à la somme des projections des autres. Rattachée à la règle qui mesure la projec-

tion en multipliant par le cosinus d'obliquité, cette loi suffit pour rapporter aux coordonnées nouvelles chacune des coordonnées anciennes, assimilée à la projection correspondante du commun rayon. Mais les formules ainsi construites sont naturellement surchargées de six angles, qui se trouvent nécessairement liés aux trois éléments de la rotation. Avec leur application quelconque, il faut donc combiner les deux groupes de relations qui, d'une part, existent entre les obliquités de chaque nouvel axe vers les trois anciens, et, d'une autre part, maintiennent les inclinaisons.

Afin d'écarter un tel cortége, qui rend seulement apparente la simplicité de ces formules, le plus fécond des grands géomètres rapporta tous leurs coefficients à trois angles indépendants, dont l'un s'y trouvait déjà sous un autre mode. Rattachant la situation d'un des nouveaux plans coordonnés, et la direction des axes qu'il contient, à sa trace sur l'un des anciens plans, il suffit d'introduire les angles de cette trace avec les deux axes adjacents et l'inclinaison des deux plans. Il est aisé d'y rapporter les huit angles primitifs en résolvant, pour chacun d'eux, l'angle trièdre dont cette trace constitue la commune arête, et dans lequel on connaît ainsi deux faces et leur inclinaison. D'après leur état final, les formules de transposition comportent une application essentielle à la formulation d'une courbe plane envers deux axes de son plan, dont l'un coïnciderait avec une telle trace, sauf les rotations ultérieures. On peut utilement employer ces formules secondaires, d'ailleurs susceptibles d'institution directe, d'abord à reconnaître, dans son couple algébrique, la nature plane d'une courbe spéciale, puis à déterminer sous quelles conditions l'intersection de deux surfaces deviendrait plane.

La théorie de la transposition des axes fut entièrement reconstruite, par le plus philosophe des grands géomètres,

d'après une conception algébrique qui fournit un précieux exemple de la subordination normale de l'abstrait au concret. Afin que le déplacement ne puisse jamais changer le degré, les formules de transposition doivent toujours se borner aux premières puissances des trois variables, outre le terme constant. Mais, si ce principe semblait douteux, l'immuabilité du degré propre au plan, à la ligne droite, à la sphère, etc., dissiperait l'incertitude envers des formules naturellement communes à tous les cas géométriques. Elles font aussitôt reconnaître leurs termes constants comme les coordonnées anciennes de la nouvelle origine, et leur composition indique l'équivalence entre la sucession et la simultanéité pour la translation et la rotation, qu'on peut dès lors isoler. Notre travail étant ainsi réduit à la rotation, chacun des coefficients représente une ancienne ordonnée du point dont l'une des nouvelles devient l'unité tandis que les deux autres s'annulent; ce qui rend ce coefficient équivalent au cosinus de l'angle correspondant. Toutes les formules se trouvant alors composées de tous les angles spontanément introduits, les six liaisons des neuf constantes peuvent algébriquement résulter du rayon que la rotation n'a pas dû changer. Il suffit donc d'exprimer que la somme des carrés de ces trois trinomes coïncide avec celle des carrés des nouvelles coordonnées, pour découvrir les relations géométriquement émanées de la triplicité propre à chacun des nouveaux axes et de leurs inclinaisons mutuelles.

Après avoir consacré deux leçons à la conception fondamentale de la géométrie subjective, et les trois suivantes à son préambule général, il faut instituer les dix qui concernent son domaine direct, en réservant le résumé normal. Vues dans leur ensemble, ces dix leçons forment deux groupes égaux, le premier géométrique, le second algébrique, respectivement destinés à caractériser l'efficacité concrète de l'abstrait et la réac- Coordination spéciale.

tion abstraite du concret. On verra cette réaction prolongée, au chapitre suivant, jusqu'à l'institution du calcul des relations indirectes, afin de mieux adapter l'algèbre à la géométrie, de manière à constituer la philosophie mathématique, dès lors susceptible de s'étendre à la mécanique.

Les cinq leçons géométriques du présent chapitre, quoique pouvant seulement ébaucher la géométrie générale, sont éminemment propres, par la simplicité de leur domaine, à caractériser la subordination de l'abstrait au concret. Alors on sent la portée objective des institutions subjectives dignement vouées à leur destination, plus logique que scientifique. Rien ne peut mieux manifester, dans le domaine le plus simple et le plus universel, l'harmonie fondamentale entre l'ordre extérieur et l'ordre intérieur. Moins sensible quand l'élaboration spéciale devient plus compliquée, l'influence générale de l'algèbre sur la géométrie doit d'abord être appréciée envers les théories dont l'institution n'exige que des calculs faciles. Elles seront ici réduites à celles que l'algèbre élémentaire, caractérisée au chapitre précédent, peut complétement établir, en réservant au chapitre suivant celles qui ne sont pleinement accessibles qu'à l'algèbre transcendante, quoiqu'elles aient, historiquement, été traitées avant son essor.

Un tel ensemble offre deux parties normalement successives, dont l'une ébauche, en trois leçons, la géométrie générale, essentiellement subjective, et l'autre, en deux leçons, la géométrie comparée, nécessairement objective. Si le second poiut de vue fut historiquement postérieur au premier, il doit aussi le suivre dogmatiquement, d'après les mêmes motifs mieux appréciables. On ne peut convenablement penser à la classification des figures que quand l'étude uniforme de leurs propriétés communes est suffisamment instituée.

Mal établie avant le positivisme, la théorie du nombre de

points déterminants, seule commune à tous les systèmes de coordonnées, et la plus propre à caractériser la généralité que le principe cartésien a nécessairement procurée aux conceptions géométriques. A cet égard, il faut d'abord remarquer que les lois correspondantes doivent toujours s'étendre aux conditions quelconques de la détermination des figures, quoiqu'on puisse se borner à les spécifier envers les passages, comme plus faciles à formuler. Généralement communs aux courbes planes, aux surfaces, et par suite aux courbes non planes, les principes de cette théorie n'exigent, entre ces trois cas, que des distinctions secondaires, qui n'altèrent pas l'unité d'exposition. Nous y devons distinguer deux questions successives, selon que la figure se trouve algébriquement définie d'après l'équation la plus complète, ou suivant un type restreint. Il faut, dans le premier cas, compter, d'une part, le nombre des coefficients indéterminés que contient la formule géométrique, et, d'une autre part, le nombre des constantes arbitraires dont ils sont composés. Nous regarderons le plus petit de ces nombres comme indiquant celui des points par où la figure doit passer pour être entièrement distinguée de toutes celles qui comporteraient le même type algébrique ou la définition qu'il exprime. Toutefois envers les lignes quelconques, où la formulation exige deux équations, il faudra prendre la moitié du nombre total des coefficients ou des constantes, qui doit donc être toujours pair, chaque passage fournissant alors deux relations.

Nous devons compléter la règle fondamentale en y spécifiant la modification convenable aux points *singuliers*, c'est-à-dire distincts de tous les autres par une propriété quelconque, pourvu qu'elle y soit prise en considération. On doit toujours les compter double envers les courbes planes et triple pour les surfaces, vu le nombre de leurs coordonnées, qui toutes sont susceptibles de se rapporter aux coefficients ou constantes suivant des for-

mules déterminées en chaque cas. Cet amendement spécial de la loi générale exige une modification exceptionnelle à l'égard des courbes non planes, où, les passages ordinaires fournissant deux relations, et les points singuliers ne pouvant en susciter que trois, ils cessent d'équivaloir à deux points quelconques. Examinée sous cet aspect, la formulation de ces lignes réclame une sollicitude quelquefois délicate, afin d'éviter un excès de constantes ou de coefficients, sans pourtant instituer les projections, dont le calcul devient souvent impraticable. Si, par exemple, on compare les divers couples géométriques d'après lesquels on peut directement formuler le cercle, on reconnaît que le meilleur mode consiste à combiner une sphère avec un plan qui passe à son centre.

On doit maintenant étendre la première théorie de géométrie générale au cas fréquent où la figure est seulement formulée envers une situation plus ou moins particulière. Rien ne peut ordinairement dispenser de procurer à cette formule toute l'extension qu'exige une telle recherche, en y faisant une transposition d'axes entièrement indéterminée, sauf le maintien nécessaire des inclinaisons : alors la règle fondamentale y devient immédiatement applicable. Bien appréciée, cette transformation n'a souvent besoin que d'être projetée, puisqu'elle doit uniquement instituer un dénombrement qui n'exige pas toujours son exécution. Une telle substitution ne pouvant jamais introduire que trois nouvellles constantes pour les courbes planes et six envers les surfaces, il suffit d'ajouter ces nombres à celui qu'indique la formule particulière, afin de connaître ce qu'il devient dans la généralisation du type. Si l'on est d'ailleurs assuré que le nombre des termes qui contiendraient les diverses constantes, auxiliaires et primitives, ne serait point inférieur à leur nombre total, on n'aura pas besoin de développer le calcul pour connaître le nombre de points déterminant, au plus égal toujours à celui-là.

Sous la même impulsion, cette théorie comporte un autre perfectionnement, où l'on est aussi dispensé de connaître, envers la figure proposée, aucun type algébrique, quoique l'appréciation abstraite continue de résoudre la question concrète, en appliquant judicieusement la règle fondamentale. Une analyse directe de la définition géométrique peut toujours annoncer combien elle fournirait de constantes arbitraires à la formule la plus générale, en comptant deux ou trois constantes pour chaque point fixe exigé, deux ou quatre pour chaque droite entièrement fixe, une envers toute grandeur, etc. Convenablement accompli, cet examen fera constamment apprécier une limite supérieure du nombre de points déterminant, ainsi trouvé quelquefois sans aucun calcul, quand la définition n'aura pas introduit de données superflues, et qu'on en sera suffisamment certain.

Bornée aux notions précédentes, la première leçon de géométrie générale peut pleinement instituer cette théorie, dont ma *Géométrie analytique* contient, depuis 1843, le développement spécial. On doit la regarder comme le meilleur type de l'aptitude du principe cartésien à généraliser les pensées géométriques, quoique cette doctrine n'eût jamais été construite avant moi, tant l'empirisme académique éteignait l'esprit d'ensemble, même envers les moindres conceptions. Nulle sollicitude algébrique ne vient ici distraire l'attention philosophique, directement concentrée vers l'harmonie fondamentale entre l'abstrait et le concret, nécessairement résultée de la subordination normale du subjectif à l'objectif. Il ne faut point espérer autant de promptitude et de facilité pour sentir la combinaison cartésienne dans les études géométriques dont la complication exigera plus d'efforts algébriques, qui tendront à faire spontanément négliger l'ensemble d'après les détails. Nous devons donc consacrer toute la première leçon de géométrie générale à cette

théorie caractéristique, dont l'application comparative y fera provisoirement sentir que le nombre de points déterminant n'est pas entièrement reglé par la forme concrète ni par la composition abstraite.

A la leçon suivante appartient la double théorie des diamètres et des centres, dont les deux parties, malgré leur connexité normale ,comportent une institution séparée, où la seconde a plus de prix que l'autre, sauf quand celle-ci fournit des droites ou des plans. Bien examinée, cette séparation se trouve d'autant plus motivée que la première question est seule pleinement générale, de manière à comporter plus d'utilité logique que d'importance scientifique, vu son inaptitude habituelle envers l'appréciation objective. Il faut donc lui consacrer la majeure partie de cette leçon, où l'institution algébrique des diamètres ne présente que des difficultés d'éxécution, en exprimant leur définition géométrique comme ensemble des milieux d'une suite quelconque de cordes parallèles. Moyennes entre les coordonnées des extrémités de chaque corde, celles du point correspondant du diamètre pourront toujours manifester leur relation mutuelle quand on aura pleinement éliminé les autres, d'après le parallélisme et la situation. Également convenable envers les courbes planes et les surfaces, cette méthode, seule normalement adaptée à la généralité de la question, y fournit constamment les relations qu'exige l'entière élimination des quatre ou six coordonnées auxiliaires.

Considérée à l'égard des courbes non planes une telle institution y signale une anomalie algébrique exactement conforme à la contradiction géométrique. Alors les relations fixes, qui résultent du parallélisme et du milieu, restent au nombre de cinq, tandis que les conditions variables de la situation, bornées à deux pour les surfaces, sont maintenant au nombre de quatre, sans que celui des coordonnées auxiliaires cesse d'être six.

Nous voyons ainsi que leur élimination ne pourrait ici fournir aucun siège du milieu, dont les trois coordonnées deviendraient actuellement déterminées, avec celles des extrémités de la corde, d'après les neuf équations du problème. On peut directement reconnaître que la question cesse alors d'avoir un sens, puisque une courbe ne saurait comporter aucune suite de cordes parallèles à moins d'être plane, sauf les lignes indéfinies qui seraient tracées, comme l'hélice, sur des cylindres fermés. Toutefois, l'incohérence géométrique resterait inaperçue, faute d'attention spéciale, si l'anomalie algébrique ne l'avait spontanément signalée ; ce qui confirme l'efficacité logique de la généralisation abstraite, même envers les questions contradictoires.

Une telle méthode, si le calcul des relations était moins imparfait, pourrait aisément instituer la recherche inverse, plus intéressante, dans la plupart des cas, que le problème direct. Rapportant les coordonnées d'un point quelconque du diamètre, et la direction de la corde correspondante, aux coordonnées des deux extrémités, l'équation diamétrale deviendrait aussitôt relative à deux points arbitraires de la figure cherchée. Généralement considérée, cette relation définirait la ligne ou la surface sous une forme qui ne serait pleinement intelligible que si l'on pouvait y réaliser la transformation, toujours conforme à sa nature, où chaque membre ne contiendrait qu'un de ces points. Elle devrait alors exprimer la constance d'une certaine combinaison des deux ou trois coordonnées d'un point quelconque de la figure cherchée, puisque les deux points primitivement comparés y doivent semblablement entrer. Nous aurions ainsi l'équation demandée, avec la constante arbitraire qu'elle doit contenir, pour convenir à l'infinité de courbes ou surfaces homogènes qui comportent les mêmes diamètres en tous sens. Toute la difficulté résulte donc de l'imperfection, actuelle et

future, du calcul des relations envers la séparation de deux groupes de variables qui se trouvent symétriquement mêlés dans une équation quelconque. Ses ressources se bornent à transposer les termes quand le mélange n'affecte pas leur composition propre et consiste seulement à faire participer les deux groupes au même membre : ce qui ne conduit presque jamais à réaliser la théorie inverse des diamètres.

L'emploi de cette théorie permettrait la rectification directe et complète, qu'elle fait spontanément entrevoir, de l'erreur spéciale que je commis, dans le traité mentionné ci-dessus, en représentant les courbes du second degré comme les seules dont tous les diamètres soient rectilignes. Il me fut bientôt possible de reconnaître et de proclamer cette méprise, d'après mon enseignement public, en découvrant, parmi les courbes susceptibles de centre, une infinité de cas décisifs, à l'aide d'une suffisante généralisation du théorème des cordes supplémentaires. Mieux apprécié, ce théorème, qui rend géométriquement évidentes la nature et la réciprocité des diamètres de l'ellipse et de l'hyperbole, ne borne point à ces courbes sa principale influence. Beaucoup d'autres courbes peuvent participer aux mêmes propriétés, en remplaçant la constance du produit des tangentes des inclinaisons de deux cordes supplémentaires quelconques sur un axe fixe par toute relation symétrique entre ces deux angles. Établie ainsi dans un système angulaire, l'équation de chacune de ces courbes est aisément réductible aux coordonnées rectilignes, de la même manière qu'envers l'ellipse ou l'hyperbole.

On peut séparément déterminer les diamètres rectilignes ou plans, seuls vraiment utiles, d'après l'aptitude algébrique où réside leur principale efficacité, quand on y rapporte la figure, en dirigeant l'autre axe parallèlement aux cordes correspondantes. L'équation devant alors supporter sans altération le

changement du signe de cette ordonnée, la méthode spéciale consiste à transposer les axes de manière à remplir cette condition, en faisant convenablement disparaître toutes les puissances impaires de la variable dépendante. Il faut donc substituer les formules de transposition les plus générales, où l'on disposera de deux ou cinq constantes angulaires et d'une linéaire, pour annuler le coefficient total de chacun de ces termes, afin de déterminer le diamètre rectiligne ou plan et la direction de ses cordes. Rendus rectangulaires, ce qui diminuera d'un ou deux le nombre des angles disponibles, les axes propres à remplir ces conditions feront spécialement connaître les droites ou plans envers lesquels la courbe ou surface serait symétrique. Exceptionnelle habituellement, l'existence des diamètres rectilignes ou plans, même obliques, le devient de plns en plus à mesure que le degré s'élève, quoique tous les degrés pairs en offrent des cas.

Si l'on compare la définition des diamètres quelconques à celle des tangentes, on saisit entre ces deux questions un rapprochement qui permettrait de subordonner la seconde à la première, quoique la complication de l'une doive interdire une telle solution envers l'autre. A l'intersection de chaque diamètre avec la courbe, la tangente est nécessairement parallèle aux cordes correspondantes, sauf les points de rebroussement. La direction des cordes propres au diamètre passant en un point donné doit donc déterminer la tangente en ce point, en résolvant l'équation générale des diamètres par rapport à son paramètre angulaire. Transportée aux surfaces, cette méthode fournirait seulement une relation entre deux coefficients angulaires, qui deviendrait l'équation de l'ensemble des tangentes, ou du plan tangent, en éliminant ces coefficients d'après les équations de leur droite. Il convient, logiquement de noter cette liaison entre deux questions de géométrie générale, l'une élémentaire,

l'autre transcendante, qui ne semblent d'abord comporter aucun lien, quoique une telle relation reste scientifiquement inutile.

Convenablement appliquée, l'équation générale des diamètres d'une courbe ou surface pourrait en déterminer le centre, où doivent toujours concourir les diamètres quelconques. La méthode consisterait à chercher les coordonnées du point d'intersection de deux ou trois diamètres, dont les cordes resteraient arbitraires mais distinctes. A l'inspection des formules finales, on reconnaîtrait l'existence d'un centre et sa position, si ces résultats devenaient indépendants des paramètres angulaires, dont la persistance indiquerait le défaut de centralité, commun à la plupart des figures. Vue ainsi, la théorie des centres, aussi simple qu'utile en elle-même, dépendrait d'une théorie ordinairement impraticable et superflue. Il faut donc traiter la centralité d'une manière directe, sans aucune liaison à la recherche générale des diamètres, quoique la relation des deux questions doive être logiquement signalée.

Le centre d'une figure se trouve algébriquement caractérisé par l'aptitude de l'équation à supporter sans altération le changement simultané du signe des coordonnées, si l'origine des axes est placée en ce point, quelle que soit leur direction. Une translation indéterminée doit donc suffire pour trouver le centre, en disposant des deux ou trois coordonnées de la nouvelle origine pour annuler tous les termes de degré pair, si celui de la courbe ou surface est impair, et réciproquement. Cette méthode ferait aisément découvrir les conditions de centralité dans une équation dont les coefficients seraient indéterminés. Il faudrait encore procéder ainsi pour faire concourir le centre, comme point singulier, à la détermination de chaque figure douée de centralité, les relations efficaces étant alors en nombre seulement égal à celui des coordonnées du centre, et les autres devenant identiques. Relativement aux équations contenant le

cinquième couple algébrique, la méthode offrirait, sous d'autres formes, le même esprit, en vertu du même caractère ; quoique la centralité s'y trouvât plus exceptionnelle, quand le centre ne serait pas à l'origine actuelle.

On doit consacrer la troisième leçon élémentaire de géométrie générale à la théorie algébrique de la similitude des courbes et surfaces, qui d'abord semblerait exiger le calcul infinitésimal, d'après les conditions, angulaires et linéaires, de la définition immédiate. Le calcul des relations directes y peut cependant suffire, à l'aide des deux propriétés qui complètent la théorie géométrique de la similitude envers les polygones et les polyèdres, parce qu'elles sont naturellement indépendantes du nombre et de la grandeur des éléments. Il faut algébriquement préférer celle qui géométriquement convient le moins, comme mêlant des conditions de position à l'appréciation d'un attribut purement relatif à la forme. Vu philosophiquement, cet inconvénient devient un avantage pour la formulation, où la situation est seule directement exprimée. Établie ainsi, la théorie de la similitude comporte une institution directe et facile envers le cas le plus usuel, auquel on peut toujours ramener les autres.

Toutes les fois que deux figures semblables sont parallèlement disposées, les coordonnées de leurs points homologues offrent un rapport constant, égal à celui de leurs dimensions, si l'origine est placée au centre de comparaison, quelles que soient la direction et l'inclinaison des axes. Il suffit alors, pour apprécier la similitude, de faire coïncider les deux équations en multipliant les variables de l'une par une constante arbitraire, dont on disposera de manière à l'identifier avec l'autre. Étudiée ainsi, la ressemblance est certaine, mais non la dissemblance, à moins qu'on ne soit préalablement assuré, ce qui devient souvent possible, que les axes sont géométriquement disposés de la même façon dans les deux figures. Relativement

à ce cas, usuel quoique exceptionnel, la méthode fera facilement connaître les conditions de similitude, ou la ressemblance spontanée des courbes et surfaces de même espèce. Nous pourrons ensuite compléter la théorie envers les équations qui seraient actuellement incapables d'une telle coïncidence, puisqu'elles doivent toujours la comporter si la situation comparative des deux figures est convenablement changée. Afin d'y parvenir, il suffit d'opérer, pour l'une seulement, une transposition d'axes entièrement indéterminée, sans altérer l'inclinaison. Si l'on peut disposer des trois ou six constantes arbitraires ainsi mêlées aux coefficients de la première courbe ou surface de façon à l'identifier avec l'autre, où les variables seraient arbitrairement multipliées, la similitude se trouvera constatée, ou l'on découvrira ses conditions.

Il faut normalement compléter la théorie de la similitude en expliquant la possibilité, fréquente, quoique exceptionnelle, de l'instituer indépendamment de toute équation, d'après la seule définition du type géométrique. Mal appréciée avant le positivisme, la loi générale que j'ai justement attribuée au précurseur de la régénération didactique réduit la diversité des figures semblables à l'inégalité de leurs échelles. Principe ou résumé de la théorie de la similitude, cette loi permet de l'instituer toutes les fois que la définition géométrique peut être pleinement dégagée des considérations de position et réduite aux conditions de grandeur ou de forme. Elle indique d'abord que les courbes ou surfaces de l'espèce proposée sont toujours semblables entre elles, comme les cercles, les paraboles, les sphères, etc., si la grandeur n'y dépend que d'un seul paramètre. La similitude exige, en général, la proportionalité de tous les paramètres linéaires vraiment indépendants, ou l'égalité des paramètres angulaires ainsi que numériques, que le changement d'échelle ne saurait altérer.

Le succès de cette méthode dépend d'une analyse, souvent difficile dans les cas favorables, et d'ailleurs ordinairement impossible, dont l'issue est rarement certaine ; en sorte qu'elle ne peut aucunement dispenser d'établir la théorie algébrique. On doit donc regarder celle-ci comme étant la seule pleinement générale, quoique la théorie géométrique lui fournisse un supplément très utile en beaucoup de cas, quand la définition permet une séparation nette, facile et sûre, entre la grandeur et la position. Vue philosophiquement, l'élaboration propre à la théorie supplémentaire de la similitude offre une véritable analogie avec celle qui convient à la théorie supplémentaire du nombres de points déterminant. Elle présente une difficulté supérieure, puisque le dénombrement qui suffit à celle-ci ne constitue qu'un préambule pour celle-là, dont le principal effort consiste à discerner la grandeur à travers la situation. D'après cela, l'insuffisance déjà reconnue envers l'une devient, à plus forte raison, propre à l'autre, sans altérer leur commune efficacité, qui motive le rapprochement logique des deux extrémités du domaine élémentaire de la géométrie subjective.

Dans ces trois leçons décisives, les jeunes disciples de l'Humanité peuvent spécialement apprécier l'aptitude normale du principe cartésien à constituer la subordination fondamentale de l'abstrait au concret. Elles deviennent mieux susceptibles de réaction philosophique en complétant le point de vue général par le point de vue comparatif, qui s'y trouve naturellement lié, quand les résultats objectifs des théories subjectives sont assez multipliés et variés. Il faut maintenant instituer sous ce nouvel aspect, le domaine élémentaire de la géometrie générale, en y consacrant les deux leçons suivantes, dont l'une appréciera le principe algébrique de la taxonomie géométrique, et l'autre ses applications caractéristiques. Tel est le

dernier progrès que comporte l'ensemble du développement propre au principe cartésien, qui, constituant la géométrie subjective, devait finalement généraliser la géométrie objective. A l'égard de l'une, comme envers l'autre, le calcul des relations directes a bientôt manifesté son insuffisance logique et scientifique, quoique toutes deux doivent être normalement ébauchées avant la réaction algébrique qui suscita le calcul transcendant.

Dans la partie subjective de la géométrie générale, tout le développement du principe cartésien est directement relatif aux courbes planes, et les surfaces suscitent seulement l'extension finale des dogmes d'abord élaborés pour le cas fondamental. Elles constituent, au contraire, le domaine essentiel et direct de sa partie objective, dont les diverses conceptions n'offrent rien qui convienne aux lignes, toujours incapables de classement rationnel. Pour expliquer cette diversité d'application entre les deux points de vue propres à la géométrie générale, il faut philosophiquement apprécier la nécessité d'instituer les méthodes envers les cas les plus simples et de comparer les résultats d'après les destinations les plus complexes. On doit regarder les surfaces comme seules susceptibles, en vertu de leur complication supérieure, de fournir au classement géométrique des caractères assez prononcés et variés. Telle est la source normale d'un contraste analogue à celui que manifeste le classement biologique, où les principes généraux de la taxonomie ne sont pleinement applicables qu'aux animaux, vu la trop grande simplicité des végétaux.

Il suffit d'étendre cette comparaison aux divers domaines encyclopédiques, sans la borner aux différentes parties de chacun d'eux, pour sentir que la théorie des classifications appartient, non à la base, mais au sommet de la hiérarchie scientifique. Mieux appréciables quand la complication des

phénomènes fait davantage ressortir les analogies et les contrastes, les principes taxonomiques ne peuvent pleinement surgir qu'envers le spectacle social et moral. Bien que le domaine vital ait dû susciter leur systématisation, il n'a pu qu'ébaucher des notions dont la source, le développement, et la destination sont également propres à la science où l'objet et le sujet coïncident. Une insuffisante complication, et trop d'éloignement du centre de l'unité, rendent l'ordre chimique peu propre à caractériser la théorie du classement, qui, quoique son application y soit nécessaire, ne peut y venir que d'en haut. Étendue jusqu'au domaine mathématique, cette doctrine ne saurait y manifester que son aspect le plus simple et le moins décisif ; les conceptions spéciales qui l'y concernent resteraient même incapables de réaction philosophique si le positivisme ne les rattachait point à la régénération didactique.

Convenablement réduite à sa destination, plus logique que scientifique, la taxonomie géométrique consiste dans l'établissement des familles naturelles parmi les surfaces, d'après leur génération, définie par la nature et le mouvement de la génératrice. On ne voit, en géométrie, aucun germe de l'élément le plus difficile et le plus important de la théorie du classement, la coordination des groupes, aboutissant à la construction d'une hiérarchie, nécessairement réservée à la science finale. Une telle institution ne pourrait géométriquement surgir que si les lignes, d'après lesquelles on rapproche les surfaces, étaient elles-mêmes classées. Rien ne permet d'espérer qu'elles en soient jamais susceptibles, faute de caractères assez tranchés et variés pour y résumer l'ensemble des ressemblances et des différences. Toutes les conceptions, algébriques et géométriques, sur le classement des surfaces sont nécessairement incapables de s'étendre aux lignes, où la notion de famille devient ordirement équivoque.

Toutes les surfaces d'une même famille ont une même génératrice, mue suivant la même loi, de manière à ne différer que par la directrice. Elles sont susceptibles d'une équation collective, qui consiste en une relation entièrement arbitraire entre deux combinaisons complétement déterminées des trois coordonnées d'un point quelconque. Malgré cette indétermination, une telle équation peut vraiment caractériser le groupe correspondant, puisqu'elle rend constante l'une de ces deux formations quand l'autre l'est, de manière à définir les coupes résultées des surfaces assujetties à cette constance. Pour formuler ainsi chaque famille géométrique, il faut réduire le couple algébrique de la génératrice à ne contenir que deux paramètres arbitraires, dont la relation indéterminée fournira l'équation collective quand on les aura rapportés aux coordonnées. L'impossibilité d'accomplir cette réduction, après avoir exactement exprimé toutes les conditions géométriques, indiquerait une définition insuffisante, où le mouvement de la génératrice serait imparfaitement appréciable. A chaque espèce de génératrice, sans excepter la plus simple, il pourrait ainsi correspondre une infinité de familles différentes, dont l'ensemble, plus ou moins vaste suivant le nombre des paramètres finalement arbitraires, ne comporte point d'équation directe. Réservée à la géométrie transcendante, la formulation de ces groupes supérieurs peut quelquefois s'accomplir d'après une équation indirecte, mais de manière à confirmer la restriction essentielle de la géométrie objective aux familles proprement dites, seules assez caractérisées.

On peut algébriquement instituer de nouvelles familles de surfaces presque aussi facilement que des courbes nouvelles, en composant à volonté des équations collectives, conformément au principe précédent. Ces familles seront ainsi définies d'après la nature et le mouvement de la génératrice, dont la formula-

tion résultera de la constance des deux combinaisons de coordonnées entre lesquelles l'équation collective indique une relation arbitraire. Il faut toujours regarder de telles équations comme caractérisées par la possibilité d'être ramenées à deux variables, quand on y rapporte deux des coordonnées à la troisième en substituant aux deux formations données deux variables auxiliaires, équivalentes aux paramètres de la génératrice. Alors on voit que, malgré leur indétermination apparente, ces équations ont une signification nettement appréciable, qui ne pourrait aucunement convenir à des relations quelconques. Rattachée à la sentence lagrangienne, cette appréciation représente la dernière évolution du principe cartésien comme ayant conduit l'esprit mathématique à concevoir des équations plus générales que celles d'où résultent des espèces et non des familles, tant que les coefficients sont seuls indéterminés.

Nous devons surtout employer les équations collectives pour décider si les familles correspondantes comprennent une surface algébriquement donnée. Une substitution des formules propres à réduire, de trois variables à deux, l'équation collective fera spontanément disparaître la troisième coordonnée dans l'équation spéciale que l'on veut apprécier, ou déterminera les conditions que les coefficients doivent remplir pour cela. Bien examinée, cette question, seule assez précise envers la génération de chaque surface, comporte une solution entièrement indépendante des équations collectives, qui resteront toujours inconnues dans la plupart des cas. La recherche consiste alors à décider si la surface proposée peut être engendrée par une ligne donnée, sans rien spécifier sur son mouvement, dont la loi résultera d'une telle élaboration. Obligées de rendre identique l'équation de la surface, les équations de la ligne décideront, par leur substitution, si leurs paramètres peuvent se rapporter

convenablement à l'un d'eux, laissé pleinement indéterminé; ce qui spécifiera la génération.

Sous son double aspect, le principe général de la taxonomie géométrique se trouve nécessairement restreint aux surfaces: les courbes sont engendrées par un point, qui n'a pas de forme; les équations à deux variables ne peuvent en contenir moins. Un classement propre devient d'ailleurs illusoire envers les lignes, soit géométriquement, soit algébriquement, chacune comportant beaucoup de rapprochements hétérogènes, où le choix est impossible; ce qui réagit sur les surfaces, en interdisant la coordination de leurs diverses familles. Toutes les familles de courbes vraiment instituées se bornent aux trois qui résultent des équations binomes dans mon traité spécial, où j'ai montré l'inanité géométrique de la classification algébrique fondée sur le nombre ou les exposants des termes. Il faut même étendre ce jugement jusqu'à la nature des équations, puisque le cercle peut figurer parmi les spirales logarithmiques et dans beaucoup d'autres espèces: chaque nouveau système de coordonnées suscite des analogies nouvelles, d'abord algébriques, puis géométriques. Le classement déduit du nombre de points déterminant, quoique mieux conçu qu'aucun autre, devient finalement contraire à l'ensemble des comparaisons spéciales; il séparerait la ligne droite, le cercle, et l'hélice, dont la commune uniformité domine leurs différences quelconques.

Fondée sur une conformité directe, la classification des surfaces ne comporte une expression algébrique, envers chaque système de coordonnées, que parce qu'elle résulte d'une appréciation géométrique, naturellement indépendante de tout mode de formulation; en sorte que la géométrie guide l'algèbre. A l'égard des courbes, il faudrait renverser l'harmonie philosophique, puisque le trajet linéaire d'un point ne saurait cesser d'être entièrement déterminé sans devenir complétement

vague, faute de l'intermédiaire logiquement résulté de la figure génératrice envers le siège superficiel. Bien examiné, le classement des lignes devrait donc avoir une source purement algébrique, qui, nécessairement relative au système de coordonnées adopté, ne pourrait jamais susciter des jugements fixes, directement propres aux formes, indépendamment de toute expression. Le conflit insurmontable de ces deux appréciations suffit pour démontrer l'impossibilité de classer les lignes, et, par suite, de coordonner les familles de surfaces. Étendue d'après l'algèbre transcendante, la géométrie objective développe son domaine primitif sans le dépasser, de manière à ne pouvoir jamais instituer une véritable hiérarchie, que l'algèbre élémentaire aurait nécessairement ébauchée si sa construction était possible.

Il faut regarder la partie subjective de la géométrie générale comme essentiellement vouée à l'établissement des méthodes, dont l'application n'y figure qu'à titre d'éclaircissement. Nous devons, au contraire, consacrer sa partie objective à la comparaison des formes ainsi devenues susceptibles d'appréciation systématique, après avoir posé les principes de leur rapprochement. Établis dans la leçon que je viens d'instituer, ils doivent donc être maintenant développés et spécifiés par les applications propres à la leçon suivante. Réduit aux cas essentiels, ce complément nécessaire peut se borner à formuler et comparer les plus simples familles émanées de la ligne droite et du cercle, en y joignant quelques peintures d'équations collectives directement composées. Toutefois, il convient aussi d'y considérer des exemples caractéristiques de formulation et d'appréciation indépendantes des équations collectives, surtout envers les surfaces développables, les tubes, et d'autres cas indiqués dans mon traité spécial.

Guidée par les conceptions propres à la leçon précédente, la

seconde leçon de géométrie objective peut être scientifiquement développée sans exiger de nouvelles explications logiques ; en sorte que je dois ici me borner à la signaler. L'application spéciale des principes généraux y fera mieux sentir les limites nécessaires de la taxonomie géométrique et son inaptitude radicale à caractériser la théorie philosophique du classement, quoiqu'elle en constitue l'introduction didactique. On est ainsi conduit à reconnaître que la géométrie générale est essentiellement subjective, son domaine objectif devant toujours rester non moins imparfait qu'oiseux, au delà des plus simples spéculations, normalement épuisées. Sous cette impression, on sent davantage la destination, plus logique que scientifique, de la meilleure partie du domaine mathématique, où les conceptions primitivement dirigées vers l'objet sont finalement réservées au sujet. Appréciée philosophiquement l'étude, générale et spéciale, de la taxonomie géométrique dispose à porter plus de clarté, de précision, et même de consistance, dans toutes les spéculations taxonomiques, d'après les habitudes émanées du cas le plus simple quoiqu'il doive être le plus imparfait.

Un examen philosophique du domaine élémentaire, objectif et subjectif, de la géométrie générale fait bientôt sentir l'insuffisance du calcul des relations directes pour développer le principe cartésien autant que l'exige sa destination normale. Les doctrines que je viens de caractériser n'ébauchent que sous les aspects les plus simples l'étude préliminaire qui concerne les propriétés des figures et n'abordent aucune des questions finales sur la mesure de l'étendue. Toutes les théories précédentes sont pourtant les seules qui puissent être pleinement instituées par l'algèbre élémentaire, sans que le calcul transcendant y doive rien ajouter, sauf en complétant l'institution des familles. Il est vrai que le fondateur de la géométrie géné-

rale fut surtout préoccupé de la théorie des tangentes, et ses premiers successeurs s'efforcèrent même d'aborder celle des quadratures. Mais ces tentatives, assez caracterisées dans mon traité spécial, ne purent finalement constater, malgré de précieux résultats scientifiques, que l'insuffisance logique des moyens algébriques qu'elles employèrent. Avant de pousser le calcul des relations du cas direct au cas indirect, la géométrie cartésienne réagit sur lui de manière à préparer une telle régénération, en y faisant déjà surgir des dispositions plus générales, quoique toujours dirigées vers la résolution des équations. Suscitant une transition nécessaire entre l'algèbre élémentaire et l'algèbre transcendante, cette algèbre supérieure doit normalement succéder à la première ébauche de la géométrie générale, en assimilant l'initiation individuelle à l'évalution collective,

Rationnellement appréciée, l'idée de *loi*, d'où résulte celle d'*équation*, suppose la simultanéité de deux variables, dont les divers états manifestent une relation constante. Il faut donc regarder le principe cartésien comme ayant institué le vrai domaine de l'algèbre en la destinant à fournir des méthodes générales à la géométrie, où les équations sont spontanément conçues à deux variables. Toutes les spéculations envers une seule inconnue rappellent l'origine arithmétique qui fournit à l'algèbre une base trop étroite, finalement subordonnée à sa source géométrique, en rattachant le cas particulier au cas général par une élimination réelle ou fictive. On doit normalement regarder les doctrines purement abstraites comme uniquement destinées à compléter la solution des questions concrètes lorsqu'il faut la pousser jusqu'aux évaluations. Sous cet aspect, un tel complément reste scientifiquement nécessaire, et son institution devient logiquement utile à la préparation directe du principal essor algébrique.

A cette élaboration sont normalement réservées les cinq dernières leçons du cours élémentaire de géométrie générale, en consacrant les trois premières à la théorie des équations d'un degré quelconque, et les deux autres à leur résolution numérique. Bien conçue, la première leçon d'algèbre supérieure, directement vouée à la composition de ces équations, repose sur leur décomposition en facteurs, qui constitue le principal caractère des formations d'une seule variable. Une appréciation géométrique du cas de deux variables suffit pour y manifester l'impossibilité normale d'une telle décomposition, immédiatement contraire au principe cartésien, puisque la diversité des peintures se trouverait ainsi réduite à la multiplicité des éléments rectilignes. Sous l'aspect purement abstrait, la formule qui mesure le nombre total des coefficients par le nombre triangulaire correspondant au degré montre que le produit de deux facteurs ne contiendrait pas assez de constantes arbitraires pour représenter sans conditions un polynome à deux variables. On voit, au contraire, dans le cas d'une seule variable, un tel produit offrir toujours la généralité convenable, le nombre des coefficients devenant alors égal au degré; ce qui, d'après la prépondérance de cette notion, confirme la nature, essentiellement exceptionnelle, de ce domaine algébrique.

Sous cette impulsion, on reconnaît l'équivalence entre la résolution de telles équations et leur décomposition en facteurs, finalement réductibles au premier degré, d'où l'on déduit tous les autres diviseurs, dont la recherche immédiate obligerait à résoudre des équations plus compliquées. Effectuant la multiplication des facteurs elémentaires, on voit aussitôt surgir les relations générales entre les coefficients et les racines, qui, directement découvertes, par le précurseur cartésien, envers les degrés inférieurs, ne s'étendraient aux supérieurs que d'après une induction difficile. A la même source remonte la règle du

régénérateur de la géométrie sur le nombres des racines, additives ou soustractives, dans les équations où toutes sont réelles, en appréciant l'introduction successive des variations ou permanences du signe des termes régulièrement ordonnés. Nous y devons aussi rattacher l'institution des types exceptionnels où quelques racines offrent des relations mutuelles, immédiatement exprimables d'après les facteurs correspondants, et même susceptibles d'être ainsi transformées en conditions propres aux coefficients. Toutes les spéculations sur les racines communes à deux équations sont alors réductibles à la considération de leur commun diviseur, dont la détermination ferait spécialement connaître ces racines et faciliterait l'appréciation des autres.

Guidé par la décomposition fondamentale, l'examen du cas d'égalité suscite la plus importante des théories propres aux équations exceptionnelles, en introduisant la notion capitale des formations dérivées, d'après leur définition générale, alors équivalente à la somme des quotients élémentaires. Rapprochée de l'équation primitive, l'équation dérivée, n'a de racines communes que celles qui s'y trouvaient répétées, et dont la reproduction, avec une moindre muliplicité, devient aussi conforme à la liaison géométrique qu'à la subordination algébrique. Alors la recherche des racines égales, ou des conditions d'égalité, dépend du commun diviseur de ces deux polynomes, de manière à permettre la réduction de l'équation proposée à celles que comportent les diverses multiplicités. Dans ces calculs, habituellement impraticables, on peut toujours choisir entre la suite des dérivées de l'équation primitive et la succession, plus commode mais moins directe, des premières dérivées qui concernent les diviseurs communs. Il est ordinairement préférable, pour trouver les conditions d'égalité, de se borner à l'usage immédiat de la décomposition fondamentale ou des lois correspondantes sur les coefficients.

On doit normalement consacrer la seconde leçon d'algèbre supérieure à la théorie générale de la transformation des équations, naturellement divisée en deux parties, dont la principale comporte deux modes également recommandables. Par la plus simple, due au précurseur cartésien, chaque racine est isolément modifiée suivant une loi quelconque, qui doit uniformément traiter toutes les racines, puisqu'elles sont uniformément définies. Toute transformation de ce genre s'accomplit en éliminant l'inconnue primitive entre l'équation proposée et celle qui formule le nouvel état des racines. Elle peut ordinairement s'exécuter par substitution, puisque la nouvelle inconnue se trouve le plus souvent liée à l'ancienne d'après une équation fort simple, quelquefois du premier degré. Rapprochées l'une de l'autre, les deux équations ne peuvent acquérir de racines communes que dans des cas exceptionnels, que leur commun diviseur suffit pour caractériser, surtout envers la reciprocité.

Vue sous son aspect le plus simple et le plus usuel, la seconde classe de transformations, essentiellement due au géomètre philosophe, consiste à former la seconde équation en combinant uniformément deux racines quelconques de la première ; ce qui nécessite deux éliminations successives. Il faut ordinairement regarder la solution comme n'exigeant qu'une seule élimination parce que l'autre dépend d'une substitution habituellement facile, d'après la simplicité de la liaison de la nouvelle iuconnue aux deux racines indéterminées de l'équation proposée. Toujours la transformée ainsi construite peut et doit être déchargée des combinaisons de chaque racine avec elle-même, soit en défalquant du résultat l'équation spéciale qui les comprendrait, soit surtout en préparant l'élimination de manière à prévenir cette surcharge. Alors l'équation finale est constamment réductible au degré moitié moindre, d'après la relation particulière que présentent, en chaque cas, celles de ses racines qui pro-

viennent de deux combinaisons inverses. La comparaison de l'équation définitive à l'équation primitive peut toujours fournir, d'après les coefficients de l'une, des indications sur les racines de l'autre, surtout quand celles-ci sont mutuellement liées, et principalement envers leur égalité quelconque.

Exprimée par un type dont le degré se trouve ainsi fixé, la transformée pourrait directement acquérir des coefficients déterminés, en les rapportant tous aux racines de la proposée, suivant les lois de leur composition immédiate. Sous cet aspect, ils deviendraient des formations nécessairements symétriques des racines primitives, plus ou moins accumulées dans leurs différentes expressions. Toutes les formations composées sont directement réductibles à celle dont chaque terme ne contient qu'une seule racine ; en sorte que la difficulté consiste à déduire, des coefficients de l'équation proposée, la somme totale des puissances semblables de ses diverses racines. Rattachée à la composition des deux ou trois premiers coefficients, la sommation des carrés ou cubes put originairement susciter la découverte inductive de la loi générale qui subordonne chacune de ces questions à l'ensemble des précédentes. Afin de la mieux manifester, il suffit d'identifier les deux expressions qui rapportent la dérivée, tantôt aux termes de l'équation primitive, tantôt à ses facteurs élémentaires. D'après la composition des règles ainsi surgies, chaque sommation simple dépend d'un nombre de coefficients égal à l'exposant correspondant, et la même remarque s'étend aux formations composées, envers la somme des exposants propres à chaque type. On ne peut suffisamment appliquer cette théorie qu'avec un double complément, en prolongeant à volonté les sommations simples, d'abord limitées au degré de l'équation, et ramenant les puissances soustractives ou additives, à l'aide de l'équation réciproque, qui renverse l'ordre des termes.

Rattachée à la décomposition fondamentale, la théorie générale de l'élimination, objet de la troisième leçon, résulte du privilège des valeurs normales de l'inconnue à chasser, pour introduire un commun diviseur entre les deux équations simultanées envers l'autre inconnue. Établie ainsi, l'élimination peut toujours s'accomplir d'après la suite de divisions qu'exigerait la détermination de ce facteur commun ; elles sont alors destinées à formuler son existence, par l'annulation du reste final, qui forme l'équation cherchée. Généralement surchargée de multiplicateurs étrangers, elle ne saurait être pleinement dégagée qu'à l'aide d'artifices pénibles, qui doivent être normalement écartés, sauf à recourir aux deux autres modes d'élimination, si cette épuration est indispensable. Il faut regarder comme le principal privilége de cette méthode la faculté qu'elle procure de renverser la question, en instituant la seconde équation pour que l'élimination déduise, de la première, un résultat donné, vu la disponibilité des divers intermédiaires qui l'y rattachent. On doit d'ailleurs juger ce mode, comme les deux autres, scientifiquement impraticable ; mais leur étude est logiquement utile, pour montrer la possibilité d'éliminer sans résoudre, quoique la substitution constitue le seul procédé général et praticable, malgré son avortement habituel.

Nous devons ensuite apprécier la méthode du fécond géomètre pour éliminer en généralisant un artifice spontanément surgi dans les équations du premier degré, quoiqu'il y soit peu convenable. Elle consiste à multiplier les deux équations, considérées envers l'inconnue à chasser, par un facteur à coefficients indéterminés, dont le degré soit égal, dans chacune, à celui de l'autre moins un, pour identifier ces produits en disposant des constantes arbitraires. Réglé suivant cette loi, le nombre total de ces constantes se trouve toujours égal au nombre qui précède celui des termes comparés, en sorte que,

quand elles seront toutes éliminées, il devra rester une relation directe, ainsi devenue l'équation finale. Bien apprécié, ce mode revient à ramener l'élimination entre deux équations d'un degré quelconque à celle d'un nombre croissant d'inconnues entre des équations qui sont toujours du premier degré, mais dont les coefficients ne peuvent jamais être numériques. On voit ainsi la complication, bientôt inextricable, des formules élémentaires, réagir sur tous les autres cas, de manière à rendre habituellement impraticable un mode qui doit d'abord sembler fort simple.

Il faut compléter la théorie générale de l'élimination en l'instituant sous son troisième aspect, qui la rattache à celle des formations symétriques, dont une telle application pouvait être philosophiquement prévue d'après son aptitude à transformer sans éliminer. Nous n'avons qu'à substituer, dans la seconde équation, chacune des racines de la première envers l'inconnue à chasser, pour concevoir l'équation finale comme le produit de tous les facteurs ainsi formulés, ce qui la composera de groupes nécessairement symétriques. Convenablement exécutées, les multiplications indiquées feront toujours connaître de quelles formations, simples et composées, dépend chaque partie d'un tel type, dès lors réductible, suivant les règles ci-dessus indiquées, aux coefficients algébriques de la première équation. Une telle méthode, non moins impraticable que les deux précédentes, peut seule compléter cette théorie, en y dévoilant la loi générale qui représente le degré de l'équation finale comme normalement égal au produit des degrés des deux équations primitives. Réagissant sur la géométrie, cette loi borne le nombre des points qui peuvent être communs à deux courbes de degrés différents; mais le nombre de points déterminant fournit une meilleure limite quand les degrés coïncident.

Historiquement due à la réaction abstraite du principe car-

tésien, la résolution numérique des équations se distingue de leur résolution algébrique par une généralité qui compense l'imperfection d'un tel point de vue et prépare le principal essor du calcul des relations. Alors les diversités logiques, auparavant relatives au degré des équations, se rapportent à la nature des racines, dont l'évaluation directe exige des méthodes différentes suivant qu'elles sont imaginaires ou réelles, incommensurables ou commensurables, distinctions précédemment bornées aux résultats. Toujours la détermination des racines imaginaires de l'équation proposée serait réductible à celle des racines réelles de ses transformées aux sommes et produits binaires, qui fourniraient les coefficients de ses facteurs du second degré, si ces calculs, habituellement impraticables, pouvaient suffire aux coefficients incommensurables. Il faut normalement préparer l'évaluation spéciale des racines réelles, additives ou soustractives, en leur assignant des limites générales, dont l'inférieure se ramène à la supérieure, indiquée par un nombre, facilement calculable, propre à faire prévaloir le premier terme sur l'ensemble des autres. Fondée sur ce préambule, la détermination des racines commensurables, principal objet de la quatrième leçon d'algèbre supérieure, doit d'abord réduire la recherche des racines fractionnaires à celle des racines entières.

On y parvient, quand tous les coefficients sont devenus entiers, en considérant que toute fraction susceptible de satisfaire à l'équation a pour dénominateur un diviseur du premier coefficient, par lequel il suffit donc de multiplier les racines. Réduite au cas entier, l'évaluation des racines commensurables s'accomplit en les cherchant parmi les diviseurs du dernier terme, après avoir écarté ceux qui ne supporteraient pas les épreuves relatives à la double substitution de l'unité. Généralisant la remarque sur laquelle repose cette divisibilité, le précurseur de la régénération didactique institua la suite décisive de condi-

tions élémentaires qui dispense de tout calcul de puissances, en combinant graduellement tous les coefficients, pour rejeter les diviseurs inadmissibles. A l'aspect de ces obligations numériques, on reconnait que l'existence des racines commensurables, déjà devenue exceptionnelle dans le second degré, l'est de plus en plus à mesure que le degré s'élève. Si l'on applique cette méthode à l'équation aux sommes, ou bien à l'équation aux produits, on déterminera les diviseurs commensurables du second degré, qui feront connaître les seules racines incommensurables exactement appréciables. Mais ces racines cessent normalement d'appartenir aux degrés supérieurs, dont chacun offre sa propre incommensurabilité, toujours anomale au-dessus, et jamais possible au-dessous. Expliquée convenablement, cette observation fait mieux sentir l'imperfection de toute résolution purement numérique, le peu d'efficacité de la méthode propre aux racines snsceptibles de détermination exacte, et la concentration du problème vers l'évaluation approximative des racines incommensurables.

Sous ce dernier aspect, auquel on consacre la leçon finale d'algèbre supérieure, l'ensemble des notions sur la résolution numérique des équations quelconques dépend du principe qui proclame l'existence d'une racine entre deux nombres dont les substitutions sont de signe contraire. Toutes les conditions d'un tel symptôme se bornent à la continuité de la courbe correspondante, qui ne saurait jamais passer d'un côté de l'axe à l'autre sans le traverser, à moins d'être interrompue dans l'intervalle des points comparés. Appréciés géométriquement, les autres aspects du principe des substitutions comportent la même généralité, soit quand la conformité du signe indique l'interposition d'un nombre pair de racines, soit lorsqu'un nombre impair quelconque est annoncé par le contraste. Relativement aux équations décomposables en facteurs du premier degré,

l'appréciation algébrique confirme ou remplace l'inspiration géométrique, d'après l'invariabilité du signe du produit total des facteurs imaginaires. Étudié complétement, par l'une ou l'autre voie, le principe des substitutions doit toujours admettre la restriction d'égalité pour les racines indiquées, si l'équation, n'est pas supposée préalablement affranchie de toute multiplicité.

Tardivement appréciée, la principale difficulté de la résolution numérique des équations concerne la séparation des racines, qui doit normalement précéder et guider leur évaluation Réservée au géomètre philosophe, la position générale d'une telle question avait été jusqu'alors négligée, par suite d'un empressement trop empirique à déterminer les racines sans avoir pris les précautions convenables. Il fallut que l'expérience sollicitât un examen approfondi du principe des substitutions, qui, complété, manifesta le danger d'écarter des intervalles efficaces et de poursuivre des calculs inutiles, en substituant sans séparer. Un problème de quelque importance ne pouvant jamais être irrévocablement posé que d'après une solution quelconque, cette loi philosophique doit normalement motiver l'appréciation dogmatique de la méthode qui, quoique trop compliquée, fit historiquement surgir la séparation des racines. Nous pouvons séparer, soit en rapprochant assez les nombres substitués pour qu'ils ne puissent pas comprendre plus d'une racine, soit en découvrant combien ils en peuvent embrasser. Fondée sur le premier mode, la méthode initiale consiste à rendre la différence successive des nombres substitués inférieure au moindre des intervalles propres aux racines cherchées. On y peut toujours parvenir en formant, d'après la théorie des transformations, dont ce problème suscita la principale institution, l'équation ayant pour racines toutes les différences des racines de l'équation proposée.

Il est alors facile de préparer l'évaluation des racines en transformant l'équation de manière à rendre leur moindre intervalle supérieur à l'unité, ce qui permet de se borner à substituer la suite des nombres entiers. Normalement séparée, d'après le contraste de signe ainsi produit, chaque racine peut être graduellement calculée, à l'aide des substitutions intermédiaires, ou de son développement en fraction continue. Fondé sur une transformation aisément instituée, ce dernier mode, rationnellement préférable, n'exige aucune préparation envers les équations auxiliaires qu'il fait successivement surgir, quoique chacune ait autant de racines réelles que leur commune source. Estimée suivant la règle propre à toutes les fractions continues, l'approximation peut toujours être convenablement graduée, en prolongeant la suite des opérations. Rien ne manque donc à la rationalité d'une telle institution, où l'inaugurateur de la résolution normale des équations numériques fournit une manifestation spéciale de l'aptitude systématique qu'il sut dignement appliquer à de plus grands desseins.

Appréciée scientifiquement, cette méthode, logiquement admirable, ne saurait dispenser d'une autre solution, parce qu'elle exige des calculs habituellement impraticables. Le mode finalement préféré pour la séparation des racines émane du plus éminent des trois représentants extrêmes de l'évolution mathématique, que ses tentatives sur la théorie algébrique de la chaleur conduisirent à concevoir ce problème envers des équations quelconques, surtout exponentielles. Il sut admirablement agrandir et féconder une inspiration originale, dont il fit noblement apprécier le modeste auteur, oublié depuis un siècle. Elle consiste à comparer, sous l'impulsion géométrique, complétée par l'appréciation algébrique, la résolution d'une équation quelconque à celle de sa dérivée immédiate, et par suite de toutes les autres, quoique leur succession soit souvent illi-

mitée. Nous pouvons ainsi reconnaître que, si deux nombres comprennent une racine, leur substitution devra toujours changer en permanence la variation du signe de l'équation comparée à sa dérivée, quand on passera du plus petit au plus grand. Un ensemble d'appréciations analogues complète ce principe en expliquant la signification du symptôme envers les différents cas qui peuvent s'offrir pour les diverses racines comprises ou non entre les nombres successivement substitués dans toutes les dérivées. Sous cette impulsion, fut instituée la méthode qui, moyennant une précaution destinée à prévenir beaucoup d'essais inutiles, fait toujours discerner combien de racines comprennent deux nombres donnés, d'après des calculs ordinairement praticables.

Modifiée envers les équations d'un degré quelconque, cette institution fit bientôt surgir un amendement spécial, dont la constitution hétérogène indiquait le défaut d'originalité, quoique l'empirisme académique, en exagérant son aptitude, ait vainement tenté de l'opposer à la conception générale. On vit, après une perturbation maintenant oubliée, normalement prévaloir la seule solution qui mette une suffisante harmonie entre le mode de séparation et le mode d'évaluation, toujours guidé par la comparaison de l'équation avec sa dérivée, sous l'inspiration géométrique. Telle est l'indication systématique qui doit ici suffire envers l'ensemble des notions relatives, d'abord à la constitution, puis à la résolution des équations. Il y faut surtout apprécier la réaction logique des doctrines, dont l'efficacité scientifique devient souvent insuffisante, même d'après les meilleurs modes. Fondé sur cette préparation, le calcul des relations peut acquérir la généralité qu'exige sa destination géométrique, et qui constitue la philosophie mathématique, instituée par le principe cartésien.

CHAPITRE CINQUIÈME.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

Conception fondamentale.

Après que le principe cartésien eut institué la géométrie générale, la conception leibnitzienne devint bientôt nécessaire pour la constituer. Pendant le demi-siècle qui sépare les deux plus grandes pensées mathématiques, les géomètres accomplirent, sous l'impulsion de l'une, des travaux graduellement dirigés vers l'avénement de l'autre. Il faut systématiquement apprécier cette préparation spontanée, qui, généralisant l'algèbre en la subordonnant à la géométrie, tendit de plus en plus à réaliser la destination normale du principe cartésien.

Deux préambules, simultanés mais indépendants, s'y trouvèrent spécialement dirigés, l'un vers la géométrie différentielle, l'autre vers la géométrie intégrale. Ils eurent respectivement en vue les deux parties essentielles du domaine géométrique, les propriétés des figures, et la mesure de l'étendue. Graduellement concentrée vers la comparaison fondamentale de toutes les courbes, d'abord à la ligne droite, puis au cercle, la première série de travaux s'efforça d'instituer la théorie générale des tangentes et de fonder l'étude de la courbure. Nous devons surtout rapporter, sous cet aspect, la transition infinité-

simale aux efforts connexes d'un éminent géomètre français pour les problèmes des tangentes et des maxima, dont il sut profondément sentir la liaison logique et scientifique. On voit ensuite ce mouvement atteindre une phase plus élevée et plus décisive dans l'admirable élaboration où le grand géomètre hollandais fonda la théorie de la courbure en la liant au principal avénement de la dynamique.

Une seconde série de travaux tendit, en même temps, d'une manière plus directe et plus sensible, vers l'institution infinitésimale en s'efforçant d'établir la théorie générale des quadratures, à laquelle on sut déja rattacher les autres parties de la mesure de l'étendue. Tous les rapprochements propres à l'ensemble des progrès mathématiques furent admirablement combinés par le géomètre italien qui, faisant directement ressortir l'esprit fondamental de la méthode infinitésimale, dut spontanément préparer l'avénement du calcul correspondant. Il faut surtout attribuer, sous cet aspect, la transition infinitésimale à l'éminent géomètre britannique qui sut spécialement perfectionner la théorie des quadratures autant que cela se pouvait avant la systématisation leibnitzienne.

La fondation de la géométrie générale et la création du calcul transcendant furent respectivement dues aux deux plus grands philosophes modernes. Examiné convenablement, ce phénomène historique n'est aucunement fortuit, parce que de telles constructions ne pouvaient, à travers les spécialités scientifiques, émaner que des penseurs les mieux disposés à sentir les besoins essentiels de l'esprit humain. Il était déjà possible, au début du dix-septième siècle, de reconnaître l'épuisement radical de la synthèse théologique, et la nécessité d'élaborer une philosophie pleinement positive. Bien apprécié, ce besoin devait alors conduire à fonder la géométrie générale, qui, complétée par la mécanique, pourrait provisoirement dominer l'en-

semble du domaine cosmologique, de manière à préparer la systématisation universelle. Nous voyons, un demi-siècle après, la même nécessité philosophique, mieux caractérisée dans le mouvement occidental, pousser au complément leibnitzien de la rénovation cartésienne, afin que l'esprit positif, ayant assez élaboré sa source rationnelle, pût librement poursuivre sa meilleure destination. Une préoccupation croissante des considérations historiques et des applications sociales, systématiquement écartées par le fondateur de la géométrie générale, dut spontanément détourner le créateur du calcul infinitésimal de construire une synthèse alors prématurée. Ses méditations en durent seulememt signaler les conditions essentielles par des essais caractéristiques quoique isolés, surtout envers la subordination continue du subjectif à l'objectif, et même quant à l'incorporation du fétichisme au positivisme, qu'il sut admirablement pressentir.

Ces indications historiques doivent toujours diriger l'appréciation dogmatique de la conception générale qui compléta l'avénement de la philosophie mathématique, en instituant le calcul des relations indirectes, où la géométrie s'unit à la mécanique. Il dut spontanément pousser la logique vers sa double destination normale, préparer la Physique par sa doctrine, et la Morale d'après sa méthode. Telle est pourtant l'insuffisance nécessaire de toute discipline purement partielle que le complément leibnitzien ne put jamais permettre au principe cartésien de régler l'esprit mathématique, dont les principales divagations suivirent les efforts successifs de ses deux législateurs. Après que le calcul transcendant eut assez constitué la géométrie générale et fondé la mécanique rationnelle, l'insubordination algébrique fit de plus en plus dégénérer la science fondamentale en élaborations académiques. Rien ne put discipliner l'esprit de détail, jusqu'à ce que le positivisme eût fait irrévo-

cablement prévaloir l'esprit d'ensemble, en combinant la destination sociale avec la disposition philosophique.

Il faut même rapporter à l'avénement direct de la systématisation universelle la saine appréciation du calcul transcendant, comme celle de la géométrie générale. Méconnues des théoriciens spéciaux, sans excepter les organes de leurs meilleurs progrès, ces institutions philosophiques ne furent convenablement senties, avant le positivisme, que par leurs incomparables fondateurs. Après un siècle entier d'usurpations algébriques académiquement consacrées, l'enseignement mathématique était tellement dégénéré, surtout dans sa partie supérieure, que les conceptions destinées à subordonner l'abstrait au concret tendaient vers une influence totalement inverse.

Rapportées au but philosophique dont leurs fondateurs furent surtout préoccupés, la géométrie générale et l'algèbre infinitésimale ne pouvaient donc développer leur principale efficacité tant que l'évolution préliminaire n'eut pas achevé sa dernière phase. En devenant les bases connexes de la synthèse mathématique, émanée de la religion universelle, ces deux institutions acquièrent, non seulement plus de dignité, mais une consistance auparavant impossible. Nous pouvons surtout apprécier, envers la seconde, combien son vrai caractère était radicalement méconnue, d'après le succès théoriquement obtenu par la réformation due au plus philosophe des grands géomètres. Déjà l'invasion algébrique avait tellement prévalu qu'il voulut dogmatiquement reconstruire pour un but purement abstrait, une doctrine historiquement caractérisée par la subordination continue des conceptions abstraites aux destinations concrètes. Un renversement direct de l'institution fondamentale parut, au plus éminent des penseurs spéciaux, le seul moyen de la garantir des objections qui n'étaient réellement dues qu'à l'altéra-

tion croissante de l'esprit mathématique, même chez ses meilleurs organes.

Bien appréciée, la méthode infinitésimale, source nécessaire et destination normale du calcul des relations indirectes, fut spontanément inspirée, dans l'antiquité, par la théorie corpusculaire, qui la précéda de deux siècles. Elle doit donc être historiquement rattachée à la réaction philosophique de la Physique sur la Logique, la réduction aux éléments devenant plus tôt nécessaire envers un domaine plus complexe. A son tour, la Physique avait réellement tiré de la Morale la théorie corpusculaire, naturellement résultée de la décomposition des peuples en familles, première source de toute liaison d'un ensemble à ses parties. Telle est la filiation normale qui rattache la méthode infinitésimale aux conceptions les plus élevées et les plus unanimes, de manière à faire directement sentir combien l'enseigement encyclopédique peut aisément en vulgariser l'appréciation et même l'usage. On doit, réciproquement, présumer ainsi que son perfectionnement par l'institution leibnitzienne comporte, en Physique, et jusqu'en Morale, un progrès philosophiquement analogue, dont la formule devait d'abord surgir dans le plus simple domaine.

Étudiée systématiquement, la méthode infinitésimale peut partout subordonner le cas le plus complexe au moins complexe. Convenablement appliquée, elle doit, comme en géométrie, faire généralement subir à l'état rudimentaire des modifications qui, sans être jamais arbitraires, deviendraient toujours vicieuses envers la considération directe de l'ensemble. On n'aurait aucunement facilité la formation des lois générales en y substituant les parties aux touts, si les unes devaient entièrement s'élaborer à la manière des autres. La rationalité des simplifications propres à l'état rudimentaire résulte de ce qu'on y peut et doit négliger l'influence mutuelle des divers éléments,

qui devient, au contraire, prépondérante quand on apprécie l'ensemble. Étendue de la Morale à la Physique, où la Logique la puisa, cette méthode constitue le plus puissant des moyens généraux spontanément institués par l'esprit humain pour faciliter ses méditations théoriques.

Rationnellement développée envers le plus simple domaine, elle y prend des formes précises qui seraient ailleurs impossibles, et dont la considération trop exclusive fit longtemps méconnaître sa source nécessaire. On doit toujours regarder la méthode infinitésimale comme ayant naturellement commencé dans l'ordre humain, d'après la disposition universelle à substituer les familles aux sociétés pour l'appréciation abstraite de l'existence collective. Bien jugée, cette substitution est philosophiquement équivalente à celle des molécules aux masses en Physique, ou des éléments aux touts en Logique. Elle devient partout indispensable à l'essor abstrait, qui ne saurait directement saisir les lois qu'envers les cas les plus simples, auxquels on peut ainsi ramener les plus composés. Sous cet aspect, la principale difficulté de la vraie philosophie consiste à passer de l'abstrait au concret, en remontant des familles aux peuples, des molécules aux masses, et des éléments aux touts, la considération de l'ensemble étant seule réelle partout, sans être directement accessible nulle part.

Nous étions, avant le positivisme, tellement éloignés du point de vue synthétique, d'après les habitudes propres à la transition occidentale, que nous avions systématiquement interverti les notions fondamentales spontanément émanées du fétichisme et consacrées par la théocratie. On avait graduellement laissé tant prévaloir l'analyse que les abstractions se trouvaient finalement érigées en réalités et réciproquement, au point que la conception du Grand-Être fut d'abord taxée d'entité. Voilà comment la principale tâche du positivisme consiste à combiner

les inspirations synthétiques primitivement dues à la raison concrète avec les notions analytiques définitivement obtenues par la raison abstraite. Il faut partout systématiser la substitution spontanée des éléments aux touts afin de réduire l'établissement des lois générales à la considération de l'état rudimentaire, seul directement accessible. Toutefois, on ne doit jamais oublier que cet état purement fictif, où les principales influences sont nécessairement écartées, ne saurait aucunement remplacer la réalité, dont il peut seulement faciliter l'appréciation. A mesure que les phénomènes se compliquent, le passage des conceptions différentielles aux conceptions intégrales devient de plus en plus difficile, au point de ne comporter des solutions précises qu'envers le plus simple domaine. Si l'on peut rarement intégrer en Logique, le passage des molécules aux masses est plus imparfait en Physique, et la transition des familles aux peuples moins satisfaisante en Morale, quoique, même dans ce dernier cas, l'état rudimentaire soit la base nécessaire des spéculations générales.

A ce point de vue, la difficulté d'instituer les théories réelles devient systématiquement appréciable, d'après le conflit qu'il y faut toujours surmonter. Car elles doivent partout concilier la simplicité propre au cas abstrait avec la vérité qui n'appartient qu'au cas concret, en ne concevant jamais la différentiation que comme le fondement nécessaire de l'intégration, seul objet final de la spéculation positive. Telle est la réaction philosophique que l'institution leibnitzienne procure au principe cartésien, en faisant mieux juger l'ensemble du régime intellectuel d'après son assimilation normale à la constitution essentielle de la géométrie générale. Il suffit ici d'indiquer ce rapprochement, dont le développement et l'application doivent naturellement appartenir à la science finale, directemeut constituée dans le volume suivant. Fondé sur cette connexité, le tome actuel doit,

réciproquement, éclaircir et rectifier la Logique d'après la Physique et la Morale, afin que la synthèse subjective surmonte les vices résultés d'une longue prépondérance de l'analyse objective.

Rétrograde autant qu'anarchique pendant la première moitié du siècle exceptionnel, le mouvement mathématique avait radicalement méconnu la régénération cartésienne et réduit l'institution leibnitzienne à fournir de nouveaux aliments aux exercices algébriques. Il fallut que l'impulsion sociale développât la présidence théorique du point de vue humain pour réaliser la subordination de l'abstrait au concret, vainement instituée par les deux législateurs de la sience fondamentale. A l'avénement du positivisme, l'esprit mathématique se trouvait tellement dégénéré que les moyens avaient essentiellement absorbé le but. Nous voyons alors l'abstraction prévaloir au point de dissimuler l'origine et la destination concrètes du calcul des relations indirectes. Toutes ces déviations ne pouvaient être convenablement surmontées qu'en subordonnant l'esprit de détail au génie d'ensemble sous l'impulsion religieuse normalement liée au but social.

D'après ces indications, on peut également apprécier la supériorité théorique des vrais philosophes sur les purs savants, même les plus éminents, et l'insuffisance de la philosophie séparée de la religion. On voit les fondations connexes de la géométrie générale et du calcul infinitésimal rester essentiellement incapables de discipliner l'esprit mathématique jusqu'à ce que la réorganisation universelle les ait directement appliquées à leur principale destination. Même, avant que la religion positive eût ainsi ranimé l'influence philosophique, l'empirisme scientifique avait tellement altéré les notions fondamentales que la conception leibnitzienne était ordinairement jugée irrationnelle. Elle ne figurait, dans l'enseignement dogmatique,

que comme moyen d'abréviation pour l'application des conceptions, indirectes ou restreintes qu'on y voulut finalement substituer, en invoquant une rationalité mal jugée. Sous cet aspect, l'altération croissante de l'esprit mathématique devient spécialement irrécusable en comparant les habitudes propres aux géomètres du dix-septième siècle à celles qui prévalurent au dix-huitième, et surtout au dix-neuvième.

Convenablement rapprochée des études supérieures, l'institution leibnitzienne doit directement reprendre l'ascendant qui ne lui fut temporairement ravi que d'après les inspirations émanées du domaine inférieur, quand l'abstrait s'insurgea contre le concret. Les difficultés suscitées au principe infinitésimal n'ont jamais eu d'efficacité que par suite de son isolement philosophique, qui rendait son appréciation inductive essentiellement inaccessible aux purs géomètres, sans excepter les plus éminents, faute d'un point de vue normal. Avant que la méthode infinitésimale fût distinctement appliquée par la science grecque, elle avait implicitement surgi, comme la théorie corpusculaire dans les méditations théocratiques, qui manifestèrent son efficacité mathématique en mesurant l'aire du cercle. Voilà comment on peut le mieux sentir l'irrationnalité de toute conception qui suppose une origine abstraite au calcul transcendant, destiné surtout à compléter une méthode antérieure à la naissance de l'algèbre, et même à la théorie des proportions. Étudié philosophiquement, le principe leibnitzien ne peut consister qu'à formuler envers la Logique, la loi générale des réductions propres à la substitution des éléments aux touts dans la Physique et la Morale.

On ne saurait découvrir une telle loi que d'après les inductions systématiquement résultées de ses applications spontanées aux cas assez simples pour en permettre la vérification spéciale. Une déduction transcendante, où le domaine supérieur réagit

sur l'inférieur, dut d'abord fournir à la Logique la méthode infinitésimale, après avoir doté la Physique de la théorie corpusculaire, quand la Morale eut assez subordonné l'état social à l'existence domestique. Rationnellement considérée, l'introduction des éléments ne pouvait faciliter l'étude des touts, que si les grandeurs auxiliaires subissaient des modifications interdites envers les objets principaux. Dans leur état direct, les molécules géométriques sont essentiellement semblables aux figures correspondantes, et leur petitesse susciterait plutôt des embarras que des simplifications, sans la disposition spontanée à l'utiliser pour instituer des métamorphoses ailleurs impossibles. Il faut donc attribuer tous les succès de la méthode infinitésimale à la faculté qu'elle procure de remplacer, sous les conditions convenables, les éléments naturels par des éléments artificiels, dont les relations soient plus simples, plus générales, et mieux saisissables.

Mais, ces relations étant toujours indirectes, leur emploi devait finalement susciter un calcul propre à diriger l'élimination des grandeurs auxiliaires, qui ne pouvaient spontanément disparaître que dans les occasions les plus favorables, et d'après des artifices spéciaux. Une appréciation pleinement philosophique de la géométrie ancienne y représente la méthode infinitésimale comme n'ayant jamais été séparée de quelques transformations abstraites, qui fournirent à l'algèbre transcendante un préambule équivalent à la théorie des proportions pour l'algèbre préliminaire. L'analogie des deux cas s'étend même aux procédés logiques, puisque les éléments étaient surtout éliminés à l'aide des proportions qu'ils comportaient, comme on peut spécialement le reconnaître envers la quadrature de la sphère. Toutefois, une telle appréciation ne saurait davantage altérer l'originalité de l'institution leibnitzienne que la préexistence des équations des lignes ne peut rationnellement déprécier la fonda-

tion cartésienne. Il faut, dans les deux cas, reconnaître que la principale difficulté consistait à systématiser des dispositions auparavant spontanées, en substituant la généralité subjective aux spécialités objectives.

Bien appréciée, l'institution leibnitzienne résulte d'une induction philosophique, où, d'après l'ensemble des applications, anciennes et modernes, de la méthode infinitésimale, on saisit la loi fondamentale des simplifications qui la caractérisent. Il importe, afin de mieux comprendre cette marche, de la comparer à celle qui fit découvrir l'interprétation concrète du contraste abstrait entre les signes additif et soustractif. Nous voyons, dans ces deux types de la vraie rationalité, le fondateur de la géométrie générale et le créateur du calcul transcendant fournir d'incorporables exemples de la combinaison, propre à la puissance philosophique, entre le génie inductif et la force déductive. Après que la spécialité dispersive, développée sous le régime académique, eût radicalement dégradé l'esprit scientifique, et surtout mathématique, on voulut entièrement interdire à la Logique l'emploi de l'induction, resté familier aux géomètres du dix-septième siècle. Rien ne peut mieux confirmer la nécessité philosophique de la méthode inductive dans la science fondamentale que l'inanité des efforts souvent tentés, même par d'éminents théoriciens, pour rendre déductive la loi cartésienne du signe concret. Ils n'ont finalement abouti qu'à susciter, sous ce rapport, une confusion quelquefois poussée jusqu'à méconnaître le véritable esprit de ce théorème, au point d'en faire de fausses applications. On ne saurait donc s'étonner que, pour une appréciation plus vaste et plus difficile, également relative à la subordination de l'abstrait au concret, la nature, essentiellement inductive, du principe leibnitzien ait été radicalement méconnue, même par les plus grands géomètres.

Isolant l'intelligence du sentiment, et souvent de l'activité,

l'essor théorique fut surtout indiscipliné, depuis la fin du moyen âge, dans le plus simple domaine, dont l'indépendance augmentait l'isolement, sans diminuer sa tendance à l'usurpation de la présidence encyclopédique. Mais la même disposition, naturellement étendue à l'intérieur du système mathématique, y fit graduellement prévaloir l'abstrait sur le concret, malgré la législation émanée des deux philosophes qui coordonnèrent la science fondamentale. Ils furent de plus en plus méconnus par les géomètres qui développèrent l'efficacité spéciale de leurs conceptions générales, sans la faire jamais remonter jusqu'à sa source nécessaire. Toutefois, l'institution leibnitzienne fut davantage altérée que le principe cartésien, vu l'extension de l'empirisme dispersif pendant le demi-siècle qui les sépare. Établie avant que le régime académique eût prévalu, la géométrie générale se trouva méconnue sans être dénaturée, tandis que le calcul infinitésimal subit de graves atteintes, au nom d'une vaine réformation.

Nous devons surtout caractériser ces altérations par la tendance à faire finalement dominer l'abstraction dans une doctrine dont la source est aussi concrète que sa destination. On peut aisément reconnaître que cette disposition devient directement contraire au véritable esprit du calcul des relations indirectes en la jugeant incompatible avec la continuité qu'il exige pour la différentiation et l'intégration. Une telle qualité ne saurait, en algèbre, provenir de l'arithmétique, puisque les nombres sont naturellement discontinus, et ne peuvent cesser de l'être sans des artifices pénibles, restés toujours insuffisants. Elle n'y peut donc émaner que de la géométrie, principale source, historique et dogmatique, du calcul des relations, d'abord directes, puis indirectes. Regardée comme indépendante de ses deux souches abstraite et concrète, l'algèbre ne comporterait aucune consistance, faute de pouvoir spontanément four-

nir une base distincte à ses conceptions quelconques, quoiqu'elle prétende ainsi dominer l'arithmétique et la géométrie.

Établie isolément, l'institution leibnitzienne devint bientôt incapable de surmonter les tendances des géomètres qui méconnurent et dénaturèrent son caractère inductif, au nom d'une rationalité mal appréciée. Convenablement liée, d'abord à la théorie corpusculaire, puis à la réduction domestique des conceptions sociales, elle prend sa place normale parmi les moyens généraux de la spéculation humaine, et ne peut plus comporter qu'un jugement philosophique, où la science est nécessairement incompétente. Rattachée à la religion positive, elle domine les spécialités qui prétendaient la réformer sans pouvoir la comprendre, et son immortel fondateur devient l'un des principaux pères de l'église universelle. On voit alors l'induction philosophique obtenir, en Logique, une dignité comparable à celle qui ne lui fut jamais contestée en Morale, ni même en Physique Une irrévocable réprobation, systématiquement émanée de la synthèse subjective, écarte, comme autant irrationnelle qu'oiseuse, toute tentative de démonstration déductive envers la loi fondamentale du calcul des relations indirectes.

Directement considéré, le principe leibnitzien consiste dans la faculté de substituer l'une à l'autre deux variables dont la différence est infiniment petite par rapport à chacune d'elles. Une appréciation systématique de l'ensemble des applications spontanées de la méthode infinitésimale conduisit le créateur du calcul transcendant à reconnaître que cette loi, convenablement appliquée, devait toujours permettre d'éliminer les éléments auxiliaires. Pour la compléter il faut rationnellement instituer la coordination générale des infiniment petits, d'après les deux modes, abstrait et concret, qui lui sont naturellement propres. La substitution infinitésimale n'est jamais efficace qu'entre deux infiniment petits du même ordre, et ne compor-

terait même aucun sens envers des grandeurs finies, qui seraient toujours jugées égales si leur différence était reconnue infiniment petite. Or l'échelle infinitésimale peut être formée, soit géométriquement par des différentiations consécutives, soit algébriquement d'après les puissances successives d'un même élément.

Une considération générale, à la fois abstraite et concrète, fait immédiatement sentir l'équivalence de ces deux modes, d'après l'homogénéité différentielle des équations indirectes, qui ne sauraient jamais subsister qu'entre des infiniment petits du même ordre. Nous pouvons spécialement confirmer cette appréciation en différentiant la relation des deux infiniment petits dont le rapport est une quantité finie. Il devient alors évident que la différentielle seconde, comparée à la seconde puissance de la différentielle première, forme un rapport nécessairement fini ; ce qui suffit pour leur assigner le même rang dans l'échelle infinitésimale. On doit néanmoins regarder la différentiation successive comme ayant une source essentiellement concrète, qui la fait immédiatement surgir des plus simples spéculations de géométrie transcendante, même envers la quadrature des courbes planes. Nous sommes rarement conduits à redoubler les différentiations par des motifs purement algébriques, une telle transformation devant ordinairement détourner l'élaboration abstraite de sa destination normale : en sorte que l'échelle infinitésimale reste algébriquement bornée aux puissances.

Appréciée dans son ensemble, la conception leibnitzienne fournit le complément général sans lequel le principe cartésien ne pouvait assez instituer la géométrie subjective, même envers les recherches préparatoires, et surtout quant aux questions finales. C'est seulement ainsi que la subjectivité devait irrévocablement surmonter l'objectivité, primitivement inhérente à la science de l'étendue. Il résulte du chapitre précédent que la

géométrie cartésienne, quoique essentiellement subjective, peut accessoirement devenir objective, en restant toujours générale. Dans la géométrie leibnitzienne, le caractère subjectif est directement prépondérant, et ne saurait jamais cesser que quand l'intégration se trouve accomplie. Étendue à l'institution des familles de surfaces, elle s'y borne à perfectionner, d'après ses ressources subjectives, des vues générales dont l'origine est nécessairement objective.

La supériorité philosophique des équations indirectes sur les équations directes ne consiste pas seulement en ce qu'elles sont naturellement plus simples, en rendant rectilignes des éléments immédiatement curvilignes. On les voit aussi douées d'une plus grande généralité, puisque la même relation s'y trouve nécessairement commune à tous les cas objectifs d'une même théorie subjective. Ne considérant les courbes ou surfaces que dans leurs éléments, auxquels nous supposons toujours une forme rectiligne ou plane, nous ne pouvons jamais obtenir des équations vraiment spéciales que quand l'élimination des différentielles est entièrement accomplie. Chaque aspect géométrique se trouve ainsi formulé d'après une relation caractéristique, où la subjectivité concourt avec la généralité pour instituer la philosophie mathématique. Historiquement considérée, l'identification logique des divers cas scientifiques de la mesure de l'étendue précéda la conception leibnitzienne, et même, à quelques égards, le principe cartésien. Appréciée dogmatiquement, elle doit pourtant être toujours rapportée à l'esprit fondamental de ces deux institutions connexes, spontanément pressenti des meilleurs penseurs avant de devenir systématiquement formulable pour le public théorique. Mais les rapprochements primitifs étaient pénibles, rares, et restreints, tandis que les comparaisons définitives sont aussi vastes et fécondes que faciles, d'après le pouvoir d'assimilation propre aux équations différentielles.

Il faut ainsi reconnaître que les relations indirectes ne sont pas seulement aptes à préparer, suivant leur destination initiale, la formation des relations directes. Depuis que leur usage est devenu familier, elles peuvent être immédiatement utilisées pour condenser les pensées géométriques, suivant l'admirable type résulté de l'incomparable programme où le créateur du calcul transcendant en proclama l'esprit fondamental. On peut surtout apprécier cette aptitude dans l'application normale de l'institution leibnitzienne à la géométrie objective, d'après les notions précédemment établies sur la classification des surfaces. Les équations collectives qui, sous forme finie, doivent nécessairement contenir une formation arbitraire en deviennent pleinement indépendantes par la différentiation, de manière à faciliter les déductions, et même les inductions. Alors, quoique indirectes, les relations abstraites peuvent toujours recevoir une interprétation concrète, quand on s'est rendu familière la signification géométrique des rapports différentiels.

Tels sont les principaux attributs de la constitution, essentiellement subjective, que la conception leibnitzienne procure à la géométrie générale sous l'influence cartésienne, qui serait toujours restée insuffisante sans ce complément. Il faut maintenant apprécier la réaction philosophique du calcul infinitésimal sur le régime intellectuel, où le plus puissant des procédés logiques acquiert une précision que le plus simple des domaines encyclopédiques pouvait seul réaliser. Si l'on compare, dans leur ensemble, les deux parties essentielles de l'algèbre transcendante, on reconnaît que le contraste de la différentiation à l'intégration est logiquement compris dans la distinction entre l'analyse et la synthèse. Sous cet aspect, on peut mieux caractériser l'irrationalité des dénominations que le positivisme a finalement rectifiées, et dont le crédit n'était dû qu'à l'insurrection des géomètres contre les deux philosophes qui voulurent isolé-

ment coordonner la science fondamentale. Une saine appréciation fait ainsi reconnaître que le caractère de l'algèbre, loin d'être purement analytique, est principalement synthétique, puisque, de l'aveu même des empiriques, le calcul des relations indirectes doit surtout consister dans l'intégration.

Étudiée philosophiquement, la principale construction propre au domaine mathématique confirme l'insuffisance logique de la première phase encyclopédique, où la méthode transcendante n'acquiert qu'une perfection apparente, en opposant la précision à la consistance. La substitution des éléments aux touts n'y rend les relations plus générales et plus simples que quand elles demeurent indirectes ; l'élimination des différentielles fait aussitôt cesser ce double attribut, en sorte que l'accomplissement du calcul dissipe son privilège logique. Il faut attribuer cette anomalie, non à l'impuissance des deux législateurs de la géométrie subjective, mais à la nature de la science qu'ils voulurent constituer, et dont ils s'éloignèrent après avoir posé ses deux fondements philosophiques. Rapportée au domaine qui fournit à la fois sa source normale et sa principale destination, la logique transcendante, toujours basée sur les relations indirectes où les parties conduisent aux touts, voit finalement cesser une incompatibilité seulement due à l'insuffisance de son premier champ. Elle combine, en Morale, la précision avec la consistance et la clarté, suivant le mode et le degré propres au domaine le plus complexe et le plus réel, également apte à développer la méthode et perfectionner la doctrine.

Fondée sur la destination sociale de la religion universelle, la synthèse subjective doit irrévocablement incorporer à l'état normal de la raison humaine toutes les institutions théoriques qui surgirent pendant l'évolution préliminaire. On ne peut bien remplir cette condition qu'en développant entre les morts une discipline conforme à celle qu'on veut appliquer aux vivants.

Nous ne saurions dignement subordonner l'analyse à la synthèse sans faire convenablement respecter, dans le passé, la supériorité normale des philosophes sur les savants, souvent méconnue pendant l'anarchie moderne. D'abord base spontanée de la philosophie, la science, surtout mathématique, finit par en devenir le but, quand l'évolution théorique fut assez avancée pour susciter, au sein des études analytiques, des institutions directement synthétiques. Si les deux principaux philosophes modernes furent aussi des géomètres du premier ordre, cette coïncidence, nullement fortuite, annonça le prochain avénement d'une philosophie qui, surgie de la science, et reconstruisant la religion, ferait partout prévaloir l'esprit d'ensemble.

Étendue au plein essor de l'anarchie analytique, la discipline rétrospective, que le positivisme peut seul organiser, doit surtout placer au-dessus des atteintes scientifiques les institutions philosophiques normalement destinées à régénérer l'esprit mathématique. Tous les progrès de la science fondamentale pendant la dernière phase de la révolution occidentale furent involontairement dirigés par le principe cartésien et la conception leibnitzienne qui le complète et le condense. Agrégés à l'enseignement encyclopédique, ces résultats n'y peuvent dignement figurer qu'en s'y trouvant toujours subordonnés à leur source normale, méconnue dans l'élaboration académique. Telle est la rectification qu'il faut ici spécifier pour consolider et développer le juste ascendant de la conception infinitésimale sur les autres modes successivement destinés à constituer le calcul des relations indirectes. Sans méconnaître les qualités secondaires de la rivalité britannique et de la réforme italienne, il importe de faire directement ressortir la supériorité radicale de la création germanique qui compléta la constitution française de la philosophie mathématique.

Convenablement appréciée, la méthode propre au fondateur

de la mécanique céleste comporte deux modes mal distingués qu'il faut séparément juger. Une vicieuse préférence fut accordée au premier, quand l'empirisme académique s'efforça d'appliquer la pensée du géomètre britannique à la prétendue rectification de l'institution due au philosophe germanique. Rapportant l'accroissement de la variable dépendante à celui de la variable indépendante, cette manière de concevoir l'algèbre transcendante introduit, comme auxiliaire, la limite vers laquelle tend ce rapport à mesure que ses termes diminuent indéfiniment. Voilà comment on a remplacé les éléments infinitésimaux immédiatement propres à l'institution philosophique du calcul des relations indirectes. Alors les simplifications sur lesquelles repose l'efficacité d'un tel artifice consistent à substituer, envers ces limites, aux accroissements qu'elles concernent naturellement, ceux qui tendent à leur devenir égaux à mesure que tous diminuent.

On croirait que cette forme, pénible, étroite, et détournée, fut seulement imaginée pour éluder les objections suscitées à la conception infinitésimale, si l'originalité du géomètre britannique n'était pas à l'abri des soupçons qu'il laissa déloyalement circuler contre le philosophe germanique, malgré le noble appel de celui-ci. Bien apprécié, ce mode est trop peu conforme à la méthode géométrique dont le calcul des relations indirectes, de quelque manière qu'il soit institué, doit uniquement fournir le complément algébrique, en régularisant l'élimination des auxiliaires. Les défauts de cette conception doivent être surtout imputés à l'insuffisance philosophique de son auteur, outre son aveugle soumission aux formalités classiques. Il subit, à son insu, l'ascendant du principe cartésien, à travers son meilleur promoteur britannique ; tandis que le penseur germanique sut directement instituer le calcul transcendant comme le complément nécessaire de la géométrie générale. Quant au second

mode propre à la conception newtonienne, il diffère du premier par un caractère plus concret, qui le rend mieux conforme à leur commune destination. Un heureux recours aux images mécaniques y fait envisager les fluxions comme les vitesses respectives du point dont le mouvement engendre les fluentes. Examinés comparativement, ces deux modes sont abstraitement équivalents, d'après la mesure générale de chaque vitesse, par le rapport entre l'accroissement élémentaire de la variable dépendante et celui du temps, proportionnel à celui de la variable indépendante.

Nous devons finalement rattacher la conception newtonienne au mode d'où dérivent les dénominations et les notations qui lui sont propres. Une insuffisante spontanéité priva la méthode des limites du privilége caractéristique de fournir les noms et les signes qu'exige le calcul des relations indirectes. Examiné dans son meilleur type, ce privilége suffirait pour confirmer spécialement la supériorité générale de l'institution leibnitzienne sur toutes les autres conceptions successivement proposées envers l'algèbre transcendante. Voilà comment l'empirisme académique se trouve conduit à tenter de constituer le calcul des relations indirectes en appliquant les notations infinitésimales à la méthode des limites. On vit cet irrationnel accouplement, spécialement jugé dans mon ouvrage fondamental, officiellement prévaloir, pendant un siècle, pour l'enseignement occidental, surtout chez le peuple central.

D'après sa nature trop compliquée et trop détournée, la conception newtonienne ne comporte point, sous la forme des limites, de notations et dénominations qui lui soient propres. A l'obligation de ne considérer les accroissements que dans leurs rapports mutuels, elle joint celle de n'envisager chaque fraction que quant à sa dernière valeur. Telle est la triple indication que devrait remplir la notation correspondante, dès lors inca-

pable d'efficacité logique, en vertu d'une complication inévitable, quelque condensés que fussent les signes des trois notions sucessivement propres aux quantités auxiliaires. Éludée irrationellement par l'abus des notations infinitésimales, l'imperfection inhérente à la méthode des limites ne semble ainsi disparaître qne d'après une inconséquence habituelle. Remplaçant la limite du rapport des accroissements par le rapport des différentielles, on s'accoutume à séparer les deux termes de la fraction auxiliaire, contre l'esprit de la conception newtonienne, à laquelle on veut frauduleusemet procurer les qualités leibnitziennes.

Sous les formes propres à la méthode des fluxions, l'institution britannique se rapprocha, par la pensée et le langage, de la création germanique, autant que le comportait l'inégalité philosophique de leurs auteurs. On vérifie et mesure la supériorité de ce mode sur celui des limites en le voyant apte à fournir des noms et des signes qui suffirent, pendant un siècle, aux géomètres qu'une vaine nationalité détourna de la préférence occidentalement accordée à la constitution infinitésimale. Un tardif ralliement aux usages universels a spontanément annoncé, dans l'école exceptionnelle, l'ascendant normal de la conception leibnitzienne pour la régénération systématique des études mathématiques Cette confirmation décisive du jugement occidental serait pourtant restée insuffisante si la discipline positiviste n'avait irrévocablement dissous la vaine transaction ci-dessus appréciée. Il eût été possible à l'empirisme académique de perpétuer indéfiniment une confusion devenue classique, sans la réorganisation universelle qui subordonna la science à la philosophie, au nom de la religion.

Généralement sentie, quoique mal jugée, cette inconséquence prépara le seul mode homogène et rationnel que comportât l'insurrection des géomètres contre l'institution philosophique

du calcul des relations indirectes. Examinée systématiquement, la méthode des dérivées montre que, si son auteur fut le plus philosophes des grands géomètres, son aptitude synthétique resta trop inférieure à son génie analytique. Nous pouvons mieux apprécier la dégradation académique de l'esprit scientifique en la voyant ainsi s'étendre au plus éminent des penseurs spéciaux. Une insuffisante vocation philosophique le poussa contre l'institution infinitésimale quand il crut opportune la réorganisation générale des doctrines mathématiques, dont il avait dignement senti l'épuisement radical. Son insurrection fut directe, ouverte, et complète : on peut même la taxer de violente, d'après la qualification, moins irrévérente qu'injuste, qui caractérise son jugement de la conception leibnitzienne.

Étudiée concrètement, la méthode des dérivées est inférieure, non-seulement à celle des infiniments petits, mais à celle des limites ou fluxions, parce qu'elle ne peut aucunement expliquer l'efficacité générale des grandeurs auxiliaires. Leur office n'y saurait être spécialement motivé que d'une manière indirecte et pénible, même envers les cas déjà traités suivant les deux autres voies. Élaborée par son fondateur, cette méthode ne semble avoir fourni de nouvelles acquisitions géométriques que parce qu'on attribue à l'instrument logique une puissance uniquement due à l'éminent penseur qui l'appliqua. Voilà comment surgit l'admirable théorie des contacts, envers laquelle l'emploi des dérivées a seulement produit une stimulation qui serait demeurée stérile chez un autre partisan de la même réformation. Elle est tellement indépendante de cette méthode que la conception infinitésimale doit normalement prévaloir envers une doctrine qui s'en serait mieux et plus tôt déduite, si la pensée leibnitzienne eût été directement tournée de ce côté.

Nous ne pouvons finalement reconnaître qu'une supériorité purement abstraite dans la prétendue reconstruction du calcul

des relations indirectes par la méthode des dérivées. On y trouve une définition nette, simple, et directe, conduisant à d'excellentes notations, pour les grandeurs auxiliaires, surtout envers le cas fondamental d'une seule variable indépendante. Mais ces qualités sont purement abstraites, et ne doivent, par conséquent, figurer qu'accessoirement dans le jugement philosophique d'une conception dont la destination principale est nécessairement concrète. Elle manifeste combien, en s'insurgeant contre les philosophes qui coordonnèrent la Logique, les meilleurs géomètres avaient spontanément perdu le sentiment général de la constitution mathématique. Nous voyons cette altération directement marquée dans la vicieuse appréciation historique à laquelle le réformateur italien soumit l'institution germanique et française.

Il suffit de rapprocher la méthode infinitésimale de la théorie corpusculaire pour sentir l'injustice et l'irrationalité de la qualification par laquelle il osa flétrir la conception leibnitzienne. Mieux attentif à la comparaison générale des principes théoriques, il aurait senti la connexité de ces deux-là, leur nature également artificielle, et leur office pareillement légitime. Il eût ainsi reconnu que les molécules qu'il admettait ne sont pas plus réelles, ni moins subjectives, que les différentielles qu'il rejetait après leur avoir dû tous ses succès scientifiques. Toujours l'existence des molécules restera nécessairement inaccessible aux vérifications objectives, puisque, si les atomes pouvaient jamais être vus, même au microscope, ils auraient aussitot perdu l'indivisibilité qui les caractérise. A leur tour, les familles qui suscitèrent les corpuscules, comme ceux-ci les différentielles, se trouveraient rationnellement frappées de la réprobation appliquée aux éléments mathématiques. Rien n'étant partout réel que l'ensemble, la conception des familles serait réputée aussi *fausse* que celle des infiniments petits, si

les penseurs communistes pouvaient jamais avoir l'audace systématique du réformateur mathématique. Elle est autant artificielle et subjective que ses deux rejetons théoriques, dont la destination et la légitimité ne sont pas moins motivées, aux yeux de quiconque sait convenablement apprécier les fondements philosophiques des institutions scientifiques.

Tels sont les deux jugements secondaires qui devaient ici compléter la principale appréciation de la conception fondamentale du calcul des relations indirectes. On y peut voir la meilleure épreuve de l'aptitude nécessaire du positivisme à discipliner l'esprit scientifique, même chez les géomètres dont l'éminent génie semblait toujours soustrait aux arrêts philosophiques. Toute l'efficacité d'un tel régime est due à la plénitude de la synthèse subjective, qui manquait aux deux législateurs de la Logique, où leur empire prématuré produisit une longue et profonde insurrection, que la religion universelle pouvait seule surmonter. Avant que j'eusse convenablement rempli cette condition, je fus moi-même dominé par la science, sans pouvoir la juger ni la rectifier, ma soumission initiale constituant la préparation nécessaire de mon ascendant final. Le contraste du présent volume avec le tome premier de mon ouvrage fondamental reproduit l'expérience résultée de l'évolution collective, où la synthèse, impuissante contre l'analyse tant qu'elle resta partielle, prévalut quand elle devint complète.

Un tel ascendant fait irrévocablement surgir la philosophie mathématique, en terminant le conflit qui, depuis un siècle, paraissait insurmontable entre la théorie et la pratique du calcul transcendant. Toutes les applications étaient dirigées par la conception infinitésimale, tandis que l'enseignement la proclamait irrationnelle, et se subordonnait aux deux régimes accessoires. Examiné chez son meilleur type, ce conflit se manifeste dans la contradiction qui poussa le fondateur de la méthode des déri-

vées à maintenir l'institution leibnitzienne pour sa coordination algébrique de la mécanique rationnelle. Regardée par moi-même comme insurmontable, cette discordance ne me parut d'abord pouvoir cesser que si jamais il surgissait une conception capable de remplacer les trois modes rivaux, en s'affranchissant de leurs défauts et réunissant leurs qualités. On voit comment cette utopie, où l'harmonie mathématique se trouvait rejetée dans un avenir vague et douteux, a finalement suscité la solution normale, quand le positivisme, devenu religieux, a pleinement surmonté l'insurrection de la science contre la philosophie.

Sous ce régime, l'éducation encyclopédique aura bientôt effacé toutes les traces des conflits antérieurs, en représentant l'institution générale du calcul des relations indirectes comme uniquement due au principe leibnitzien. Après avoir sommairement signalé les obstacles que lui suscitèrent les prétentions rivales ou réformatrices, il faut lui subordonner les seuls résultats réels qu'elles doivent normalement laisser. La concurrence britannique représente le coefficient différentiel comme la limite du rapport entre les accroissements simultannés des deux variables; et la réformation italienne le rattache au premier terme de l'accroissement de l'une d'après l'autre. Vue sous ces aspects secondaires, la conception principale peut quelquefois devenir mieux applicable que d'après sa forme primitive, quoique celle-ci doive habituellement prévaloir. Examinée abstraitement, la géométrie transcendante est surtout assistée par la considération des dérivées, qui rend plus nette et plus directe la signification algébrique du rapport différentiel, ainsi pourvu de sa meilleure notation.

Historiquement comparés, les deux éléments nécessaires du calcul infinitésimal ont toujours coexisté, même pendant leur préparation isolée, et surtout dans leur avénement connexe. On doit cependant les séparer pour l'étude dogmatique de la

géométrie transcendante, d'abord différentielle, puis intégrale, en subordonnant l'abstrait au concret. Si l'on examine cette division, qui semble purement artificielle, on la reconnaît profondément naturelle, d'après sa correspondance spontanée avec la distinction normale entre les théories préparatoires et les questions finales. Toutes les spéculations essentielles sur les propriétés des figures sont seulement subordonnées au calcul différentiel, sans aucun besoin du calcul intégral, sauf envers quelques notions purement complémentaires. Il faut toujours intégrer pour résoudre les problèmes directement relatifs à la mesure de l'étendue, où la différentiation ne peut spécialement fournir qu'une préparation, qui devient quelquefois superflue. La subordination de l'abstrait au concret est tellement propre à l'institution philosophique du calcul des relations indirectes que le dualisme algébrique s'y trouve spontanément conforme au dualisme géométrique. Étendue au delà de la division principale, la correspondance devient trop confuse pour diriger l'exposition dogmatique, quoique pouvant toujours laisser des traces historiques.

On doit algébriquement distinguer, en géométrie transcendante, trois classes de questions suivant que la solution exige seulement le calcul différentiel, ou le calcul intégral, ou leur concours successif. Regardées comme exceptionnelles, les deux premières classes devront toujours contraster avec la troisième, qui semble seule conforme au type normal, Dans la coordination purement géométrique, la division devient seulement binaire, entre les études préparatoires, entièrement différentielles, et les recherches finales, nécessairement intégrales. Rapportée à ce classement, la seconde des trois catégories algébriques paraît d'abord susceptible de lier les deux parties générales de la géométrie transcendante. Examinée convenablement, elle perd cette apparence, et se trouve géométriquement rangée

dans le domaine intégral, dont le contraste avec le domaine différentiel doit toujous prévaloir sur sa propre décomposition.

Nous devons rationnellement apprécier le triple classement algébrique, afin de mieux concevoir l'efficacité directe du calcul différentiel, qui ne semble d'abord destiné qu'à fournir la base nécessaire du calcul intégral. Attentivement comparés les deux calculs manifestent, dans leur aptitude scientifique, une équivalence qui contraste avec l'inégalité de leurs difficultés logiques. Toujours mêlée à l'intégration pour l'élaboration spéciale des questions propres à la catégorie normale, la différentiation suffit seule à la principale des deux catégories exceptionnelles. Appréciée convenablement, la classification algébrique peut donc consolider la division géométrique, en offrant la confirmation abstraite d'une répartition longtemps restée purement concrète. L'explication qui s'y rapporte doit d'ailleurs s'étendre à la mécanique, quoique la distinction ne puisse jamais devenir aussi prononcée dans un domaine plus restreint.

D'après la destination propre au calcul des relations indirectes, tous ses modes doivent normalement concourir à l'élimination finale des quantités auxiliaires primitivement introduites pour instituer les équations générales de la géométrie subjective. Étudiée logiquement, chacune de ses équations contient nécessairement trois sortes de variables, une indépendante, et deux dépendantes, dont la première est donnée et la seconde inconnue. Bien que chaque espèce comporte la pluralité, nous pouvons, pour simplifier l'explication, la borner à l'unité, d'où le cas général sera facilement induit. Une équation différentielle doit sa généralité géométrique à la coexistence de trois variables, quoiqu'une seule d'entre elles soit indépendante. Tel est le principal caractère qui distingue les lois indirectes ou transcendantes des lois élémentaires ou spéciales et directes, toujours bornées à deux variables. Étendue à des courbes quel-

conques, l'équation différentielle d'un problème subjectif contient, outre la grandeur cherchée, les deux coordonnées, dont la relation, quoique supposée connue, n'y saurait être spécifiée sans faire aussitôt cesser la généralité du type. Relativement à la variable indépendante, comme à l'une des deux variables dépendantes l'équation est toujours infinitésimale, tandis qu'elle peut l'être ou ne pas l'être envers l'autre ; d'où résulte la distinction des trois catégories algébriques.

Une première classe comprend les questions où la différentiation n'affecte que les coordonnées, sans concerner la grandeur cherchée. Dans ce cas, l'élimination des infinitésimales exige seulement le calcul différentiel, pour rapporter la différentielle dépendante à l'indépendante. Il est impossible que celle-ci subsiste quand l'autre se trouve éliminée, vu l'incompatibilité de tout élément avec aucune combinaison de grandeurs finies. Toujours exprimée par un rapport infinitésimal, dont l'ordre peut d'ailleurs être quelconque, l'inconnue d'un tel problème sera spontanément obtenue, dès qu'on aura convenablement différentié l'équation donnée. On peut prendre pour types de ce cas, en géométrie plane, les déterminations du coefficient angulaire de la tangente et du rayon de courbure, d'après deux fractions différentielles, l'une du premier ordre, l'autre du second.

Renversé dans la seconde catégorie, le caractère infinitésimal de l'équation subjective y consiste en ce que la différentiation concerne la grandeur cherchée, sans affecter l'ordonnée connue. Il suffit alors d'éliminer celle-ci, d'après l'équation objective, pour que la question devienne directement relative au calcul intégral, qui doit simultanément enlever les deux différentielles connexes. Voilà comment, par exemple, il faut toujours procéder envers la quadrature d'une courbe plane, en coordonnées rectilignes ou polaires. Une fois que l'intégration

est accomplie, l'équation du problème a définitivement échangé sa généralité subjective contre son objectivité spéciale. Si l'on compare cette catégorie à la précédente, on voit que les équations propres à la géométrie transcendante cessent d'être générales en perdant le caractère infinitésimal, soit que l'élimination des différentielles dépende du calcul intégral ou de l'algèbre ordinaire.

A la classe la plus vaste et la plus compliquée appartiennent les questions où, comme envers la rectification plane, la différentiation affecte simultanément les trois variables nécessairement coexistantes dans les types généraux de la subjectivité concrète. Réduites à leur moindre nombre, en différentiant l'équation donnée, les infinitésimales ne peuvent disparaître que simultanément par l'intégration, restée toujours impossible jusqu'à ce que la relation ait ainsi perdu sa généralité subjective. Mais, quoique le problème doive alors figurer dans la géométrie intégrale, sans s'y distinguer de la classe précédente, ce cas bien apprécieé, fait assez sentir l'irrationalité de la tendance à n'envisager le calcul différentiel que comme la base nécessaire des intégrations. Outre cette efficacité logique, ce calcul se montre ainsi doué d'une aptitude directement scientifique, qui, suffisante envers la première des trois catégories algébriques, constitue, pour la dernière, une préparation indispensable. Nous pouvons maintenant écarter le triple classement abstrait, qui n'avait ici d'autre destination que de faire convenablement apprécier l'influence directe et spéciale de la différentiation. Il faut définitivement coordonner la géométrie transcendante d'après la division binaire qui résulte de la combinaison des deux dernières classes algébriques en un seul ordre concret, où les études sont à la fois intégrales et finales. Alors tout le reste du présent chapitre doit uniquement concerner l'appréciation philosophique des théories géométriques qui

sont, abstraitement, différentielles, et, concrètement, préparatoires.

Préambule abstrait.

Avant d'apprécier la constitution concrète de la géométrie différentielle, il faut convenablement expliquer le préambule abstrait qu'exige son ensemble. Réservant les deux leçons initiales à la conception fondamentale, et la leçon finale au résumé normal, les seize leçons propres au cinquième degré de la Logique en fournissent cinq algébriques et huit géométriques. Si l'on décompose le préambule abstrait, on le voit d'abord formé de trois leçons sur la différentiation; puis de deux relatives à l'application du calcul différentiel aux questions d'algèbre dont il peut seul généraliser la solution.

Pour que les lois de la différentiation soient normalement coordonnées, il y faut successivement introduire deux distinctions essentielles, dont la seconde doit être subordonnée à la première. Ramenant le cas implicite au cas explicite, et faisant dépendre la pluralité de l'unité, le préambule abstrait consacre sa première leçon à la différentiation des formules d'une seule variable. Il suffit ensuite de deux principes généraux pour rattacher à cette différentiation fondamentale, d'abord celle des formules de plusieurs variables, puis celle des équations quelconques. Étudié complétement, le traité de la différentiation doit se terminer par l'établissement des lois générales sur la transformation différentielle qui résulte du changement de variable indépendante. Relativement au cas fondamental, où la différentiation est directe et spéciale, il suffit d'une règle envers chacun des dix éléments algébriques, d'après lesquels on différentie les formations composées sans avoir besoin d'aucun nouveau principe.

Examinée dans le premier couple, la différentiation ramène les polynomes aux monomes, en conservant le signe de chaque terme. Convenablement apprécié, le cas initial suscite une no-

tion destinée à réagir sur l'ensemble du calcul des relations indirectes, en montrant que les termes purement constants ne peuvent jamais affecter les différentielles. Une telle remarque fait, réciproquement, surgir l'introduction nécessaire des constantes arbitraires dans une intégration quelconque, qui ne pourrait autrement acquérir sa généralité normale.

Relativement au second couple algébrique, la différentiation peut être directement traitée envers chacun de ses éléments, dont l'un peut aussi conduire, par inversion, à différentier l'autre. Étudiant d'abord un produit, il suffit, si le premier facteur est constant, de différentier le second, en conservant le coefficient ; en sorte que l'élimination différentielle des constantes n'appartient qu'aux sommes et différences. Pour différentier un produit dont les deux facteurs sont variables, il faut ajouter les résultats que fournirait la variation isolée de chacun d'eux : la même loi s'étend au nombre quelconque des facteurs. On y doit normalement remarquer le début des restrictions propres à l'accroissement infinitésimal, qui ne se font aucunement sentir envers le premier couple algébrique. Nous pouvons, en réservant la différentiation des produits, en déduire celle des quotients, dans le cas le plus étendu, qui d'ailleurs comporte une appréciation directe, aussi facile que la précédente, et pareillement relative à la nature des changements. Si le numérateur devient constant, la dérivée de la fraction se forme en la divisant par son dénominateur et changeant le signe du résultat, comme l'exige l'opposition des variations. Examinée d'après ce cas, la règle générale pour la différentiation des fractions peut finalement coïncider avec celle des produits auxquels les quotients sont toujours assimilables.

Toutes les notions qui concernent la différentiation du troisième couple algébrique peuvent aussi résulter de la loi relative aux produits parmi lesquels rentrent les puissances, dont l'in-

version conduit aux racines. Il faut alors noter l'uniformité de la règle finalement obtenue envers une puissance quelconque, d'après une exacte appréciation des trois cas propres à l'exposant. Toutefois, la similitude de formation ne se trouve convenablement expliquée qu'en instituant la dérivée par l'application directe de la formule binomiale, dont les deux premiers termes suffisent à cet office. Renversant la liaison différentielle entre le second couple et le troisième, on pourrait rattacher à la différentiation des puissances la seule loi propre à celle des fractions, qui sont toujours assimilables aux puissances soustractives. Examinés philosophiquement, de tels rapprochements font mieux apprécier la connexité fondamentale des trois couples d'éléments dont le calcul des relations se trouvait uniquement composé quand le principe cartésien suscita la conception leibnitzienne.

Une nouvelle impulsion devient nécessaire pour différentier le quatrième couple, qui ne se lie au précédent qu'en changeant le point de vue algébrique. Bien appréciée, la différentiation exponentielle peut être directement instituée avec autant de facilité que les autres, quand on s'y borne à caractériser la nature de la dérivée, sans y attacher trop d'importance à la détermination immédiate de son coefficient. Il suffit alors de considérer la correspondance fondamentale entre l'addition des variables indépendantes et la multiplication des variables dépendantes, pour reconnaître que la dérivée d'une formule exponentielle en est nécessairement un multiple.

Si l'indétermination de ce multiple est convenablement rapprochée de la lacune analogue qu'offrit, au second chapitre, l'institution de la série exponentielle, la marche alors suivie peut ici conduire à compléter la différentiation, vu l'identité, facilement appréciable, entre les deux constantes. En se dégageant des habitudes empiriques, on n'éprouve aucun scrupule

à se borner au cas où cette constante devient l'unité, sans avoir encore évalué la base qui correspond à ce choix. Nous y pouvons aisément ramener toute autre exponentielle, d'après la règle élémentaire sur le changement du système logarithmique. Telle est la marche qui fait directement obtenir la dérivée d'une exponentielle quelconque en la multipliant par le logarithme de sa base dans un système fixe, ultérieurement assignable. Il ne faut point s'assujettir à faire immédiatement suivre l'institution algébrique du complément arithmétique qui concerne la détermination de ce système, restée habituellement inutile, jusqu'à ce que le calcul devienne numérique.

Bien appréciée, cette spécification doit normalement résulter de la série exponentielle, soit qu'on regarde celle-ci comme déjà provenue de l'algèbre élémentaire, ou qu'on attende son avénement de l'application abstraite du calcul différentiel. Rattachée à la série binomiale, par un ingénieux artifice du plus fécond des grands géomètres, cette détermination conduit à reconnaître que le multiple propre à la dérivée exponentielle équivaut au logarithme népérien de la base correspondante, conformément au résultat du mode direct. Il faut envisager la puérile importance que l'empirisme classique accordait au complément numérique de la différentiation exponentielle, comme un symptôme spécial de l'abaissement que le régime académique fit subir à l'esprit mathématique jusqu'à l'avénement du positivisme. Dans cette confirmation d'une décadence trop explicable, on doit noter, outre le fond de l'incident, la forme des scrupules qui le suscitèrent. Étendus jusqu'à vouloir à tout prix, s'abstenir de la série exponentielle pour une évaluation qui s'y rapporte, ils poussèrent à l'accomplir, suivant une voie aussi pénible que détournée, d'après une série non moins exposée aux vicieuses objections qu'on espérait ainsi surmonter.

On peut aisément appliquer ces remarques à la différentiation logarithmique, soit qu'on la déduise de la précédente, ou qu'on l'établisse directement. Convenablement examinée, elle suscite une importante réflexion sur l'aptitude spontanée de l'institution leibnitzienne à lier entre eux les divers éléments algébriques de manière à consolider la synthèse mathématique. Après avoir reconnu que, pour la base algébriquement préférable, la formule exponentielle produit une dérivée exactement équivalente, on conçoit que la dérivée de la formule logarithmique en est la réciproque proprement dite. Si l'on veut immédiatement apercevoir cette subordination, on peut directement l'établir avec autant de facilité que pour le cas exponentiel, quand on a suffisamment écarté les puérilités académiques, qui dissimulent les notions principales sous les incidents secondaires. On voit ainsi la différentiation lier le quatrième couple algébrique au troisième, et même au second, la dérivée d'un logarithme étant une fraction; ce qui montre combien les éléments additionnels du calcul des relations étaient implicitement compris dans son domaine perpétuel.

Si l'on veut maintenant apprécier la différentiation du couple exceptionnel, on pourra d'abord la déduire de la précédente, d'après les expressions, exponentielle ou logarithmique, du sinus ou de l'arc, émanées des séries au troisième chapitre. Il faut normalement compléter cette appréciation abstraite en manifestant l'origine concrète de la différentiation trigonométrique, et, par suite, circulaire. Grâces à la facilité de comparer l'accroissement infinitésimal du sinus ou de la tangente à celui de l'arc, soit d'après le théorème hipparquien, soit par la similitude des triangles, on peut différentier ces variables sans avoir aucun égard à leur investiture algébrique. La réaction philosophique d'une telle faculté consolide l'autorisation de faire normalement figurer les formations trigonométriques et

circulaires parmi les éléments fondamentaux du calcul des relations, quoiqu'elles soient finalement composées des autres couples. On voit ainsi reproduire, sous forme concrète, les remarques abstraitement surgies du quatrième couple comparativement aux précédents, avec la même opposition entre l'élément direct et l'élément inverse, pareillement fondée sur la loi générale de l'inversion différentielle.

Suite naturelle de la différentiation des éléments algébriques, celle des formules composées ne suscite aucune difficulté nouvelle, quel que soit le mode qui dirige la combinaison. Elle n'exige un nouveau principe que si les deux genres de variations deviennent simultanés ; comme, par exemple, envers une puissance dont l'exposant serait aussi variable, ce qui ferait inséparablement concourir les troisième et quatrième couples. Pour différentier ces formules exceptionnelles, il leur faut appliquer la loi générale qui réglera ci-dessous la différentiation collective, en attribuant les divers modes algébriques à des variables d'abord distinctes, qu'on fait ensuite coïncider. Une seule notion fondamentale doit normalement compléter la différentiation directe, en étendant à tous les ordres la correspondance des différentielles aux dérivées. L'équivalence entre la dérivée et le rapport différentiel est, dans le premier ordre, commune à toutes les hypothèses sur le mode d'accroissement de la variable indépendante. Toujours la dérivation successive s'accomplit d'après une application convenablement redoublée des règles propres à la dérivation primitive, sans susciter d'autres embarras que la complication croissante des résultats. Il faut seulement déterminer suivant quelles lois les dérivées d'un ordre quelconque doivent généralement concourir à la composition des différentielles correspondantes.

Une telle corrélation deviendrait de plus en plus compliquée si l'on voulait successivement différentier, sans aucune restric-

tion, la liaison primitive, où la différentielle dépendante équivaut au produit de la dérivée par la différentielle indépendante. Nous pouvons partout obtenir la même simplicité qu'envers le premier ordre, en supposant que la variable libre croît uniformément, ce qui rend nulle sa différentielle seconde et toutes les autres, de manière à différentier ce produit comme si le facteur infinitésimal était constant. Il est alors permis de généraliser la loi relative au premier ordre, en égalant chaque dérivée successive au rapport entre la différentielle dépendante qui lui correspond et la puissance analogue de la différentielle indépendante. Tardivement appréciée, même par de grands géomètres, cette uniformité facultative de l'accroissement libre doit être soigneusement signalée aux jeunes disciples de l'Humanité, pour terminer convenablement la première leçon algébrique de géométrie différentielle. Avant que cette faculté fût reconnue et développée, la différentielle d'un ordre quelconque dépendait, non-seulement de la dérivée correspondante, mais aussi de toutes les précédentes, suivant une loi de plus en plus complexe.

Étudiée spécialement, la dérivation successive fait d'abord reconnaître que le nombre des dérivées est ordinairement indéfini, chacune étant aussi compliquée habituellement que la formule primitive, et quelquefois davantage, même envers les éléments algébriques. Toutefois, cette remarque comporte une mémorable exception, à l'égard des polynomes, d'un degré quelconque, où les exposants ne sont ni soustractifs ni fractionnaires. Une telle constitution suscite une dérivée de même espèce, mais du degré précédent, en sorte que la différentiation successive se termine par une constante, quand l'ordre devient égal au degré primitif. Dans tous les autres cas, le nombre illimité des dérivées, et leur complication souvent croissante, rendraient douteuse leur efficacité concrète, si la conception leib-

nitzienne ne l'avait pas directement expliquée. Examinée envers les deux derniers couples algébriques, la différentiation successive y développe la reproduction propre à la formule directe et la liaison de la formule inverse aux couples antérieurs, en faisant surtout ressortir l'inaltérabilité de l'exponentielle fondamentale.

Toute la leçon suivante doit être uniquement consacrée à l'ensemble des notions générales sur la différentiation collective, où la conception leibnitzienne manifeste abstraitement sa supériorité philosophique, qui n'est d'abord sentie qu'à l'égard de sa destination concrète. Il faut même reconnaître que la faculté de considérer plusieurs variables indépendantes, aussi directement qu'une seule, n'appartient qu'à l'institution infinitésimale de l'algèbre transcendante, quoique son créateur n'eût immédiatement en vue que le cas fondamental. Nous voyons la méthode des dérivées, surgie au temps où la pluralité des variables était déjà familière, rester nécessairement incapable de satisfaire à cette extension, que le philosophe germanique avait spontanément devancée. Telle est aussi l'insuffisance abstraite de la méthode des limites ou des fluxions, qui ne considérant que des rapports, s'interdit la simultanéité des termes de comparaison. On peut ainsi confirmer, même sous l'aspect purement algébrique, la subalternité que la régénération mathématique assigne aux deux conceptions qui d'abord rivalisèrent avec l'institution leibnitzienne, dont la largeur reste, à tous égards, incomparable.

Convenablement émanée du principe infinitésimal, la différentiation collective peut finalement suggérer des notions équivalentes envers les fluxions et les dérivées, directement incapables de s'adapter à la pluralité des variables, sauf pour les fluxions ou dérivées partielles. Afin que les deux méthodes secondaires soient ainsi généralisées, il y faut artificiellement sup-

poser que les diverses variables indépendantes se subordonnent à l'une d'elles, ou plutôt dépendent d'une même auxiliaire fictive, suivant des lois qui doivent toujours rester indéterminées. D'après ce pénible détour, on retrouve, envers les fluxions et les dérivées, l'équivalent de la différentielle totale, parce qu'on a rétabli l'unité de comparaison qu'exige la conception fractionnaire. Examiné philosophiquement, cet artifice, qui devient inextricable au delà du premier ordre, ne mérite qu'une mention historique, pour faire mieux juger l'état de l'enseignement mathématique avant que le positivisme eût subordonné la science à la philosophie au nom de la religion. Toutes les notions propres à la différentiation collective doivent être dogmatiquement rapportées à la conception qui les fit historiquement surgir, d'abord envers le premier ordre, puis à l'égard des suivants.

La loi fondamentale consiste en ce que la différentielle totale doit toujours équivaloir à la somme des différentielles partielles, seules susceptibles d'estimation immédiate, d'après les règles relatives à l'unité de variable. Il est aisé de reconnaître que ce principe se borne à généraliser systématiquement la remarque spontanément surgie ci-dessus envers le second couple algébrique. Graduellement étendue aux divers degrés de pluralité, cette loi résulte de la faculté, toujours normale, de remplacer la simultanéité des accroissements par leur succession pourvu que tous se trouvent finalement accumulés. Une telle origine fait directement ressortir la restriction nécessaire de ce principe aux variations infinitésimales, à moins que, les variables étant exceptionnellement séparées, on ne puisse supprimer l'ensemble de leurs réactions différentielles. Examinée en elle-même, la loi de la différentiation collective devient directement évidente d'après cette restriction, si l'on pense à l'appliquer aux différentielles partielles, en annulant les accroissements des varia-

bles indépendantes qui seraient successivement supposées constantes.

Il faut convenablement étendre à la pluralité des accroissements libres l'uniformité ci-dessus introduite envers un seul. Dans cette plénitude finale, une hypothèse toujours facultative développe son aptitude à simplifier l'ensemble de la constitution propre au calcul infinitésimal. Élaborées ainsi, les différentielles successives doivent néanmoins offrir une complication croissante à mesure que l'ordre augmente et que la pluralité s'élève, tandis qu'elles sont toujours monomes pour une seule variable. Elles seraient, en outre, surchargées des résultats du défaut d'uniformité, de manière à dissimuler la loi ci-dessous assignée à leur formation générale. Si cette uniformité gêne les restrictions que l'on voudrait ultérieurement apporter à l'indépendance des variables, il est préférable de traiter à part ce cas exceptionnel, quand le besoin s'en manifestera, plutôt que de compliquer, à son intention, les règles les plus usitées.

Envers la différentiation successive, la pluralité des variables suscite une importante remarque, graduellement incorporée à l'ensemble du calcul des relations indirectes, sur la persistance des dérivées où le concours des différentiations est seul interverti. Nous voyons cette équivalence naturellement due, dans le cas fondamental, à l'indifférence de l'ordre suivant lequel la succession de deux variables indépendantes remplace leur simultanéité. Formulée pour des accroissements quelconques, cette indifférence ne susciterait aucune loi précise, vu la multiplicité des parties alors propres à la variation provenue de la réaction mutuelle de ces variables. L'état infinitésimal rend toujours monome une telle variation, ainsi réduite au produit de la dérivée correspondante par les deux différentielles indépendantes. Une comparaison finale des deux modes de succession fait alors reconnaître que leur diversité ne saurait jamais affec-

ter la dérivée due au concours des deux variables. Rapprochée du contraste ordinairement offert envers ces variables par la formule primitive, une telle persistance doit d'abord sembler paradoxale. Elle s'explique en réfléchissant que les constantes ne sont entièrement dépourvues d'influence différentielle que quand elles se trouvent isolées, auquel cas le théorème inversif devient spontanément illusoire, d'après l'annulation des deux dérivées dont il proclame l'équivalence.

Nous devons maintenant apprécier les deux extensions connexes de ce théorème aux différentiations mêlées, d'un ordre quelconque, envers un nombre quelconque de variables indépendantes. Établie pour deux variables, l'équivalence des dérivées croisées devient aussitôt applicable à tant de variables qu'on voudra, pourvu que chacune d'elles ne suscite qu'une seule différentiation. Une considération élémentaire suffit pour motiver cette extension, en représentant le désordre comme devant toujours être aussi binaire que l'ordre. Fondée sur ce principe, la disposition normale des permutations quelconques peut constamment réduire leur succession à changer l'arrangement mutuel de deux éléments consécutifs, précédés et suivis d'opérations immuables. Si, l'équivalence des dérivées inverses étant convenablement généralisée envers des variables distinctes, plusieurs de celles-ci sont supposées coïncider, on obtient la plus complète extension de la loi du croisement différentiel, en appliquant au degré l'équivalence d'abord restreinte au nombre.

Tel est le mode suivant lequel on reconnaît que les dérivées partielles d'un ordre quelconque à l'égard de plusieurs variables ne peuvent jamais changer quand on se borne à modifier la succession des différentiations accumulées. Une telle persistance doit beaucoup simplifier la composition générale de la différentielle totale, déjà facilitée par l'uniformité de tous les accrois-

sements libres. Mais, quoique la loi doive finalement concerner une multiplicité quelconque, il faut d'abord la restreindre à deux variables, où son analogie avec le théorème binomial devient directement sensible, d'après une induction aisément complétée. Bien appréciée, cette correspondance peut facilement conduire au cas général, où, pour toute pluralité, la différentielle totale se compose des dérivées partielles suivant la règle indiquée par l'algèbre envers la puissance correspondante d'un polynome pareillement complexe. Alors on complète ce théorème, en le rendant déductif, d'après la double corrélation entre la composition spontanément résultée de la multiplicité dans les deux cas et les réductions respectivement dues à l'inversion des différentielles ou des facteurs.

Sucessivement appliquée à toutes les pluralités, cette loi fait toujours connaître le nombre des dérivées propres à chaque cas et leurs coefficients numériques, en utilisant deux règles élémentaires, l'une arithmétique, l'autre algébrique, qui ne paraissaient pas susceptibles d'une semblable portée. Examinés comparativement, les résultats d'une telle application font surtout ressortir, d'après la formule des répartitions, la rapide multiplication des dérivées distinctes à mesure que la pluralité s'élève, sans que le degré différentiel soit même considérable. Rarement le domaine mathématique peut réellement dépasser la dualité des variables indépendantes, puisque les spéculations algébriques sur le mouvement général des fluides sont essentiellement illusoires. Vu philosophiquement, le dénombrement des dérivées partielles doit pourtant fixer l'attention des jeunes disciples de l'Humanité, qui pourront ainsi pressentir l'incomparable complication de la plus vaste partie du calcul intégral. Il ne faut jamais négliger l'occasion de faire dignement ressortir le besoin, intellectuel et moral, de restreindre nos efforts théoriques au domaine spécialement réglé par la religion univer-

selle, vu l'inanité nécessaire des aspirations indisciplinées, même quand elles semblent réalisables.

Dans la troisième leçon algébrique de géométrie différentielle, la différentiation des équations quelconques se trouve graduellement ramenée à celle des formules de plusieurs variables indépendantes, et dès lors au cas fondamental. Avant d'instituer cette réduction générale, il faut normalement apprécier la diversité nécessaire entre la différentiation implicite et la différentiation explicite. Toutefois, une telle explication, comme l'ensemble de cette théorie, peut se borner au cas le plus simple, où la formation implicite ne dépend que d'une seule variable libre. Une distinction normale doit ici prévaloir envers le degré d'implicité, mesuré par le nombre d'équations simultanées contenant une variable de plus: ces modes diffèrent entre eux comme l'implicité de l'explicité, l'élimination étant autant interdite que la résolution. Si d'abord on considère une seule équation entre deux variables, conformément à la géométrie plane, la dérivée de la variable dépendante devient alors relative à toutes deux; ce qui caractérise la différentiation implicite, où le résultat est aussi voilé que la source.

On peut toujours ramener ce cas à l'explicité, si l'on regarde le premier menbre comme une formule qui deviendrait identiquement nulle en supposant ses deux variables liées entre elles suivant la loi résultée de l'équation. Sous cet aspect, sa différentielle, qui doit alors s'annuler, se déduit de celle où les deux variables seraient d'abord indépendantes en y substituant, à la différentielle dépendante, le produit de la dérivée cherchée par la différentielle libre. Alors cette dérivée équivaut au rapport, changé de signe, entre les deux dérivées partielles du premier membre de l'équation primitive envers la variable indépendante et la variable dépendante. D'après une telle origine, le résultat serait le même si le second membre, au lieu

d'être nul, était seulement constant ; ce qui reproduit, pour la différentiation implicite, l'élimination spontanée des constantes isolées dans la différentiation explicite. On doit surtout remarquer envers l'implicité, que cette élimination pourrait indirectement affecter un quelconque des paramètres propres au cas proposé : car, s'il ne disparaît pas en différentiant, on pourra toujours le chasser de l'équation différentielle à l'aide de l'équation primitive.

Modifié pour le second ordre et les suivants, le même principe pourrait aussi déterminer toutes les autres dérivées d'une formation implicite. A leur égard, il est ordinairement préférable de les déduire de la première, d'après les différentiations successives de l'unique formule qu'exige l'implicité. Nous devons seulement recommander de le différentier en y traitant les deux variables comme distinctes l'une de l'autre mais liées entre elles, ainsi qu'on l'a d'abord fait pour construire cette loi. Suivant quelque mode qu'on procède, on rapportera les dérivées implicites de tous les ordres à toutes les dérivées partielles que fournit le premier membre de l'équation proposée jusqu'à l'ordre correspondant. On est ordinairement dispensé de construire ces formules, de plus en plus compliquées, en se bornant à la différentiation spéciale de la première dérivée dans chaque cas particulier, sauf les substitutions graduelles qu'un tel calcul exige pour rapporter les résultats aux deux variables corrélatives.

Il faut maintenant étendre le principe de la différentiation implicite aux autres degrés d'implicité, qui doivent toujours rendre la dérivée cherchée simultanément relative à toutes les variables coexistantes, afin que la réponse soit aussi voilée que la question. Gardant la même subordination de chaque différentielle dépendante à la différentielle indépendante, la différentiation de chacune des équations simultanées fournit une

relation entre les diverses dérivées inconnues. Les équations ainsi trouvées sont toujours du premier degré par rapport à toutes les dérivées implicites, dont les coefficients y consistent dans les dérivées partielles du premier membre de chaque équation primitive envers les variables correspondantes. Elles doivent donc exiger l'emploi des formules générales du premier degré pour un pareil nombre d'inconnues, de manière à devenir bientôt inextricables. Si l'on voulait ensuite former les dérivées du second ordre et des suivants, elles pourraient être successivement déduites des premières, après avoir convenablement différentié les fractions ainsi produites, sans exiger ni susciter aucune notion nouvelle. Il faut seulement noter la complication rapidement croissante, des résultats, même envers les plus simples cas, à mesure que l'implicité devient plus profonde, d'après une liaison plus indirecte. Alors la science rend spécialement familière la confirmation philosophique du besoin religieux de restreindre nos aspirations théoriques, en remplaçant des déductions plus pénibles par des inductions plus fréquentes.

Nous pourrions aisément étendre à la pluralité des variables indépendantes le principe de la différentiation implicite, assez expliqué pour une seule. Une telle extension peut et doit être normalement évitée, en considérant que, les dérivées partielles étant toujours subordonnées à l'unité de variable, l'implicité n'y saurait exiger aucune règle autre que celles qui conviennent au cas fondamental. Même envers la différentielle totale, sa formation générale d'après les dérivées convenables est nécessairement commune à tous les modes suivant lesquels celles-ci sont obtenues. Examinée dans son ensemble, la différentiation implicite, d'où résulte la plus vaste et la plus difficile partie du calcul intégral, devient finalement réductible à la loi ci-dessus formulée. Nous ne devons philosophiquement considérer les divers cas d'implicité que pour y constater leur réduction suc-

cessive à cette unique formule, du moins envers les questions religieusement instituées.

Une théorie complémentaire doit terminer cette leçon, en établissant les lois propres à la transformation différentielle que suscite le changement de variable indépendante, ordinairement résulté d'un nouveau système de coordonnées. Fondée sur la distinction entre l'unité de variable et la pluralité, la décomposition de cette théorie est entièrement exempte des diversités relatives à l'implicité, puisqu'elles n'affectent que la détermination spéciale des dérivées, sans intéresser leur transformation générale. Avant d'expliquer les lois correspondantes, il en faut convenablement apprécier la destination normale, directement relative à l'application concrète de l'algèbre transcendante. Nous devons toujours considérer la tranformation différentielle comme perfectionnant l'aptitude du calcul infinitésimal à faciliter la formation des équations subjectives en y laissant libre le choix de la variable la plus propre à les instituer, quand même elle devrait être finalement remplacée. On peut ainsi se borner à formuler chaque théorie de géométrie transcendante envers les coordonnées qui s'y prêtent le mieux, sans recommencer l'appréciation concrète pour chacun des autres systèmes qu'on pourrait successivement préférer.

Sous cet aspect, le cas principal, concernant l'unité de variable, en vue de la géométrie plane, n'exige qu'une formule très-simple, aisément déduite de la relation fondamentale entre la différentielle et la dérivée. On y peut rapporter la différentielle dépendante à la nouvelle différentielle indépendante par l'entremise de l'ancienne, de la même manière que pour changer le terme de comparaison dans l'estimation d'un rapport quelconque. L'ancienne dérivée se transforme en renversant cette relation, et devient ainsi le quotient des deux dérivées que comportent les deux variables primitives envers la nouvelle. Une

telle règle équivaut à diviser les deux termes du premier rapport différentiel par la nouvelle différentielle, en le traitant comme toute fraction dont on veut rapporter les termes au même dénominateur. Sous ce point de vue, on conçoit qu'une telle théorie ait été spontanément appliquée sans susciter aucune attention distincte, tant que la conception leibnitzienne a librement prévalu.

Fondée sur l'uniformité d'accroissement de la variable indépendante, l'institution ordinaire de la différentielle seconde ne saurait directement admettre une semblable transformation, parce que cette faculté se trouve maintenant appliquée à la nouvelle variable. Il faut alors employer la composition la plus générale des différentielles secondes, sans apporter aucune restriction aux divers modes d'accroissement, afin d'y changer le terme de comparaison aussi librement que dans le premier ordre. Une inversion convenable de la relation ainsi préparée suffit pour rapporter l'ancienne dérivée du second ordre à celles que fournissent les différentielles, seconde et première, des deux variables primitives envers la nouvelle, dont l'accroissement est alors uniforme. Mais il faut finalement préférer le mode indirect où la formule propre au second ordre serait convenablement déduite de celle qui concerne le premier, en y soumettant la première dérivée à la même loi que la variable dépendante. Elle exige que la fraction relative à la transformation initiale soit différentielle envers la nouvelle variable indépendante, et divisée par la différentiée de celle-ci.

Relativement aux ordres suivants, les deux modes peuvent également fournir toutes les formules convenables, nécessairement affectées d'une complication croissante, dont il serait superflu de chercher la loi, que la méthode des dérivées pourrait cependant fournir. Étudiée concrètement, cette théorie n'est vraiment usuelle que pour les deux premiers ordres, l'on

n'y doit même retenir que la règle propre au premier. Ces formules générales doivent être d'avance appliquées à l'inversion des variables, non moins utile au calcul qu'à la géométrie. Il suffit alors de supposer que la nouvelle variable indépendante devient égale à l'ancienne variable dépendante ; ce qui produit, au premier ordre, la réciprocité prévue des dérivées, et, pour le second, une relation que cette théorie pouvait seule dévoiler. Fondées sur une composition purement différentielle, ces transformations n'exigent pas que le changement de variable soit autrement défini que d'après une équation infinitésimale, pourvu qu'elle ne dépasse jamais le premier ordre, puisque les premières dérivées y concourent envers les ordres quelconques.

A l'egard de deux variables indépendantes, comme l'exige l'étude transcendante des surfaces, on peut aisément instituer, dans le même esprit, des formules nécessairement plus compliquées, qu'il suffit de construire pour le premier ordre. Nous y devons supposer que chacune des anciennes variables indépendantes devient simultanément relative aux deux nouvelles, sans quoi ce cas se traiterait d'après les règles propres au précédent, en les appliquant à deux changements coexistants mais isolés. Gouvernées ici par les deux accroissements nouveaux, les deux différentielles d'abord libres doivent alors céder leur place aux binomes convenables dans la différentielle totale de la commune variable dépendante. La comparaison de ce résultat à la composition de cette différentielle envers les nouvelles permet d'exprimer les deux nouvelles dérivées de la variable dépendante d'après ses deux anciennes et celles des premières variables indépendantes relativement aux nouvelles. Examiné spécialement, le principe général de la théorie complémentaire fournit alors, pour les deux dérivées à transformer, deux équations du premier degré qui les contiennent simultanément, d'où résulte le surcroît de complication propre à ce cas, et toujours

augmenté par une pluralité supérieure, où la même marche suffirait.

Convenablement appliqué, le calcul des relations indirectes peut beaucoup perfectionner les transformations en séries, en développant la méthode fondamentale que l'algèbre ordinaire put seulement ébaucher. On doit consacrer à cette appréciation la quatrième leçon algébrique de géométrie différentielle, en faisant surtout ressortir la généralité qui caractérise cette application. Nous pouvons successivement trouver, par la différentiation, tous les coefficients du développement d'une formule quelconque en puissances de la variable, d'après le mode communément employé pour le terme constant, toujours égal à la valeur qui correspond à l'annulation de la variable. Si la série est graduellement différentiée, tous les exposants y décroîtront de plus en plus, de manière à rendre constant le terme quelconque dont on veut déterminer le coefficient, dès lors résulté de l'annulation de la variable, dans la dérivée correspondante. Telle est la série générale qui mérite de conserver le nom de son auteur, principal auxiliaire britannique du fondateur de la mécanique céleste. Alors le coefficient de chaque puissance, pour le développement d'une formation quelconque, s'obtient en annulant la variable dans la dérivée de même rang, et divisant le résultat par le nombre de permutations qui correspond à l'exposant. Nous pouvons ainsi retrouver toutes les séries spécialement émanées de l'algèbre ordinaire, de manière à faciliter l'induction relative à la loi des coefficients, surtout envers le premier élément de chaque couple.

Toutefois, la principale efficacité de cette règle consiste à fournir l'expression générale de l'accroissement d'une formule quelconque selon les puissances de celui de la variable. Regardant le premier comme dépendant du second, il suffit donc de le différentier par rapport à celui-ci, qu'il faut ensuite annuler dans

toutes les dérivées, dès lors identiques à celles de la formule proposée envers sa propre variable. On trouve ainsi que chaque puissance de l'accroissement de la variable a pour coefficient la dérivée du même rang divisée par le nombre de permutations correspondant. Une telle loi permet d'accomplir, à l'égard de toute formation, un développement équivalent à celui que fournit, envers les puissances, le théorème binomial, devenu dès lors un cas particulier de cette règle. Étendue aux autres éléments algébriques, elle aboutit à leurs séries, en évitant les évaluations qu'exige le mode initial.

Une telle règle, mal instituée d'abord, fut convenablement établie, par le plus philosophe des grands géomètres, d'après une considération qui fait mieux apprécier l'aptitude du calcul transcendant à perfectionner ces transformations, en y fournissant des caractères plus généraux. Modifiée en décomposant la variable en deux parties, toute formule doit nécessairement offrir la même dérivée quand on la différentie séparément envers chacune d'elles. Il faut ainsi caractériser la série qui représente son nouvel état, ordonné selon les puissances de l'une d'elles, affectées de coefficients composés de l'autre, confondue avec la variable primitive. D'après l'identification des deux séries alors émanées de ce type sucessivement différentié sous les deux aspects, on trouve aisément la loi ci-dessus obtenue pour les coefficients d'abord indéterminés. A son tour, la règle propre à développer une formule selon les puissances de sa variable pourrait émaner de celle qui concerne les accroissements, si, dans celle-ci, l'on annulait la variable : ce qui prouve la pleine équivalence des deux modes, dont chacun produit l'autre.

Si, chez la même série, on suppose les deux parties de la variable égales au signe près, on trouve une autre règle, pareillement applicable à toute formation, alors rapportée à l'ensemble de ses dérivées. On doit historiquement regarder ce

troisième mode comme le premier, puisqu'il fut directement obtenu, d'après l'intégration, dès l'origine du calcul infinitésimal, par le principal auxiliaire algébrique du philosophe germanique. Une telle loi n'est naturellement destinée qu'à montrer comment une formule quelconque dépend de sa propre dérivée. De là pourraient cependant émaner les séries spéciales que fournissent les deux autres règles, mais d'une manière moins directe et moins nette. Étudiés comparativement, ces trois modes, logiquement équivalents, offrent chacun des avantages propres à sa constitution, mieux adaptée successivement aux développements particuliers, aux appréciations générales, aux intégrations quelconques.

Graduellement appliquée à des cas plus compliqués, la méthode précédente fait bientôt reconnaître que sa supériorité sur celle de l'algèbre ordinaire est moins réelle qu'apparente. Avec les avantages dus à l'uniformité du calcul, elle en offre les inconvénients, en interdisant d'utiliser les considérations spéciales qui peuvent directement simplifier chaque transformation. Nous pouvons souvent savoir, d'après la nature de la formule, que toutes les puissances paires, ou toutes les puissances impaires, doivent manquer dans la série qui la développe. Toutefois, la règle différentielle nous oblige à calculer leurs coefficients comme ceux des termes qui doivent alors subsister. Sa principale imperfection doit pourtant consister à subordonner la loi numérique des coefficients à celle qui concerne la composition algébrique des dérivées, l'induction devenant naturellement plus difficile envers celle-ci que pour l'autre.

A l'aspect de ces divers défauts, le plus philosophe des grands géomètres reconnut la nécessité de concevoir d'une manière moins uniforme et plus large l'application générale du calcul différentiel aux transformations en séries. Nous pouvons toujours utiliser la considération des dérivées pour instituer la propriété

caractéristique d'après laquelle on développe chaque formule. Il suffit que celle-ci soit convenablement comparée à sa dérivée, afin d'établir entre elles une relation suffisamment simple, à laquelle on soumettra la série cherchée, dont la constitution sera d'abord simplifiée autant que le cas le permet. Mais, en développant le caractère pour déterminer les coefficients, leur loi devra finalement résulter d'une induction toujours incertaine et souvent impossible, comme dans l'algèbre ordinaire, à moins que la condition ne comporte une généralisation directe. Apprécié philosophiquement, ce mode équivaut à l'intégration par séries des équations différentielles, sauf que, la relation étant ici factice, on peut ordinairement choisir la meilleure de ses formes en comparant, sous divers aspects, la formule et sa dérivée.

Rapportée à sa destination, l'équation différentielle ainsi composée ne saurait obtenir d'efficacité qu'en vertu d'une extrême simplicité, puisqu'elle devient finalement relative à la série cherchée. Une telle condition ne permet le succès, consistant à découvrir la loi des coefficients, que si la variable dépendante et sa dérivée y sont seulement à la première puissance, sans être multiplées l'une par l'autre. Redoublée, la différentiation pourra quelquefois fournir un caractère plus simple, en introduisant la seconde dérivée, dont la composition envers la série doit peu compliquer la comparaison, si l'on peut ainsi prévenir les carrés et les produits. Appliquée à l'exponentielle fondamentale, où la dérivée coïncide avec la formule, cette méthode fournit le meilleur mode pour instituer la série correspondante, sans aucun effort inductif. La supériorité de cette marche sur les précédentes devient également sensible envers la série logarithmique, dont la dérivée, multipliée par l'unité plus la variable indépendante, doit produire l'unité.

Dans le cas du sinus ou du cosinus, il faut aller jusqu'au se-

cond ordre pour éviter les carrés de la variable dépendante et de sa dérivée. Il est ainsi possible de rendre l'équation différentielle presque aussi simple qu'envers le type exponentiel, en égalant, au signe près, la seconde dérivée à la formule proposée. Graduellement étendue aux autres cas suffisamment accessibles aux méthodes antérieures, celle-ci manifeste son aptitude à mieux établir la loi des coefficients. Nous pouvons surtout apprécier sa supériorité pour les séries circulaires, où, quand l'arc se rapporte à la tangente, le succès de l'induction n'était d'abord dû qu'à l'extrême simplicité des nombres obtenus, tandis qu'il repose ici sur la composition algébrique du caractère. Il serait naturellement impossible d'obtenir la série, plus compliquée, qui rapporte l'arc au sinus, si sa dérivée ne devait pas être convenablement identifiée avec le développement résulté de la loi binomiale pour un exposant fractionnaire et soustractif. Telle est la méthode qui, mal appréciée sous l'empirisme académique, faute de la puérile uniformité dont elle s'affranchit, constitue le meilleur mode d'application de l'algèbre transcendante aux développements en séries. Également générale et spéciale, elle facilite les rapprochements essentiels, en assimilant les caractères ; comme le montre la comparaison des équations différentielles propres, d'abord aux formules directes, puis aux inverses, des deux derniers couples algébriques.

Étendue à deux variables indépendantes, la méthode lagrangienne, qui spontanément absorbe les précédentes, acquiert plus de valeur philosophique, en permettant d'instituer des séries communes à toutes les formules, même envers des formations implicites. Fondée sur la pluralité des dérivées du premier ordre, seules alors convenables, cette généralisation suprême résulte de la possibilté de former, pour ce cas, une équation différentielle qui soit finalement dégagée d'une for-

mule indéterminée de la variable dépendante. Faute d'une telle multiplicité, cette formule et sa propre dérivée ne pourraient jamais disparaître, tandis qu'elles peuvent toujours être éliminées entre l'équation primitive et ses deux dérivées partielles, de manière à caractériser la série cherchée. Examinée dans le cas spécialement traité par son incomparable auteur, cette méthode développe une formation implicite à deux variables en une série ordonnée selon les puissances de l'une, affectées de coefficients rapportés à l'autre, suivant une loi générale. Toujours relative à la formation indéterminée que contient la relation implicite du premier degré quant aux variables libres, cette série peut aussi développer, de la même manière, toute autre formation de la variable dépendante.

Nous devons enfin caractériser les perfectionnements extrêmes de l'institution des séries, quand on a suffisamment élargi le principe philosophique de ces transformations, où l'on doit toujours aspirer à décomposer les formules quelconques en éléments plus simples. Elles sont habituellement rapportées aux puissances proprement dites, parce qu'un tel développement est le plus convenable pour comparer, comme pour évaluer. Mais, cette supériorité devenant illusoire si la loi des coefficients reste inconnue ou trop compliquée, on peut alors préférer des éléments moins simples, qui, mieux rapprochés de la formule proposée, permettront une induction plus efficace. Une série de ce genre convient au développement du logarithme de la tangente suivant les puissances des exponentielles imaginaires de l'arc ou les sinus et cosinus de ses multiples. Sous le même aspect, beaucoup d'autres formules, où les deux derniers couples algébriques sont mutuellement modifiés, comportent des séries appréciables envers des éléments exponentiels, logarithmiques, ou trigonométriques, tandis que les puissances n'y permettraient aucune loi.

Sous l'impulsion spontanée de sa mémorable tentative pour soumettre au calcul la thermologie, le plus éminent des trois représentants extrêmes de l'évolution mathématique institua des moyens propres à développer une formule quelconque en séries de cosinus ou de sinus des multiples de la variable. Telle est la dernière extension que comporte la méthode fondamentale des coefficients indéterminés, qui peut ainsi procurer, d'après l'intégration, des règles équivalentes à celles que la différentiation fournit envers les puissances. Elles résultent d'une heureuse application de la nullité qui caractérise les intégrales des éléments trigonométriques, quand on les prend entre les limites convenables. Le coefficient de chaque terme se trouve alors déduit d'une intégration définie envers la formule proposée, affectée d'un multiplicateur trigonométrique qui rend nécessairement nuls tous les autres coefficients. Il faut pourtant reconnaître que ce mode n'est aucunement comparable à ceux qui résultent de la différentiation, puisque son succès l'exige, outre l'induction finale que tous demandent, une intégration rarement possible.

Historiquement considérée, la théorie de l'état maximum ou minimum, principal objet de la cinquième et dernière leçon algébrique de géométrie différentielle, constitue la plus ancienne et la plus directe des applications abstraites du calcul infinitésimal. Avant de l'examiner, il faut sommairement apprécier les moyens que fournit l'algèbre ordinaire envers une recherche souvent liée aux diverses spéculations numériques. Regardée comme un cas particulier de la question qui consiste à faire acquérir à la formule proposée une valeur donnée, la détermination du maximum pourrait toujours être ainsi subordonnée à la résolution algébrique des équations, en considérant les limites de réalité des racines. Rarement applicable d'une manière directe, vu l'extrême imperfection de l'algèbre, cette méthode

peut souvent réussir d'après un mode indirect, spécialement relatif à ces limites, constamment caractérisés par l'égalité des racines correspondantes. Introduit spontanément pour les formules propres aux second et troisième degrés, ce caractère devient pleinement général, en opposant la parité normale des états qui précèdent et suivent le maximum ou le minimum à l'unité nécessaire du cas exceptionnel. Examinée ainsi, l'égalité d'un couple de racines caractérise l'état maximum ou minimum, en constituant une séparation spontanée entre la réalité de ces racines et leur imaginarité. Telle est la considération normale qui permet de déterminer les valeurs de la variable propres aux états extrêmes d'une formule d'après l'annulation de la dérivée correspondante, dans tous les cas accessibles à la théorie spéciale des racines égales.

Une méthode plus directe et plus générale résulte du symptôme nécessaire que fournit la différentielle, qui, toujours additive pendant l'accroissement et soustractive quand la formule décroît, devient nulle pour le maximum et le minimum, caractérisés par l'état stationnaire. Les valeurs de la variable propres aux états extrêmes d'une formule quelconque doivent ainsi surgir de l'équation formée en annulant la dérivée correspondante, sauf la discussion spéciale des racines obtenues, qui ne peut jamais offrir de difficultés essentielles. Telle est la spontanéité de cette méthode qu'elle fut longtemps appliquée sans susciter une théorie distincte, jusqu'à ce que l'abaissement de l'esprit mathématique sous le régime académique inspira sur cette application des scrupules empiriques, d'après lesquels on recourut à la série qui règle les accroissements. Rattachée au principe infinitésimal, la distinction accessoire entre le maximum et le minimum doit naturellement exiger la considération des différentielles secondes. Alternativement passée de l'additif au soustractif, ou réciproquement, suivant qu'elle traverse le

maximum ou le minimum, la différentielle première oblige la seconde dérivée à devenir soustractive dans un cas, additive pour l'autre.

Mais cette théorie fait ainsi surgir une hypothèse exceptionnelle, où la seconde dérivée s'annulerait en même temps que la première. Alors la règle exige un complément, qui doit abstraitement émaner de la loi des accroissements, à moins d'y suppléer par l'inspiration géométrique. D'après la troisième dérivée, on reconnaît que l'état exceptionnel diffère du maximum et du minimum, si celle-ci ne devient pas nulle en même temps que les deux autres : on complète l'appréciation en considérant l'image, qui marque une inflexion parallèle à l'axe. Recourant à la dérivée du quatrième ordre, on distingue le minimum du maximum suivant qu'elle devient additive ou soustractive : les exceptions plus prononcées qui résulteraient de son annulation simultanée exigeraient de pareils examens envers les dérivées suivantes. Étendue ainsi, la méthode acquiert une complication mal compensée par une plénitude toujours insuffisante, mais inutile dans une recherche où la principale difficulté consiste à discerner les valeurs qui doivent subir une discussion spéciale, assez dirigée par le caractère primitif.

Instituée pour une seule variable indépendante, la théorie de l'état maximum ou minimum peut directement convenir à plusieurs, en considérant que si toutes, sauf une, avaient déjà reçu les valeurs convenables, celle-là devrait séparément remplir la condition commune. Nous pouvons toujours caractériser l'état extrême par la station infinitésimale, d'où résulte une constante annulation de la différentielle totale, en ayant convenablement égard à l'indépendance des variables, qui la décompose en autant d'équations que chaque cas offre d'inconnues. Sous cet aspect, on détermine les valeurs qui conviennent à l'état maximum ou minimum en annulant toutes les dérivées partielles de la

formule collective. Pour développer le caractère du second ordre, on ramène à l'unité la pluralité des variables, en rapportant toutes leurs différentielles à l'une d'elles d'après les dérivées qui doivent finalement rester indéterminées, d'où résultent de nouvelles conditions accessoires. Il faut normalement compléter cette théorie en rattachant à l'indépendance des variables le cas où celles-ci seraient mutuellement liées par une ou plusieurs équations, dont les premiers membres devraient alors s'adjoindre à la formule proposée avec des multiplicateurs indéterminés. Ramenée à l'indépendance, la formule peut toujours fournir, en annulant toutes ses dérivées partielles, autant de relations que la solution en demande, y compris les conditions données, sans le concours desquelles on ne saurait déterminer les facteurs introduits. Éliminés d'un tel système, ces auxiliaires feront finalement surgir, d'une manière moins directe mais plus libre, les équations que l'on aurait d'abord obtenues envers les variables restées vraiment indépendantes, si toutes les autres leur avaient été convenablement rapportées.

La dernière leçon du préambule abstrait de la géométrie différentielle doit finir en appliquant le calcul infinitésimal à l'évaluation des symboles exceptionnellement indéterminés. Il faut aussi préparer cette appréciation en jugeant les ressources spontanées de l'algèbre ordinaire envers une recherche que ses premiers pas ont souvent suscitée. Naturellement bornée aux formules décomposables en facteurs, la méthode élémentaire pour l'évaluation d'une fraction dont les deux termes deviennent simultanément nuls consiste à les dégager du commun diviseur qui produit cet incident. Elle ne pourrait s'étendre aux fractions compliquées de radicaux, que si tous étaient susceptibles d'élimination d'après des transformations spéciales, qui sont rarement possibles. A l'égard des formules composées des deux derniers couples algébriques, l'algèbre ordinaire ne fournit

aucun mode, et l'évaluation resterait toujours subordonnée à l'étude directe de chaque cas, si la différentiation ne faisait spontanément surgir un procédé général.

Dans une telle application, directement conforme à l'institution leibnitzienne, il suffit de considérer que l'état infiniment voisin coïncide avec la fraction primitive, pour toutes les valeurs qui rendent ses deux termes simultanément nuls. Elle devient alors égale à celle que forment les dérivées de ses deux termes, et qui doit ordinairement dissiper l'équivoque, à moins que la même anomalie ne s'y reproduise. Convenablement examinée, cette dernière exception exigera l'intervention redoublée de la même règle, jusqu'à ce qu'on parvienne à des dérivées qui ne soient pas simultanément annulées. On peut mieux apprécier combien une telle application convient au calcul des relations indirectes, en remarquant qu'il est aussi propre à l'accomplir d'après les conceptions accessoires sur les fluxions et les dérivées, malgré leur infériorité générale. Rien ne saurait pourtant garantir le succès constant de l'évaluation, qui devra quelquefois exiger la discussion directe et spéciale de la formule dans le voisinage du cas exceptionnel.

Étendue aux autres symboles d'indétermination, la méthode différentielle n'y peut naturellement convenir que d'après leur réduction, toujours possible, au type fondamental, seul immédiatement accessible aux transformations normales. Pour évaluer une fraction dont les deux termes deviennent simultanément infinis, il suffit de la remplacer par le rapport inverse de leurs réciproques, ce qui fait finalement surgir une règle identique à celle du cas primitif, malgré l'opposition des deux états. Relativement aux produits où l'un des facteurs s'annule quand l'autre est infini, leur évaluation peut également rentrer dans chacun des types précédents, en changeant l'un quelconque des multiplicateurs en diviseur, d'après sa réciproque. On doit

aussi ramener au cas fondamental, suivant la même transformation, le symbole, plus complexe, où l'indétermination concerne une différence dont les deux parties deviennent simultanément infinies. Une autre préparation convient aux anomalies qui résultent des derniers couples algébriques, surtout quand l'exposant et la base d'une exponentielle sont à la fois nuls ; alors on revient au type extérieur à l'aide du logarithme népérien. Voilà comment tous les modes d'indétermination peuvent normalement rentrer dans le plus simple et le plus usuel, conformément à l'équivalence nécessaire des aspects quelconques d'une telle anomalie. Étudiées successivement, les applications algébriques du calcul infinitésimal complètent le préambule abstrait de la géométrie différentielle, dont les huit leçons concrètes doivent maintenant terminer le cinquième degré de la Logique.

A la première de ces leçons directes appartient la triple théorie des tangentes, des plans tangents, et des asymptotes, qui constitue l'application la plus spontanée et la plus ancienne du calcul infinitésimal. Rattachée à la considération des racines égales par le fondateur de la géométrie générale, elle est mieux accessible à l'algèbre ordinaire qu'aucune des études géométriques dont la systématisation exige l'algèbre transcendante. Mais les méthodes élémentaires qu'elle suscita restaient toujours bornées aux équations composées des trois premiers couples algébriques, et préalablement débarrassées des radicaux, ou même des fractions, d'après des transformations habituellement pénibles et souvent impraticables. Constitution concrète.

Créée pour éviter ces préparations, la théorie différentielle des tangentes ne pouvait d'abord avoir en vue les équations formées des deux derniers couples, que sa pleine généralité fit spontanément aborder quand ils furent normalement introduits. Regardant la tangente comme une sécante infinitésimale, elle

représente son coefficient angulaire, dans les courbes planes, par le rapport différentiel des coordonnées rectilignes du point de contact. Étendue aux lignes quelconques, cette détermination s'accomplit de la même manière, puisque les projections de la tangente touchent celles de la courbe. Exprimés d'après le mode algébrique le plus général, suivant la règle propre au second degré d'implicité, les deux coefficients angulaires de la tangente font alors surgir la formulation par les équations de deux plans dont chacun ne dépend que de la surface correspondante. Reconnue ainsi convenir à toutes les courbes de cette surface, cette équation, isolément considérée, devient celle de l'ensemble de leurs tangentes, c'est-à-dire du plan tangent, avec des coefficients angulaires égaux aux deux dérivées partielles de l'ordonnée dépendante.

Telle est la liaison naturelle entre les deux théories de la tangente et du plan tangent, dont l'institution connexe peut aussi surgir de la détermination directe des normales, comme plus courts chemins vers les lignes ou surfaces. Il suffit d'appliquer le caractère différentiel du minimum à la formule des distances, en y supposant la dépendance des coordonnées de l'un des points conforme à son siège spécial. Convenablement appréciées envers l'autre point, devenu variable, l'équation ou les équations du premier degré résultées de cette différentiation peuvent être directement attribuées à la normale cherchée, dont la propriété de minimum appartient à tous les points par un même site.

Il faut réciproquement expliquer la connexité spontanée entre la théorie des tangentes ou des plans tangents et celle de l'état maximum ou minimum en déduisant celle-ci de celle-là, surtout à l'égard d'une seule variable. Nous pouvons, en coordonnées rectilignes, regarder le maximum et le minimum comme géométriquement caractérisés par le parallélisme de la tangente envers l'axe ; ce qui reproduit la loi sur l'annulation

de la dérivée, et représente la disposition stationnaire. Dans le minimum, l'inclinaison de la tangente passe de l'obtus à l'aigu, tandis que le maximum produit le passage inverse : en sorte que, si l'on construit la courbe resultée du coefficient angulaire elle traversera différemment l'axe aux points correspondants à ces deux états. Une telle considération suffit pour faire directement surgir le caractère accessoire du second ordre, et même indiquer les cas exceptionnels, où la courbe dérivée toucherait l'axe au lieu de le couper, par suite d'une inflexion de la courbe primitive. Cette institution concrète de la théorie du maximum et du minimum comporte les mêmes prolongements que son élaboration abstraite, en introduisant la suite des courbes auxiliaires qui susciteraient les dérivées successives. Il est d'ailleurs possible d'apercevoir ainsi des restrictions qui, faute d'image, restent abstraitement confuses, ou même échappent entièrement. Relativement aux courbes susceptibles de rebroussement sans discontinuité, la figure indique l'état maximum ou minimum en des points où la tangente, au lieu d'être parallèle à l'axe, s'y trouve perpendiculaire, en sorte que la dérivée y devient infinie.

Vue dans son ensemble, la théorie des tangentes ou des plans tangents comprend une suite de modifications graduellement résultées du cas fondamental, où la règle est directement relative au point de contact. Il faut le déterminer, d'après la direction de la droite ou du plan, en combinant les conditions propres aux coefficients angulaires avec l'équation de la courbe ou de la surface. Voilà comment on peut aussi formuler la tangente menée d'un point extérieur, ou le plan tangent qui contient une droite donnée : le problème fournira toujours les équations propres au point de contact, sauf les embarras algébriques d'une inversion ordinairement impraticable. Renversée plus profondément, la même théorie suffit envers un contact

indéterminé, dont la formulation résultera de l'élimination des coordonnées du point entre l'équation de la courbe ou surface et les expressions des coefficients, tant linéaires qu'angulaires, de la droite ou plan. Exécuté convenablement, ce calcul permettra de formuler la recherche de la tangente commune à deux courbes ou du plan qui touche à la fois trois surfaces ; suivant une marche logiquement satisfaisante, mais scientifiquement illusoire.

Étendue aux coordonnées polaires, la théorie des tangentes s'y peut aisément adapter, en appliquant à l'expression rectiligne du coefficient angulaire la règle générale des transformations différentielles, d'après la corrélation algébrique des deux systèmes. Toutefois, il est alors préférable de rapporter la direction de la tangente au rayon plutôt qu'à l'axe, en transformant le résultat ainsi trouvé, dont la nouvelle forme pourrait directement émaner de la méthode infinitésimale, avec autant de facilité que dans le type primitif. Étudiée ainsi, la loi polaire des tangentes aux courbes planes consiste en ce que leur inclinaison sur les rayons correspondants a pour tangente trigonométrique le rapport entre le rayon et sa dérivée.

Relativement aux applications déterminées de la théorie des tangentes et des plans tangents, il faut normalement signaler aux jeunes disciples de l'Humanité deux cas importants, l'un spécial, l'autre général. On peut ainsi caractériser la spirale logarithmique d'après l'obliquité constante de sa tangente vers son rayon ; ce qui range le cercle dans ce genre de courbes, quand cet angle devient droit, de manière à rendre constant le rayon croissant ou décroissant sous une inclinaison moindre ou plus grande. Bien apprécié, ce rapprochement doit abstraitement prévaloir envers la ligne plane uniformément courbée, où l'institution du dernier couple d'éléments algébriques suppose une infinité de circonvolutions, devenues exactement identiques

lorsque cette limite est atteinte. Une généralisation complète de l'exemple heureusement choisi, par le créateur du calcul infinitésimal, afin de manifester la supériorité de la théorie différentielle des tangentes envers les équations chargées de radicaux, fait finalement trouver une loi précieuse pour les normales d'une classe de surfaces. Rapprochée de la composition des forces convergentes, elle consiste en ce que, dans toute surface définie par une relation quelconque entre les distances du point décrivant à divers points fixes, la normale suit la résultante de forces dirigées selon ces lignes, et proportionnelles aux dérivées relatives à chaque rayon.

Bien que la théorie des asymptotes rectilignes puisse souvent devenir indépendante de celle des tangentes, une telle manière de l'instituer ne convient qu'aux équations auxquelles celle-ci resta bornée avant le régime infinitésimal. Elle y repose sur la considération de l'asymptote comme une sécante dont les deux intersections sont successivement placées à l'infini, de manière à déterminer d'abord la direction, puis la position. Alors on substitue, dans l'équation de la courbe donnée, la formule générale d'une droite, afin de trouver ses deux coefficients, angulaire et linéaire, d'après l'annulation des deux termes du plus haut degré, ce qui rend infinies deux racines de l'équation relative au point de rencontre. Rapproché du calcul directement propre a formuler un contact indéterminé, celui-ci n'en diffère qu'en remplaçant les deux racines égales par deux racines infinies; conformément à l'analogie fondamentale entre la tangente et l'asymptote concrètement envisagées. Examinées comparativement, les deux conditions algébriques de l'asymptotisme permettent de décomposer la solution en cherchant d'abord le coefficient angulaire, que la première doit isolément contenir, et qui peut séparément résulter de la limite du rapport des coordonnées indéfiniment croissantes.

Il faut normalement opposer l'asymptote et la tangente, en faisant respectivement émaner leurs directions d'une sécante dont l'intersection mobile s'est infiniment écartée de la rencontre fixe ou pleinement confondue avec elle. Sous cet aspect, chaque point d'une courbe plane comporte deux droites remarquables, l'une tangente, l'autre parallèle à l'asymptote ; la première convient à toutes les figures, la seconde n'appartient qu'aux lignes indéfinies, y compris les cas de non-asymptotisme. Si le contraste entre ces deux limites semble d'abord interdire toute assimilation des asymptotes aux tangentes, il suffit de considérer que la direction mobile se rapproche de la direction fixe à mesure que leur commune origine s'éloigne, de manière à finir par coïncider. Une telle analyse de leur comparaison explique la conception de l'asymptote comme une tangente dont le point de contact s'écarte à l'infini, de façon à maintenir l'égalité caractéristique entre les racines, infinies ou finies, qui concernent l'intersection. Explorée ainsi, la recherche des asymptotes consiste à déterminer quelles valeurs acquierrent les coefficients, angulaire et linéaire, de la tangente quand les coordonnées du point de contact y deviennent infinies : le premier reste toujours fini ; si le second ne l'est pas, la courbe n'a point d'asymptote.

Chez les courbes susceptibles d'asymptotes rectilignes, l'asymptotisme peut toujours devenir mutuel, en les plaçant de manière à confondre les droites correspondantes. Habituellement indéterminé, ce problème ne saurait jamais fournir que deux conditions envers les paramètres arbitraires de l'un des types pour identifier les coefficients, angulaire et linéaire, des deux asymptotes, préalablement rapportés aux constantes de chaque équation. Étudié directement, l'asymptotisme mutuel peut être souvent exprimé, même entre des courbes dépourvues d'asymptotes rectilignes, quand on parvient à former l'é-

quation finale de leur intersection, afin d'y supposer deux racines infinies, comme envers la ligne droite. Relativement aux degrés supérieurs d'asymptotisme, analogues à ceux ci-dessous institués pour les contacts, la même marche conviendrait, en rendant infinies autant de racines que le cas l'exigerait. Il faut finalement regarder ces spéculations comme essentiellement oiseuses, puisque les asymptotes rectilignes peuvent seules perfectionner l'étude des courbes correspondantes, ainsi qu'à l'égard des diamètres.

Historiquement envisagée, la théorie de la courbure plane fut spécialement instituée avant le calcul infinitésimal, quoiqu'il soit dogmatiquement nécessaire à sa constitution générale. Appréciée convenablement, elle caractérise le principal et dernier résultat de l'incomparable demi-siècle qui sépare et réunit le principe cartésien et la conception leibnitzienne. Rattachant le meilleur perfectionnement du plus éminent des arts mathématiques au progrès le plus décisif de la théorie du mouvement curviligne, le grand géomètre batave se trouva graduellement conduit à fonder la plus élevée des doctrines propres aux courbes planes. Dans un enchaînement d'efforts scientifiques, à jamais resté sans exemple, il institua, par une application caractéristique, la conception générale d'après laquelle la courbure d'une ligne peut toujours être, en chaque point, comparée à celle du cercle qui la représente le mieux. Il faut peu rattacher ce pas capital aux germes insuffisants que le second géomètre de l'antiquité fit spontanément surgir de la comparaison des normales consécutives. Examinés convenablement, ces premiers efforts avaient seulement déterminé le centre de courbure d'une section conique au sommet, en fixant la limite des intersections d'une normale avec l'axe. Si ce préambule doit spécialement confirmer qu'aucune théorie n'est entièrement dépourvue d'antécédents, sa restriction et sa stérilité ne permettent

pas de supposer qu'il ait essentiellement facilité la conception moderne.

Appréciée suivant le mode le plus direct, la courbure se mesure d'après le rapport entre l'angle de deux tangentes consécutives et la longueur de l'élément correspondant. Calculé pour les coordonnées rectilignes ou polaires, ce rapport résulte du coefficient angulaire de la tangente convenablement différentié de manière à susciter les secondes dérivées, ainsi pourvues d'une signification géométrique. Une conception moins directe, mais plus féconde, consiste à déterminer, en chaque point de toute courbe plane, le cercle, justement qualifié d'*osculateur*, qui la touche plus qu'aucun autre, comme ayant avec elle deux éléments communs. Mais, le centre de courbure devenant ainsi l'intersection de deux normales infiniment voisines, la comparaison de ce mode au précédent manifeste leur équivalence nécessaire, en montrant que le rayon de courbure représente le rapport de l'élément à l'angle de contingence. Estimé de cette manière, il résulte, d'après la formule des distances, de la détermination des coordonnées du point commun aux deux normales, dont la seconde émane de la première par une différentiation qui reproduit l'introduction géométrique des secondes dérivées.

Tels sont les deux modes équivalents qui mesurent la courbure plane en combinant les deux premières dérivées, suivant une loi toujours indépendante de la situation, quoique ses éléments en soient affectés. Examinée comparativement dans les différents points d'une même ligne, la courbure y présente des diversités dont l'ensemble devient nettement appréciable d'après une figure auxiliaire, que le second mode peut seul instituer. Telle est la destination de la *développée*, qui, passant par tous les centres de courbure, touche toutes les normales de la ligne primitive, et fournit des arcs comparables aux rayons oscula-

teurs. Elle peut toujours être formulée en éliminant les coordonnées initiales entre l'équation donnée et les expressions correspondantes des coordonnées du centre. Sa considération a plus d'importance historique que d'efficacité dogmatique, en caractérisant un troisième mode sous lequel fut d'abord instituée la théorie de la courbure, d'après la conception directe de toute figure comme résultée du déroulement d'une autre.

On exagérerait l'utilité scientifique des développées en la jugeant par les cas qui concernent la cycloïde et la spirale logarithmique, où la développée devient exceptionnellement identique ou semblable à la développante. Bien appréciées, ces exceptions peuvent cependant caractériser l'aptitude secondaire de cette théorie à faciliter les rectifications, puisque le rayon de courbure de la développante doit indirectement mesurer la longueur de la développée, alors rectifiée sans intégration. Rarement la développée est assez simple pour que cette relation puisse réellement procurer des résultats dignes d'attention, et même pour que la construction d'une telle courbe remplace ou résume la discussion abstraite du rayon ou rapport correspondant. Appréciée systématiquement, la notion des développées doit surtout conserver une utilité logique, en suscitant la conception des courbes enveloppes, ainsi surgie chez le créateur du calcul infinitésimal, et convenablement généralisée chez le plus philosophe des grands géomètres. Remplaçant l'ensemble des normales par celui des rayons réfléchis ou réfractés suivant une loi suffisamment simple, on institue de nouvelles courbes auxiliaires qui peuvent logiquement lier les développées aux enveloppes, en diversifiant les droites génératrices et tangentes.

Convenablement envisagées, la développée et les caustiques résultent des positions consécutives d'une droite dont la loi de variation, d'abord définie d'après la figure primitive,

pourrait aussi l'être indépendamment, en formulant la droite avec un paramètre arbitraire. Alors on est conduit à généraliser cette conception en remplaçant la droite par une courbe quelconque, qui, d'après une constante indéterminée, prendrait une suite de positions, dont les intersections continues détermineraient l'enveloppe, ainsi tangente à toutes les enveloppées. Nous pouvons toujours former son équation en éliminant le paramètre variable entre celle des enveloppées et sa dérivée envers lui, ce qui suscite un nouvel aspect différentiel, dont la qualification rappelle l'aptitude du philosophe germanique à perfectionner autant le discours que la pensée. Afin de compléter cette doctrine après l'avoir généralisée, le plus éminent des théoriciens spéciaux institua le problème inverse, où, l'enveloppe étant donnée, ainsi que la nature des enveloppées, on cherche leur loi de succession, caractérisée par la corrélation de deux constantes arbitraires. La solution peut-être normalement simplifiée en considérant cette recherche comme identique à la formulation d'un contact indéterminé, soit d'après la coïncidence des tangentes, soit en appliquant, avec opportunité, le principe des racines égales, surtout envers des enveloppées rectilignes.

Objet total de la seconde leçon directe de géométrie différentielle, la théorie de la courbure plane doit aussi remplir la leçon suivante, essentiellement consacrée au complément général qu'elle sucita, chez le plus philosophe des grands géomètres, sur la systématisation des divers contacts. Rattachée aux bases algébriques qu'il s'était artificiellement imposées, cette systématisation doit être normalement améliorée en la subordonnant à la conception infinitésimale, dont il a vainement espéré la désuétude. Nous n'y pouvons historiquement regarder l'emploi de la série d'accroissement que comme propre à stimuler un tel génie pour reconstruire, en temps opportun, la

théorie de la courbure d'après la seule considération des dérivées. Affranchie de tout scrupule factice, la raison finale doit dogmatiquement préférer le mode le plus simple, le plus fécond, et même le plus direct, quoiqu'il ait tardivement surgi, faute des impulsions convenables. Ralentie par les habitudes scientifiques, la conception générale des divers ordres de contact pouvait immédiatement émaner du principe infinitésimal, si l'on avait assez utilisé la préparation philosophique naturellement résultée de la comparaison entre la tangente et le cercle osculateur.

Nous devons historiquement regarder ce contraste comme la source spontanée de la substitution finale du relatif à l'absolu dans la notion fondamentale du contact, toujours caractérisée par la coïncidence des points communs, que l'intersection laisse distincts. Après avoir reconnu que le cercle peut davantage toucher que la ligne droite, puisqu'il permet de confondre trois intersections au lieu de deux, on prévoit qu'une courbe où le nombre de points déterminant s'élèverait à quatre comporterait un rapprochement plus intime. Voilà comment le principe infinitésimal fait graduellement surgir la conception directe des divers contacts, toujours définis suivant le nombre des points finalement confondus ou des éléments communs. Alors ils peuvent être normalement formulés en égalant les différentielles respectives jusqu'à l'ordre correspondant, puisqu'elles ne doivent naturellement dépendre que des ordonnées ainsi comparées. L'introduction finale des dérivées est seulement destinée à compléter l'élimination infinitésimale, comme dans tous les autres cas où les conditions se bornent aux rapports différentiels.

Fondée sur la théorie des contacts, l'étude de la courbure semblerait d'abord comporter un perfectionnement indéfini, d'après la comparaison successive à des types dont l'intimité

croissante compenserait la complication graduelle, mesurée par le nombre de points déterminant. Rationnellement appréciée, cette faculté se réduit à reconstruire, sous un meilleur aspect, la doctrine du cercle osculateur, ainsi devenue plus philosophique, en perdant son caractère primitivement absolu pour rester finalement relative. Alors l'identification des deux premières dérivées du cercle avec celles de la courbe donnée fait aisément trouver le centre et le rayon de courbure, surtout en coordonnées rectilignes, d'où l'on passe aux polaires. Généralement définie comme le siége de tous les centres, la développée laisse ainsi surgir sa propriété caractéristique envers les normales primitives, sans qu'on doive algébriquement reproduire sa loi de rectification, géométriquement résultée de ce lien. Il faut finalement destiner le cercle osculateur à faire autant connaître la courbure que le permet une comparaison purement circulaire. La comparaison avec la parabole ou l'ellipse, qui comporterait un contact du troisième ou quatrième ordre, produirait un perfectionnement toujours illusoire, faute d'une suffisante connaissance du type introduit. Le besoin d'uniformité dans la figure choisie pour juger des autres ne laisse finalement réalisée que deux degrés d'appréciation géométrique, l'un du premier ordre, l'autre du second, d'après l'assimilation de toute courbe, d'abord à la ligne droite, puis au cercle.

La théorie générale des contacts comporte un supplément normal envers les points exceptionnels où l'ordre naturel d'osculation se trouve seulement augmenté d'une unité, d'après un choix convenable de l'ordonnée correspondante. Une nouvelle différentiation peut alors fournir l'équation propre à déterminer le point singulier, après avoir d'abord éliminé toutes les constantes du type. Tel est l'aspect sous lequel la formulation des inflexions, primitivement rattachée au rayon de courbure, doit finalement rentrer dans la théorie des contacts, en cherchant la

droite exceptionnellement susceptible de toucher au second degré. Toutefois, la principale importance de ce supplément consiste à déterminer une espèce de points singuliers inconnue avant la régénération positiviste, en trouvant le cercle qui comporte un contact du troisième ordre. Exprimé d'après l'identification des trois premières dérivées, le caractère correspondant est ainsi reconnu coïncider avec celui des points de plus grande ou moindre courbure, en les formulant d'après la loi rectiligne du rayon osculateur.

Il faut normalement regarder les points singuliers qui résultent du cercle comme plus importants, et même plus fréquents, que ceux dont la ligne droite fournit la source ; car ils doivent toujours exister dans les courbes fermées, et souvent parmi les autres. Nous pouvons donc demander que le rapprochement qui fonde leur principale efficacité ne reste pas motivé d'après une coïncidence purement algébrique, entre la condition du maximum de courbure et celle du triple contact circulaire. Afin que cette coïncidence soit géométriquement expliquée, il faut la rattacher à la distinction accessoirement résultée de la théorie générale des contacts sur la disposition de la courbe osculatrice envers la figure étudiée. Nous devons toujours regarder les deux lignes comme se traversant ou se touchant, suivant que leur contact est d'ordre pair ou d'ordre impair. Examiné sous cet aspect, le cercle de plus grande ou moindre courbure doit naturellement offrir le troisième degré d'intimité, pour que la courbe le laisse du même côté dans ses deux régions, afin que le rayon puisse reprendre d'égales longueurs, quoique sans symétrie.

Tel est le mode suivant lequel la troisième leçon concrète de géométrie différentielle perfectionne et complète la théorie de la courbure plane, en rendant sa constitution plus philosophique. Une équivalente appréciation doit convenablement s'étendre,

dans la leçon suivante, aux courbes justement qualifiées comme offrant une double courbure, quoique cette dénomination confonde des figures plus différentes les unes des autres que toutes ne le sont de la classe fondamentale. Toutefois, cette apparente confusion fait spontanément ressortir la prépondérance nécessaire du point de vue subjectif sur les distinctions objectives dans la constitution normale de la géométrie abstraite. On doit toujours réunir les courbes non planes d'après le seul caractère positif qui leur soit commun, parce qu'il concerne l'unique question subjectivement importante envers ces lignes. Rapprochées du cas plan, elles n'en sauraient aucunement comporter l'efficacité logique, ni même offrir autant d'intérêt scientifique : en sorte que, quoique infiniment plus multipliées, leur étude mérite beaucoup moins d'extension.

Dans les courbes à double courbure, la théorie générale des contacts n'exige aucune explication nouvelle, soit qu'on l'y conçoive directement, soit qu'on l'y ramène au cas plan, à l'aide des projections habituelles, qui doivent respectivement offrir la même intimité que les figures correspondantes. Une duplication spontanée du nombre des conditions propres à l'identification des dérivées est alors compensée par celle du nombre des constantes disponibles ; en sorte que l'ordre d'osculation reste toujours réglé suivant le nombre de points déterminant du type adopté. Déjà les développées se trouvent essentiellement dépourvues d'utilité spéciale envers la plupart des courbes planes. A plus forte raison, leur appréciation serait-elle toujours illusoire pour les courbes à double courbure. Réduite aux notions vraiment usuelles, l'extension finale de la théorie de la courbure plane peut normalement résulter du mode le plus simple et le plus naturel, où le rayon est remplacé par le rapport de l'élément à la flexion.

Avant tout, il faut directement instituer le préambule propre

aux courbes à double courbure, en y déterminant le *plan osculateur*, qui, dans chaque point, permet d'envisager la ligne comme plane, pour la comparaison de deux éléments consécutifs. Ce plan devant toujours passer par trois points infiniment voisins de la courbe donnée, ses trois constantes se déterminent d'après la combinaison de sa propre équation avec ses deux premières différentielles, en y regardant les dérivées comme relatives à cette ligne. Il importe de simplifier les formules ainsi trouvées pour les deux coefficients angulaires du plan osculateur, en y supposant uniforme l'accroissement de la variable indépendante, quoique cela les rende moins symétriques. Elles deviennent indéterminées aux points d'inflexion d'après l'annulation des secondes dérivées, comme l'y demande la coïncidence entre l'un des deux éléments et le prolongement de l'autre. Si la courbe proposée était plane, les formules se trouveraient finalement indépendantes de l'ordonnée restée arbitraire, et leurs valeurs constantes détermineraient le plan de la ligne, alors caractérisée par une identité relative aux trois premières dérivées.

Nous pourrions, à l'aide du plan osculateur, transporter aux figures quelconques la formule propre au rayon de la courbure plane. Une telle extension résulterait de la faculté de remplacer la ligne proposée par sa projection sur son plan osculateur ; ces deux courbes ayant deux éléments communs, leur flexion doit être la même. Il faudrait alors rapporter la figure à trois axes dont l'un serait perpendiculaire au plan osculateur et les deux autres dirigées suivant la tangente et la normale, en annulant l'ordonnée extérieure au plan. Regardant comme inutile la recherche de la développée, et même la détermination du centre de courbure, on peut alors éviter la double tranformation que ce projet exigerait, en se bornant à formuler la courbure plane d'après le rapport de l'élément à la flexion. Estimé

dans le triangle résulté de la projection du second élément sur le prolongement du premier, ce rapport s'exprime par celui du carré de la différentielle première de l'arc à la racine carrée de la somme des carrés des différentielles secondes des trois coordonnées moins celui de celle de l'arc.

Généralement surchargée de variables, cette formule, dont la simplicité n'est qu'apparente, a toujours besoin qu'on y rapporte l'arc aux coordonnées, à moins de lui subordonner leurs variations ; ce qui, rarement convenable, exigerait une équivalente préparation. En conservant les quatre variables, on peut utilement compléter la détermination en tirant, de la même construction infinitésimale, la loi relative à la direction de la normale, estimée suivant l'arc qui rabat le second élément sur le prolongement du premier. Nous pouvons toujours mesurer cet arc en multipliant l'élément par la flexion, comme nous venons de le faire pour calculer le rayon. Tous les côtés du triangle isocèle ainsi construit étant projetés sur l'un quelconque des axes, la projection de cette base équivaudra, d'après la règle ordinaire, au produit de l'élément par la différentielle du cosinus de l'angle qu'il forme avec cet axe. Il est directement évident que ce cosinus équivaut au rapport entre la différentielle de l'ordonnée correspondante et celle de l'arc, puisque l'une mesure la projection de l'autre. Les cosinus des inclinaisons de la normale sur les trois axes sont donc équivalents aux produits du rayon de flexion par les dérivées envers l'arc des rapports des différentielles des coordonnées à celle de l'arc. Si l'on a convenablement égard à la relation générale des trois angles, on reproduit la formule ci-dessus assignée au rayon : en sorte que toutes les notions sur la courbure plane se trouvent ainsi condensées, y compris le plan osculateur, où la normale se combine avec la tangente.

Étudiée philosophiquement, la théorie des courbes à double

courbure ne suscite des conceptions vraiment nouvelles qu'envers la *torsion* qui les caractérise, et dont l'appréciation fait naturellement surgir la représentation des troisièmes dérivées, puisqu'il y faut comparer trois éléments. Pour amener cette comparaison à l'état binaire, seul normal, il suffit d'employer le plan osculateur, où deux éléments sont déjà combinés. Étudié consécutivement, il permet de mesurer la seconde courbure par le rapport de l'élément à la torsion, estimée d'après l'inclinaison de deux plans osculateurs infiniment voisins. Exprimé communément sous le nom de rayon, ce rapport ne devrait pas être ainsi qualifié, suivant une extension illusoire, si cet usage ne se trouvait finalement fondé sur un meilleur motif. Sa formulation résulte du plan osculateur, en y puisant les cosinus de ses obliquités vers les axes, pour que leur différentiation permette d'estimer la torsion, suivant la loi qui subordonne l'inclinaison des deux plans aux angles que chacun d'eux forme avec trois axes rectangulaires.

Relativement à la seconde courbure, on doit normalement préférer la conception, surgie du positivisme, où son appréciation dépend de la *sphère osculatrice*, qui passe par quatre points infiniment voisins. Une telle surface peut toujours se déterminer en différentiant trois fois l'équation générale de la sphère, et regardant toutes les dérivées comme relatives à la courbe donnée. Par cette institution, la torsion comporte autant que la flexion la considération d'un rayon, aussi convenable à la sphère qu'au cercle. Toutes les notions propres aux deux courbures se trouvent ainsi condensées dans deux conceptions essentiellement analogues, en regardant une ligne quelconque, en chaque point, d'abord comme plane, puis comme sphérique. Il faut finalement combiner ces deux notions en considérant le cercle de flexion comme résulté de l'intersection de la sphère de torsion par le plan osculateur ; en sorte

que son centre et son rayon sont les projections de ceux de cette sphère sur ce plan.

Si l'on veut substituer à cet ensemble un résumé direct d'après une pensée unique, on peut simultanément apprécier les deux courbures en déterminant l'hélice osculatrice, qui, joignant quatre points infiniment voisins, représente à la fois la torsion et la flexion. Afin de la formuler, on différentie trois fois les équations générales de l'hélice, préalablement déduites de son type le plus simple à l'aide d'une transposition d'axes convenablement indéterminée, qui suscite trois constantes angulaires et trois linéaires, outre le rayon et le pas. Nous devons seulement instituer cette formulation, puisque la détermination des huit constantes exigerait de pénibles calculs, qui conduiraient à des règles finalement impraticables, même en évitant les difficultés algébriques par des artifices géométriques. Une telle conception est philosophiquement destinée à résumer autant que possible l'ensemble des notions propres aux deux courbures, en les condensant sur un type non moins uniforme que la ligne droite et le cercle quoique plus compliqué. Sa figure pourrait aisément devenir assez familière, malgré sa double variation, pour que la comparaison fût théoriquement efficace, si l'imperfection de l'algèbre ne devait pas faire toujours avorter un tel dessein.

Faute d'un type convenable, la courbure des surfaces, objet des cinquième et sixième leçons directes de géométrie différentielle, ne saurait être autant appréciée que celle des lignes, quoique la doctrine des contacts s'y puisse également adapter, d'après son institution infinitésimale. Il faut normalement subordonner à cette considération, seule commune aux trois cas de courbure, toutes les notions qui les distinguent, surtout en comparant les deux extrêmes. Bien que le nombre de points infiniment voisins qui sont communs aux deux figures définisse

toujours les divers degrés de contact, sa formulation offre, dans les surfaces, une différence capitale, nécessairement résultée de la pluralité des variables indépendantes. Rattachée aux différentielles proprement dites, la théorie ne semble d'abord exiger aucune modification, puisque chaque sorte d'intimité se trouve encore exprimée par l'identification des différentielles jusqu'à celles de cet ordre. Elle ne manifeste une nouvelle condition que dans l'élimination définitive des infinitésimales, pour rapporter la formulation aux dérivées, seules immédiatement calculables.

Alors la dualité des variables indépendantes oblige chaque identification des différentielles à se décomposer en autant d'identifications de dérivées qu'en fournit l'ordre correspondant, afin que le contact soit le même en tous sens. Pour le premier degré, la nouvelle loi ne suscite aucune distinction, puisque l'accroissement du nombre des dérivées se trouve exactement compensé d'après celui des constantes angulaires, en sorte que le plan est aussi tangent que la droite. Par rapport au second ordre, où la sphère remplace le cercle, l'osculation exige six conditions au lieu de trois, tandis que le nombre des paramètres ne passe que de trois à quatre. Examinée directement, cette rupture d'harmonie indique qu'une surface ne peut autant s'assimiler à la sphère qu'une ligne au cercle, sauf dans les points exceptionnels où l'identification d'une des secondes dérivées suffirait pour produire celle des deux autres. La difficulté ne saurait convenablement disparaître qu'en adoptant un type plus compliqué, qui devrait pourtant émaner aussi des corps ronds proprements dits.

Mais le cylindre reste encore dépourvu d'une suffisante aptitude, puisque sa détermination n'exige que cinq points ; ce qui ne lui permet pas de satisfaire à toutes les conditions d'un contact du second ordre, sauf, comme la sphère, quoique moins,

envers des lieux exceptionnels. Examiné convenablement, le cône pourrait normalement remplir cet office ; car le nombre de points déterminant y parvient à six, suivant la première théorie, abstraite et concrète, de géométrie subjective. Nous pourrions donc déterminer, en différentiant deux fois son équation générale, le sommet, l'axe, et l'angle, du cône pleinement osculateur, auquel la surface donnée serait, en tous sens, assimilable, autant que le comporte un contact du second ordre. Sa formation, quoique plus compliquée que celle de la sphère, et même du cylindre, deviendrait finalement praticable, si ce projet ne devait pas être irrévocablement écarté, faute d'une suffisante appréciation du type. A la fois dépendante de l'angle général du cône et de la distance spéciale de chaque point au sommet, la forme d'une surface aussi variée ne saurait jamais devenir assez familière pour que la comparaison fît synthétiquement juger la figure étudiée.

Une telle impuissance doit philosophiquement contraster avec celle ci-dessus caractérisée envers les courbes à double courbure, afin de faire spécialement sentir les limites générales, tant objectives que subjectives, du perfectionnement théorique. Notre insuffisance déductive nous empêche de rendre pleinement synthétique la conception d'une ligne quelconque en l'assimilant à l'hélice osculatrice, quoique cette comparaison soit assez simple pour devenir efficace si nous pouvions rationnellement l'accomplir. A l'égard des surfaces, une équivalente condensation nous est inversement interdite par la complication du type extérieur, malgré que le cône osculateur fût théoriquement appréciable. Nous pouvons ainsi reconnaître que nos spéculations réelles se trouvent à la fois entravées d'après la résistance du dehors et l'impuissance du dedans ; ce qui doit mieux développer l'humilité contenue qu'exige notre essor abstrait pour y laisser toujours prévaloir la discipline normale. Il faut

aussi noter, dans ce cas, l'efficacité naissante de cette discipline, qui fait directement écarter comme impraticables deux théories issues du positivisme; tandis que, si leur conception eût précédé le régime systématique, elles auraient longtemps suscité de vains efforts. Motivée sur l'impossibilité d'une vraie synthèse, l'analyse instituée par le plus fécond des grands géomètres envers la courbure des surfaces est irrévocablement incorporée à la constitution concrète de la géométrie subjective. Elle y doit surtout consister dans l'étude comparative des différentes sections normales propres à chaque point d'une surface quelconque.

La sixième leçon concrète de géométrie différentielle est entièrement consacrée à cette appréciation, qui pourrait d'abord résulter de la formule plane du rayon de courbure, en y transposant les axes préalablement confondus avec la normale et la trace de la section sur le plan tangent. On doit finalement préférer la solution directe, où l'on détermine la sphère partiellement osculatrice, d'après une convenable appréciation de la condition différentielle du second degré de contact. Combinée avec les trois qu'exige le premier, cette condition peut toujours s'accomplir en disposant des quatre constantes sphériques, si les deux coordonnées naturellement indépendantes y sont artificiellement liées, de manière à prévenir sa décomposition ordinaire. Alors le rapport différentiel de ces variables devient propre à la section considérée, en indiquant la direction de sa tangente, déterminée par la trace sur le plan tangent. La comparaison générale des courbures doit toujours être algébriquement simplifiée en prenant la normale pour l'un des axes et plaçant les autres dans le plan tangent.

On peut ainsi formuler le rayon osculateur de chaque section d'après une fraction du second degré relativement à son coefficient angulaire, envers lequel les valeurs correspondantes des

trois dérivées du second ordre propres à la surface fournissent des données spécifiques. Nous devons surtout appliquer cette formule à déterminer les deux directions, toujours rectangulaires, qui produisent le maximum et le minimum de la courbure, dont les rayons transforment ces constantes abstraites en paramètres concrets, si l'on place les axes dans ces plans. On peut finalement représenter la comparaison des courbures normales d'après l'identité de cette relation avec l'équation polaire d'une ellipse envers son foyer, en prenant ces rayons pour les deux parties de son grand axe. Rapportées à cette figure, deux sections perpendiculaires entre elles fournissent une somme constante de rayons de courbure, équivalant chacun au rayon elliptique dont l'obliquité serait double. Examinée comparativement, cette peinture exige une hyperbole si les deux sections principales sont courbées en sens contraire : elle devient parabolique quand le rayon maximum est infini.

Si, des sections normales, on veut déduire les sections obliques, chacune d'elles a pour cercle osculateur la trace de son plan sur la sphère partiellement osculatrice qui correspond à sa tangente. Examinée dans les différents points d'une même surface, la courbure, ainsi réduite à dépendre, en tous sens, des deux rayons principaux, suscite une notion complémentaire, relative aux *lignes de courbure*, suivant lesquelles deux normales infiniment voisines se rencontrent. Rattachée à cette définition, leur équation différentielle est aisée à former, mais rarement intégrable; ce qui se trouve heureusement compensé par la facilité de leur détermination directe dans les familles les plus usuelles, cylindriques, rondes, et même coniques. Voilà comment on découvre la coïncidence générale de la direction des deux lignes de courbure propres à chaque point avec celle des deux principales sections normales ; d'où résulte la perpendicularité de chaque ligne de courbure d'un système envers toutes celles de

l'autre. Après avoir complété ce calcul en déterminant le point d'intersection des normales consécutives, il peut conduire à formuler les deux rayons principaux relativement à des axes quelconques, sans accomplir une pénible transposition.

Géométriquement appréciée, cette conception, due au digne adjoint que le calendrier occidental assigne au plus fécond des grands géomètres, résume l'ensemble des notions relatives à la théorie générale de la courbure des surfaces. Elle permet, dans la plupart des cas usuels, de déterminer immédiatement les deux sections principales d'où dépendent, en chaque point, toutes les autres études ; et les lignes qu'elle emploie conviennent à tout leur cours, tandis que ces sections ne servent qu'au lieu correspondant. Rattachant la géométrie objective à la géométrie subjective, ce complément synthétique fit historiquement surgir le premier germe du perfectionnement général que la géométrie différentielle apporte à la théorie fondamentale des familles de surfaces. Modifiée par une racine infinie, la formule ainsi trouvée envers les rayons principaux fournit le caractère différentiel de toutes les surfaces développées. Elles sont collectivement distinguées en ce que, parmi les trois dérivées partielles du second ordre, celle où les coordonnées indépendantes se succèdent est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

Élaborée sous l'impulsion spontanément résultée, en temps opportun, d'un tel début, la constitution algébrique des familles de surfaces fut bientôt perfectionnée, chez son principal législateur, par la conception générale à laquelle appartient la leçon suivante. Bien appréciée, cette conception consiste à caractériser chaque famille d'après une propriété du plan tangent, dont l'une des droites déterminantes, due à la génératrice, convient à tous les cas d'un même groupe, tandis que l'autre, relative à la directrice, est propre à chacun d'eux. Remplaçant

des équations directes mais indéterminées par des équations déterminées quoique indirectes, une telle pensée développe et complète l'institution générale de la géométrie objective, d'abord élémentaire, puis transcendante. Elle en peut aisément lier les deux modes algébriques, en éliminant la relation indéterminée que contient le caractère collectif sous forme finie, à l'aide des deux différentiations séparément relatives à chaque ordonnée indépendante. Il serait normalement possible de faire, réciproquement, surgir l'équation directe de l'équation indirecte, si l'imperfection nécessaire du calcul intégral, surtout à cet égard, ne devait pas rendre toujours illusoire une telle inversion.

Si d'abord on considère les surfaces cylindriques, le plan tangent y doit partout devenir parallèle à la direction commune des génératrices. On peut ainsi caractériser cette famille d'après la constance de la somme de deux multiples fixes des dérivées partielles, envers des axes quelconques. Ce caractère suffit pour reconnaître la nature cylindrique d'une surface spéciale, ou les conditions d'une telle forme, en assignant la direction des génératrices correspondantes. Il est facile d'instituer une théorie analogue envers les cônes quelconques, où le plan tangent doit toujours passer au sommet : en y plaçant l'origine, l'ordonnée dépendante équivaut à la somme des produits des deux autres par les dérivées correspondantes. On peut alors réduire le caractère conique à vérifier s'il existe une origine susceptible d'une telle relation, qui formule l'homogénéité devenue propre à l'équation finie.

Troisièmement, la famille des corps ronds est géométriquement caractérisée par la perpendicularité du plan tangent au plan méridien, ou la rencontre équivalente de la normale avec l'axe de la surface. Rattachée à la formulation du plan tangent ou de la normale, l'équation différentielle de ce groupe peut

être aisément obtenue, quelle que soit la situation des coordonnées rectilignes. Après avoir ainsi formulé ce caractère par une relation toujours du premier degré relativement aux dérivées, il faut le simplifier en confondant l'un des axes coordonnés avec l'axe du corps. Voilà comment toute surface de révolution devient finalement susceptible de fournir des dérivées partielles constamment proportionnelles aux variaples correspondantes. A l'aide d'un tel caractère, directement évident, on pourrait normalement instituer la vérification spéciale de ce type ou ses conditions générales, d'après une transposition d'axes convenablement indéterminée. Il suffirait de déplacer l'origine dans le sens des deux ordonnées indépendantes, et de diriger deux des plans nouveaux parallèlement aux axes correspondants, en n'opérant une pleine généralisation qu'envers la direction du troisième axe. L'équation la plus complète pourrait même être ainsi reproduite en accomplissant, dans la plus simple, les transformations différentielles qui correspondraient à cette transposition ; mais sa formation immédiate est trop facile pour motiver un tel détour.

Il faut enfin étendre la théorie différentielle des familles vraiment usuelles aux surfaces dites *conoïdes*, toujours engendrées par une droite assujettie au parallélisme envers un plan, tandis qu'elle glisse sur un axe. Nous y voyons un type moins prononcé, qui devient géométriquement intermédiaire entre les cylindres et les cônes, auxquels sa formulation peut également s'assimiler. Le caractère différentiel y doit directement résulter de ce que le plan tangent, coupé parallèlement au plan fixe, fournit une droite susceptible de rencontrer l'axe du corps. Exprimée relativement aux meilleures coordonnées, dirigées suivant l'axe et parallèlement au plan du conoïde, cette condition consiste en ce que les deux dérivées partielles sont, au signe près, en raison inverse des variables correspondantes.

Telle est la réduction algébrique que comporte, envers des axes convenables, le contraste géométrique entre cette famille et la précédente.

On pourrait utilement généraliser les définitions de ces deux groupes en supposant d'abord que le cercle générateur d'un corps rond a toujours son centre sur l'axe sans que son plan lui soit perpendiculaire, quoique sa direction reste fixe. Bien institué, le caractère différentiel doit alors résulter de ce que, en chaque point, le plan tangent et le plan passant par l'axe fournissent des traces constamment rectangulaires quand on les coupe parallèlement aux cercles générateurs. Il faut ensuite généraliser les conoïdes en y supposant que l'axe, au lieu d'être rectiligne, prend une figure quelconque, entre autres celle d'une hélice. Cette généralisation est plus facile que la précédente, puisque le caractère différentiel continue d'exprimer que le plan tangent, coupé parallèlement au plan fixe, fournit une droite qui rencontre l'axe correspondant. Examiné pour le cas où l'axe du corps est une hélice autour d'un des axes coordonnés, auquel le plan fixe se trouve perpendiculaire, il consiste en ce que les dérivées sont, au signe près, en raison inverse des différences entre leurs variables et le cosinus ou sinus d'un multiple de l'ordonnée.

Nous ne devons pas exiger que l'équation différentielle d'une famille géométrique soit toujours instituée directement, sans jamais résulter de l'équation finie, qui pourrait quelquefois comporter une formation plus facile. On ne saurait autrement obtenir les caractères différentiels qui conviendraient à des types arbitrairement formulés avec une relation indéterminée. Mais, envers les familles géométriquement définies, il sera toujours possible, et communément préférable, d'instituer d'une manière directe l'équation transcendante, d'après une étude spéciale du plan tangent. Même en composant à volonté des

types différentiels, on pourra, réciproquement, y puiser une appréciation géométrique assez nette pour caractériser la famille, dans les cas suffisamment simples où l'intégration serait pourtant impossible. Élaborés convenablement, à la fin de cette leçon, quelques exemples choisis d'une telle inversion feront mieux sentir, aux jeunes disciples de l'Humanité, l'extension abstraite de la géométrie objective et la portée concrète de son principe différentiel.

Historiquement appréciée, la théorie des *enveloppes*, objet de la huitième et dernière leçon directe de géométrie différentielle, surgit, envers les courbes, chez le créateur de l'algèbre infinitésimale, et fut dignement constituée par le plus philosophe de ses successeurs. Une telle élaboration, ci-dessus caractérisée, doit finalement devenir le préambule normal de la conception générale qui, résumant l'ensemble de la géométrie objective, fournit le meillenr titre de son principal législateur. Mais, afin que son extension définitive soit assez appréciable, il faut d'abord définir le contraste nécessaire que présentent, sous cet aspect, les lignes et les surfaces. A l'égard de celles-ci, l'ensemble des intersections propres aux enveloppées infiniment voisines se formule, comme pour celles-là, d'après l'élimination du paramètre variable entre l'équation primitive et sa dérivée envers lui. Nous pouvons ainsi reconnaître que, dans l'un et l'autre cas, l'enveloppe est nécessairement tangente à toutes les enveloppées, soit en vertu de sa définition, soit à raison de son équation, où la variation du paramètre ne modifie pas la différentiation. Une seule différence fondamentale consiste en ce que, envers les courbes, ce couple d'équations ne détermine qu'un point, qui n'a pas de forme ; tandis que, pour les surfaces, il fournit une ligne, dont la figure affecte le résultat algébrique et géométrique. Si le mode de succession des enveloppées influe encore sur l'enveloppe, elle est surtout

réglée par leur nature, qui, dans le cas primitif, y laissait essentiellement prévaloir l'autre source.

Afin de mieux caractériser cette différence, il faut d'abord noter que, chez les courbes, l'enveloppe peut toujours changer à volonté quoique les enveloppées restent pareilles, pourvu qu'elles se succèdent convenablement ; et, réciproquement, la même enveloppe convient à toutes sortes d'enveloppées. Mais, dans les surfaces, un type renfermant deux constantes arbitraires ne saurait indifféremment fournir une enveloppe quelconque, en instituant entre ces paramètres toutes les relations possibles ; car, si chaque surface contient beaucoup de lignes différentes, il en existe davantage qui n'y conviennent pas. Parmi l'infinité d'enveloppes ainsi résultées des divers modes de succession des enveloppées, la nature de celles-ci se fera toujours sentir, en produisant des caractères, algébriques et géométriques, uniformément communs à tous les cas. Les surfaces issues d'une même souche constitueront une même famille, dont la génératrice sera déterminée par la forme primitive, de manière à devenir rectiligne d'après un plan, circulaire en partant de la sphère, etc. ; le mode de succession n'affectera que la directrice. Elles seront toutes susceptibles d'une même équation finie, contenant une relation arbitraire, et d'une même équation différentielle, indépendante de cette relation.

Bien appréciée, cette manière de concevoir les familles géométriques est nécessairement équivalente à celle qui se trouve assez expliquée dans le chapitre précédent. Rapprochées directement, elles ne diffèrent que par le mode d'institution de la génératrice, qui, d'abord définie immédiatement, doit finalement devenir l'intersection d'un couple infinitésimal des surfaces propres à la contenir. Alors la géométrie objective prend une constitution plus synthétique, qui, sans établir une hiérachie philosophiquement impossible, doit mieux réunir les diverses

familles engendrées par une même ligne, en les faisant toutes émaner d'une souche commune. Voilà comment tous les types collectifs qui furent jusqu'ici considérés, et beaucoup d'autres dont l'appréciation restera toujours inutile, découlent seulement du plan et de la sphère. Examinée ainsi, la conception des surfaces enveloppes condense autant que possible la classification des familles géométriques, et constitue le dernier progrès que comportait l'élaboration fondamentale du principal domaine de la Logique.

Il faut assez préciser et spécifier une telle conception pour faire convenablement sentir la condensation finale de la géométrie objective. Nous devons d'abord considérer l'équation finie de chaque famille, qui se forme en éliminant le seul paramètre resté définitivement arbitraire entre l'équation de la souche correspondante et sa dérivée envers lui. Cette élimination est rarement possible, parce qu'elle doit à la fois concerner la relation indéterminée et sa dérivée, qui, quoique logiquement liées, sont algébriquement distinctes, de manière à ne permettre le succès que d'après un isolement exceptionnel des paramètres à l'égard des coordonnées. Il faut donc reconnaître que l'équation collective serait, sous forme finie, mieux obtenue, dans la plupart des cas, en conservant le mode primitif, où la génératrice se trouve immédiatement formulée, sans résulter d'une différentiation de surface. Toute la supériorité du mode final est essentiellement relative à l'équation différentielle, nécessairement indépendante de la relation indéterminée. Alors elle résulte de l'élimination des deux paramètres propres à la souche commune entre l'équation de ce type et ses deux dérivées partielles envers les coordonnées libres. Rapporté géométriquement au plan tangent, ce caractère collectif indique sa propriété fondamentale chez toutes les surfaces d'une telle famille, en manifestant l'uniforme corrélation de ses deux coefficients angulaires.

La conception des surfaces enveloppes est d'autant plus féconde qu'elle concerne une souche plus abondante en paramètres, ou dont la détermination exige plus de points. Il en résulterait une sorte de hiérarchie, d'ailleurs insuffisante, entre les familles géométriques, d'après le nombre de points déterminant de leurs souches, si ces spéculations ne devaient pas rester toujours bornées aux souches planes et sphériques. Mais la classification géométriques est tellement condensée ainsi que, en partant du plan, elle y peut uniformément rattacher toutes les familles de surfaces rectilignes qui sont susceptibles d'être développées, vu l'intersection continue des génératrices consécutives. Elles y résultent des différentes relations qui peuvent successivement rapporter une des constantes du plan aux deux autres, d'après la condition à laquelle il se trouve assujetti dans son mouvement variable. Rapprochés ainsi du plan, les cylindres ou les cônes en émanent quand sa marche est réglée par le parrallélisme envers une droite ou le passage en un point: on peut même reproduire le caractère des surfaces développables, en différentiant la relation arbitraire des coefficients angulaires.

Examinée envers une souche sphérique, la théorie des surfaces enveloppes comporte une extension supérieure, puisque deux des paramètres y peuvent séparément fournir deux relations indéterminées en s'y rapportant aux deux autres. Si le centre parcourt une ligne donnée, les équations de celle-ci permettront de réduire les constantes de la sphère à deux, dont l'élimination, finie et surtout différentielle, formera le type collectif, où rentrent les corps ronds pour un axe rectiligne. Par l'invariabilité du rayon, la sphère produit une infinité de familles de tubes, canaux ou tuyaux, qui diffèrent entre elles d'après la nature de la surface commune à leurs axes. Il suffit de spécifier cette classification envers le cas plan, où l'on peut directement former l'équation différentielle, en exprimant la con-

stante longueur de la normale correspondante. A d'autres hypothèses sur le mouvement du centre ou la loi du rayon, correspondraient de nouveaux groupes, chacun susceptible de se décomposer, comme les précédents, en une infinité de familles proprement dites, dont la plupart ne sauraient jamais avoir un nom.

Sans insister davantage à cet égard, ces indications suffisent pour faire convenablement sentir, aux jeunes disciples de l'Humanité, toute la fécondité de la principale conception propre à la géométrie objective. Cette manière d'instituer les familles géométriques comporte un complément général, envers la ligne résultée des intersections continues des génératrices consécutives dans chaque surface déterminée. Il faut regarder son appréciation comme logiquement destinée à lier les deux modes propres à la conception des enveloppes, à l'égard des courbes et des surfaces. Elle se formule en éliminant l'unique paramètre entre l'équation de la surface et ses deux premières dérivées envers lui. Nous devons facilement reconnaître que la condensation, essentiellement différentielle, de la géométrie objective n'y peut aucunement dispenser des conceptions primitives, qu'elle doit seulement perfectionner. Ces conceptions, infinitésimales ou finies, comportent, en tant que plus directes, plus spontanées, et plus libres, une efficacité scientifique que ne saurait souvent offrir la théorie des enveloppes, dont la valeur est principalement logique. Elle ne peut immédiatement convenir à la plupart des surfaces rectilignes, puisqu'elles ne sont pas développables, quoiqu'elles admettent un même caractère différentiel du troisième ordre, où le plan tangent contient une génératrice, sans toucher dans tout son cours.

CHAPITRE SIXIÈME.

GÉOMÉTRIE INTÉGRALE.

Appréciation générale.

Avant d'instituer la principale partie de la géométrie transcendante, il faut philosophiquement apprécier son imperfection radicale. Nous devons aussi caractériser les vices naturellement propres à son évolution préliminaire. Sans ce double préambule, l'explication de son état normal ne saurait jamais être assez déterminée.

Vue dans son ensemble, la constitution finale de la géométrie générale fait directement ressortir combien les efforts subjectifs restent toujours inférieurs aux difficultés objectives, même envers le plus simple des sept domaines théoriques. Il faut ainsi reconnaître que nos spéculations abstraites sont moins destinées à perfectionner nos connaissances scientifiques qu'à développer nos moyens logiques. C'est seulement à l'étude où l'abstrait confine au concret qu'il appartient de réaliser cette double efficacité conformément à l'ensemble des vrais besoins humains Il faut, partout ailleurs, regarder comme purement préliminaires les conceptions relatives à la doctrtne et même à la méthode. Élaborées dans les spéculations finales, où l'objet coïncide avec le sujet, les notions logiques et scientifiques y prennent

le caractère normalement conforme à leur destination nécessaire, et graduellement préparé par l'ensemble des préambules théoriques.

On ne saurait philosophiquement espérer que des constructions vraiment décisives puissent jamais surgir du domaine mathématique, dont la simplicité se trouve naturellement compensée d'après son éloignement du centre synthétique. L'ensemble de l'évolution géométrique offre un fatal contraste entre le perfectionnement des procédés et l'accroissement des résultats. Depuis le début de l'essor abstrait, la plupart des questions spéciales sont toujours restées sans solutions, et leur élaboration successive n'a jamais abouti qu'à transformer les difficultés.

Relativement aux études préparatoires, l'institution de la géométrie subjective a suffisamment atteint sa principale destination, d'après le principe cartésien dignement complété par la conception leibnitzienne. Elle offre, au contraire, un spectacle peu satisfaisant envers les questions finales, directement relatives à la mesure de l'étendue. Graduellement élaborées par l'intégration, les rectifications, quadratures, et cubatures n'ont pas fait les progrès spéciaux qu'on avait naturellement espérés d'après les méthodes générales. Rapprochées de la science ancienne, les connaissances modernes présentent peu d'acquisitions vraiment importantes à cet égard. Examinés sans préventions théoriques, les progrès s'y bornent, le plus souvent, à transformer les obstacles géométriques en difficultés algébriques, qui sont autant insurmontables. Telle serait l'appréciation qui devrait finalement prévaloir si l'on oubliait que la destination normale des études mathématiques est plus logique que scientifique. Sous l'aspect qui leur convient, ces spéculations ont pourtant atteint leur but essentiel, depuis que leur généralisation subjective a développé leur office encyclopé-

dique, malgré l'imperfection continue de leur spécialisation objective.

Toutefois, la constitution mathématique serait logiquement insuffisante si l'on devait jamais attendre, de la science fondamentale, au delà d'une préparation nécessaire pour la science finale. On n'y saurait aucunement trouver un type pleinement décisif de la vraie rationalité, caractérisée par la subordination continue de l'analyse, inductive et déductive, à la synthèse constructive. Une appréciation véritablement philosophique de la géométrie générale fait directement reconnaître que la méthode transcendante, toujours fondée sur la substitution provisoire des éléments aux touts, y reste seulement ébauchée. Tout le développement normal de cette méthode doit exclusivement appar tenir à la science qui fournit le type fondamental d'une telle décomposition. Sans les études morales, la logique infinitésimale semblerait radicalement contradictoire; puisque, dans le domaine mathématique, elle cesse d'être générale aussitôt qu'elle devient réelle.

Examinée philosophiquement, la raison théorique est toujours caractérisée par la généralité des conceptions, combinée avec leur réalité. Graduellement préparée dans les spéculations préliminaires, cette combinaison devient directement propre aux études finales. Garanties à la fois de l'illusion et de la dispersion, d'après la coïncidence entre l'objet et le sujet, elles peuvent seules concilier l'analyse et la synthèse.

Si l'on apprécie le caractère logique des équations propres à la géometrie subjective, on y voit la généralité toujours restreinte aux relations différentielles. Elle y disparaît par l'intégration, qui ne peut jamais s'accomplir qu'envers des cas spécialement déterminés. Un tel contraste fait directement sentir l'imperfection logique de la science fondamentale, où les conceptions cessent d'être générales en passant de l'état analytique-

à l'état synthétique. Il n'existe une suffisante harmonie entre l'analyse et la synthèse que relativement à la géométrie objective. L'équation différentielle d'une courbe est aussi spéciale que sa formule finie, et le type intégral d'une famille de surfaces a la même généralité que son caractère infinitésimal.

Bien appréciée, cette impuissance à concilier la réalité des principales notions avec leur généralité caractérise l'insuffisance logique du domaine mathématique. On n'y peut assez développer, parmi les trois qualités élémentaires de la vraie rationalité, que les moins éminentes, la précision et la clarté, naturellement adaptées à la simplicité des conceptions. Nous n'y devons jamais chercher des types décisifs de la véritable consistance, toujours réservée au domaine où s'accomplissent les seules constructions rélles et durables, c'est-à-dire universelles. Dans l'éducation individuelle, comme pour l'évolution collective, l'initiation mathématique ne constitue qu'une préparation, non moins insuffisante qu'indispensable. Sa principale efficacité doit même dépendre de sa subordination continue à la seule science où nos conceptions développent leur plénitude théorique en vue de leur destination pratique.

On ne peut assez apprécier la logique infinitésimale que dans les études propres à réaliser l'harmonie qui la caractérise entre l'analyse et la synthèse. Bornée au domaine mathématique, elle n'est vraiment satisfaisante qu'envers la différentiation, qui ne saurait jamais constituer qu'un préambule. Vue par rapport à l'intégration, où réside sa plénitude normale, elle n'y comporte que des succès rares et partiels, toujours inférieurs à sa destination. Il faut donc regarder la précision des résultats comme incompatibles avec la consistance des constructions. Étudiée dans le domaine final, où l'on aspire à la consistance en renonçant à la précision, la logique transcendante y développe son vrai ca-

ractère, d'après une harmonie habituelle entre la différentiation et l'intégration.

Une telle concordance se manifeste, en Morale, par le concours permanent des deux aspects, statique et dynamique, propres aux conceptions sur l'état vital, l'existence collective, et la nature individuelle. Si l'on ne pouvait d'abord saisir l'équivalence de ce dualisme à celui qui caractérise la logique infinitésimale, il suffirait de les comparer à la combinaison entre l'analyse et la synthèse. Une appréciation vraiment philosophique fait bientôt reconnaître que les conceptions statiques, en vertu de leur caractère analytique, correspondent à la différentiation, tandis que les notions dynamiques représentent l'intégration, en tant qu'essentiellement synthétiques. Examinés convenablement, les dualismes logiques qui semblent respectivement propres, l'un à la science fondamentale, l'autre à la science finale, ne constituent que des modifications normales du dualisme universel entre l'analyse et la synthèse. Leur comparaison directe fera toujours sentir leur équivalence générale et nécessaire.

D'après une telle appréciation, il faut aussi les rapprocher de deux autres dualismes logiques dont la concordance est déjà familière aux penseurs positivistes. Établie philosophiquement, la distinction générale entre l'abstrait et le concret coïncide avec la division normale entre la théorie et la pratique, depuis que mon principal ouvrage rectifia la plus grande imperfection de mon traité fondamental. Voilà comment ce double dualisme équivaut à ceux que je viens d'identifier, l'analyse statique ou différentielle étant partout abstraite et théorique, tandis que la synthèse intégrale ou dynamique est concrète et pratique. On peut ainsi faire finalement coïncider cinq dualismes logiques, après avoir successivement comparé les quatre qui semblent spéciaux avec celui dont la généralité doit être la mieux sentie,

comme admettant une appréciation plus simple et plus directe. Une telle identification conduit à reconnaître l'équivalence normale de ces contrastes intellectuels au double contraste social, d'une part politique, de l'autre moral, que présentent d'abord le progrès et l'ordre, puis l'égoïsme et l'altruisme. Établie au début de ce volume, la coïncidence de ces deux oppositions avec la division générale entre l'analyse et la synthèse permet de les assimiler aux diverses distinctions déjà confondues. Sous cet aspect, l'ensemble de la nature humaine, successivement considérée envers l'activité, l'intelligence, et le sentiment, comporte sept dualismes fondamentaux, dont l'équivalence normale est irrévocablement consacrée par la religion universelle.

De tels rapprochements ne peuvent être ici qu'indiqués, puisque leur appréciation dogmatique appartient au volume suivant, où sera directement établie la théorie finale de l'unité réelle. Étudiés envers le tome actuel, ils y sont surtout destinés à faire convenablement sentir l'impossibilité de juger la logique infinitésimale d'après son ébauche mathématique. Voilà comment on peut directement reconnaître l'incompétence radicale des meilleurs géomètres envers l'incomparable conception émanée du philosophe germanique sous l'impulsion cartésienne. Il faut même regarder la méthode transcendante, subjectivement appréciée, comme applicable à l'ensemble de la constitution encyclopédique. Étudiée philosophiquement, la hiérarchie positive commence par la différentiation des pensées universelles, et tend successivement vers leur intégration, qui se trouve normalement accomplie, autant que possible, dans le domaine final.

Historiquement considérée, cette appréciation dut spontanément surgir des méditations propres aux deux législateurs connexes de la science fondamentale. On peut finalement regarder

le fondateur de la géométrie générale et le créateur du calcul infinitésimal comme ayant instinctivement ébauché, dans le plus simple domaine, la méthode qui convient à l'ensemble de la synthèse subjective. Rapprochés de leur carrière directement philosophique, leurs efforts pour instituer la subjectivité géométrique offrent les germes spontanés d'une conception systématiquement destinée à la coordination universelle. Dans son ébauche mathématique, la logique transcendante manifesta sa tendance nécessaire à subordonner l'analyse à la synthèse. Elle ne put d'abord obtenir qu'un empire insuffisant et contesté, parce qu'elle resta partielle, jusqu'à ce que le positivisme l'eût irrévocablement incorporée à la systématisation finale.

Afin de mieux sentir la tendance spontanément propre aux deux fondateurs de la philosophie mathématique, il faut lier leur destinée intellectuelle à l'ensemble des impulsions sociales sous lesquelles elle fut involontairement accomplie. Rapportés à l'épuisement, assez appréciable, du théologisme, leurs efforts organiques durent directement préparer la synthèse subjective, en la faisant irrévocablement surgir du domaine mathématique. Rattachées à l'ordre moral, leurs méditations ne furent d'abord concentrées sur la science fondamentale que pour y procurer à l'esprit positif la généralité subjective sans laquelle il ne pouvait aucunement remplir son principal office. Examinées dans leur réaction universelle, leurs institutions mathématiques tendirent à systématiser la géométrie, afin que son élaboration cessât d'absorber l'essor théorique, dont la meilleure destination était déjà devenue assez appréciable. Tel fut surtout le caractère du philosophe germanique, qui, directement attentif aux sollicitudes sociales, sut mieux sentir que le penseur français l'inanité des synthèse objectives et la nature essentiellement subjective de la systématisation finale.

Confusément apprécié par l'instinct occidental, le besoin de

reconstruire l'ordre spirituel dut spontanément diriger les principales méditations des deux législateurs de la science fondamentale. Une irrésistible sollicitude leur fit dignement sentir que la réorganisation finale devait philosophiquement émaner de l'esprit mathématique convenablement systématisé d'après une suffisante généralisation. Meilleur juge qu'eux-mêmes de leurs impulsions dominantes, la Postérité peut désormais apprécier leur marche, en la rapportant à la théorie historique qui caractérise le positivisme. Une destinée involontairement subie diffère peu, quant aux résultats, d'un dessein systématiquement poursuivi, dont la supposition, convenablement appliquée, fait mieux concevoir l'enchainement des progrès. Les meilleurs types de la raison moderne doivent d'ailleurs avoir personnellement senti la tendance générale du mouvement occidental avant qu'elle devînt normalement appréciable.

On ne saurait douter que le fondateur de la géométrie subjective avait pleinement reconnu l'opportunité de préparer la systématisation universelle en instituant la philosophie mathématique. Faute du point de vue social, dont l'avénement théorique exigeait l'ébranlement politique du peuple central, il isola l'ordre moral de l'ordre physique, en faisant provisoirement prévaloir une appréciation purement individuelle envers l'ordre intellectuel. Fondant la meilleure des synthèses objectives sur l'ensemble des doctrines mathématiques, il systématisa l'étude générale de l'économie matérielle, et la prolongea jusqu'au contact avec le spectacle humain par l'ébauche des théories vitales. Regardant comme provisoires les liens scientifiques qu'il établit entre les principales phases encyclopédiques, il ne jugea définitive que la méthode universelle dont il caractérisa la nature et manifesta la puissance en instituant la subjectivité géométrique. Elle ne pouvait assez réagir sur l'ensemble de la raison moderne sans être d'abord secondée par la double ten-

tative de systématisation théorique qui dut alors l'accompagner.

Mais l'avortement nécessaire d'une construction aussi prématurée devait naturellement disposer le digne successeur germanique du grand rénovateur français à mieux apprécier les difficultés et les conditions de la synthèse universelle. Une situation protestante lui faisant assez sentir la signification occidentale de l'ébranlement britannique, il reconnut la nécessité d'interposer le point de vue social entre l'étude du monde et celle de l'homme pour construire une systématisation réelle et stable. Néanmoins, l'impossibilité de remplir alors une telle condition le détourna d'une tentative directe envers la synthèse universelle, dont il se contenta d'indiquer la nature subjective et de signaler les principales tendances. Il ne jugea décisive, comme son prédécesseur, que sa conception mathématique, qui constitua la subjectivité géométrique instituée par celui-ci. Ralliés autour de la science fondamentale, les seuls véritables philosophes propres à la préparation moderne forment un couple inaltérable, qui, systématisant l'esprit positif dans son berceau théorique, suscita l'avénement direct de la synthèse universelle.

Bornée à l'essor abstrait, cette double impulsion n'aurait jamais été décisive si l'ensemble des antécédents occidentaux, bientôt complété par l'ébranlement central, ne l'eût spontanément rattachée aux besoins généraux de l'humanité. Regardée comme une transition nécessaire entre la théocratie et la sociocratie, la progression occidentale fit successivement prévaloir la poésie, la philosophie, la science, pour préparer la réorganisation spirituelle. Alternativement investies de l'initiative régénératrice les classes correspondantes aspirèrent à fonder un sacerdoce équivalent à celui dont le démembrement continu les avait provisoirement suscitées. Nulle rivalité mutuelle ne put habituellement altérer l'instinct spontané de leur commune destination, qui devait finalement dépendre de l'esprit scientifique, seul dé-

positaire du germe rénovateur. Depuis l'évolution grecque, son essor inspirait une sollicitude universelle, qui traitait ses résultats immédiats et spéciaux comme des indices et des garanties de sa future efficacité générale. Il rachetait sa sécheresse et sa restriction par sa positivité, qui pouvait seule réaliser les espérances d'universalité religieuse que le monothéisme avait partout développées sans y pouvoir jamais satisfaire. Respectant la science, malgré le sentiment continu de leur supériorité normale, la philosophie et la poésie attendaient d'elle l'accomplissement de la transition occidentale, aboutissant au sacerdoce qui devait irrévocablement unir les trois caractères spéculatifs.

Les destinées générales de l'humanité se trouvaient ainsi dépendre de l'extension systématique de l'esprit scientifique, depuis que l'épuisement et la dégénération du monothéisme ne permettaient de reconstruire l'ordre intellectuel et moral que d'après le principe positif. Il était impossible qu'une telle situation, manifestée par l'explosion protestante, fût méconnue du double législateur mathématique, et même du public d'élite qui contemplait avec anxiété l'évolution théorique. Bien que les impressions du moyen âge fussent profondément altérées d'après les répugnances qu'inspirait sa terminaison rétrograde, les philosophes, et surtout les poëtes, en subissaient, sous l'impulsion féminine, le prolongement nécessaire. Rapportée à la sociabilité, malgré la spécialisation scientifique, l'intelligence était partout regardée comme devant être finalement subordonnée au sentiment. Après avoir dignement subi les préparations convenables, l'esprit positif recevait, de l'ensemble des antécédents occidentaux, la noble mission de se vouer irrévocablement à la construction directe de l'unité réelle et complète.

Élaborée sous cette impulsion, la synthèse mathématique, instituée par la géométrie subjective, fut autant destinée à dissiper les préoccupations dirigées vers la science fondamentale

qu'à préparer la méthode universelle pour sa meilleure destination. Graduellement dispensé des sollicitudes mathématiques, l'esprit positif devait directement aspirer à l'agrandissement continu de son domaine théorique, dont l'efficacité pratique exigeait l'entière extension. A mesure que la géométrie et la mécanique se généralisaient et se systématisaient d'après une saine intervention du calcul, les principaux efforts spéculatifs s'appliquaient à des études plus importantes et plus dificiles. La constitution de la philosophie astronomique et l'ébauche de la synthèse chimique durent bientôt attirer les meilleurs penseurs vers l'élaboration directe des théories vitales. Étudiées philosophiquement, elles firent promptement ressortir la connexité qui caractérise les spéculations organiques, dont l'essor continu tendit à terminer les préparations scientifiques de l'étude rationnelle de l'ordre humain, seule source des conceptions encyclopédiques.

Ralliant les exigences intellectuelles aux nécessités sociales, sous l'impulsion spontanément résultée de l'ébranlement central, le positivisme dut ainsi devenir l'aboutissant normal du mouvement émané des deux philosophes qui coordonnèrent la Logique. Alors la science, transformée en philosophie, construisit la religion universelle, quand le sentiment l'eut assez régénérée, sauf l'élaboration poétique qui doit finalement compléter, d'après le principe affectif, le culte systématique de l'Humanité. Rétrogrades autant qu'anarchiques, par suite d'une spécialisation dégradante, les divers savants durent alors fournir les seuls enuemis vraiment dangereux de la construction destinée à combiner la science, la philosophie, et la poésie, pour fonder le sacerdoce universel. Examinée comparativement, cette résistance fut surtout due aux géomètres, ou plutôt aux algébristes, devenus les héritiers apparents d'une évolution dont ils méconnaissaient la nature et la destination dans son résultat

général. Si le régime académique les avait d'abord ameutés contre le double législateur de la science fondamentale, ils devaient davantage repousser le philosophe qui venait irrévocablement dissoudre les classes scientifiques en instituant une transformation qu'ils ne pouvaient jamais mériter.

D'après une telle disposition, il est aisé de sentir que le positivisme put seulement cheminer sous un appel permanent à l'ensemble de l'avenir et du passé, pour surmonter la résistance du présent, surtout dans le siége naturel de son avénement théorique. Épuisé par la culture académique, l'esprit mathématique était alors devenu radicalement hostile aux conceptions philosophiques, quoiqu'elles dussent primitivement émaner de la science fondamentale. Pour conduire le mouvement leibnitzo-cartésien jusqu'à son terme normal, il fallait irrévocablement surmonter les entraves graduellement résultées de sa dégénération spontanée sous des théoriciens incapables d'en comprendre la nature et la destination. Il devint alors indispensable de rattacher le fondateur du positivisme aux philosophes dont sa mission réalisa les principales aspirations, en écartant des intermédiaires également hostiles aux deux extrémités de l'évolution directement systématique. Tel est le but spécial des indications précédentes, qui doivent surtout rétablir la filiation philosophique, en faisant irrévocablement apprécier l'incompétence scientifique envers la double base de la synthèse mathématique.

Étudiée convenablement, cette question ne dut laisser aucune issue aux subterfuges académiques, quand on eut assez reconnu que le principal développement de la logique infinitésimale appartient à la science dont les algébristes repoussèrent la suprématie et même nièrent l'existence. L'ensemble de la philosophie seconde doit être finalement regardé comme constituant une immense application de la méthode transcendante, direc-

ment émanée de la philosophie première d'après la construction de la hiérarchie encyclopédique. Une telle institution du travail théorique assigne la différentiation à la Logique, tandis que l'intégration, préparée en Physique, s'accomplit en Morale. Dans la science de l'Espace, l'existence réelle est seulement différentiée, en étudiant les relations isolément propres à ses attributs les plus simples et les plus généraux. Élaborée par la science de la Terre, qui réunit à ces caractères les divers aspects de la matérialité, l'intégration appartient à la science de l'Humanité, seule apte à combiner toutes les appréciations théoriques, tant subjectives qu'objectives.

Tel est le jugement final du positivisme sur la logique infinitésimale, dont les deux méthodes convergent d'autant mieux qu'elles s'appliquent à des domaines plus éminents. On voit, en décomposant la Morale, que le moins élevé de ses trois éléments offre le plus d'intervalle entre la différentiation anatomique et l'intégration physiologique, quoiqu'elles diffèrent davantage en Physique, et surtout dans l'enceinte mathématique. Relativement à l'existence collective, la sociologie rapproche mieux l'intégration, directement destinée à la vie publique, et la différentiation, toujours bornée à la vie privée ; même quand l'état anarchique oblige à différentier deux fois, en substituant les individus aux familles. Toutefois, la plénitude de l'intégration philosophique est nécessairement réservée à la morale proprement dite, où l'universelle convergence des aspects théoriques, d'après l'irrévocable coïncidence entre l'objet et le sujet, fait directement prévaloir la méthode purement subjective. Sous sa suprématie, l'intégration et la différentiation se combinent de manière à dissiper toute séparation normale entre leurs domaines théoriques, dont la division décroissante caractérise les sciences préliminaires, y compris la biologie, et même la sociologie.

On pourrait aussi reconnaître une gradation analogue, quoique moins prononcée, entre les trois éléments de la Physique, surtout en opposant les deux extrêmes, leur intermédiaire ne pouvant encore offrir un caractère assez appréciable. Bien comparées, la géométrie céleste et la mécanique céleste constituent, en astronomie, la différentiation et l'intégration des pensées relatives à l'existence planétaire. Si leur séparation est moins prononcée que celle des deux parties mathématiques de la logique infinitésimale, elles diffèrent davantage que leurs analogues chimiques, même avant que la Physique intime soit assez systématisée. Toutes les spéculations sur les substances élémentaires constituent, en chimie, la différentiation, et l'étude sucessive des trois ordres généraux de composition y résulte d'une intégration plus ou moins réitérée. Alors on voit que les conceptions différentielles et les notions intégrales, quoique nettement distinctes, sont mieux combinées que dans le domaine mathématique, et même en astronomie. Rapportées à leur commune destination, celles-ci prévalent davantage; l'essor analytique se subordonne plus profondément à l'appréciation synthétique. Étant déjà convenable à l'état présent de la chimie, ce jugement philosophique doit surtout s'adapter à sa constitution normale.

Une telle appréciation qu'il suffit ici d'indiquer, fait irrévocablement sentir la frivolité des opinions qui durent officiellement dominer envers la méthode transcendante depuis l'insurrection des géomètres contre les philosophes. Rapportée à sa destination encyclopédique, la logique infinitésimale échappe aux jugements émanés des théoriciens exclusivement occupés de spéculations mathématiques. Dans sa pleine généralisation, elle acquiert autant de consistance que de dignité, de manière à surmonter les vicieuses objections que fit empiriquement surgir le domaine qui lui convient le moins. Il faut ainsi recon-

naître que son imperfection mathématique tient davantage à la nature de la science fondamentale qu'à l'impuissance de ses organes et même aux vices de sa culture spéciale. Rattachés à des études essentiellement différentielles, les efforts spécialement relatifs à l'intégration mathématique n'auraient pas produit des résultats philosophiquement supérieurs, s'ils avaient été plus éminents et mieux dirigés.

Restreinte à ses aspirations normales, la géométrie intégrale doit donc être jugée moins imparfaite que ne l'indique une appréciation trop abstraite de ses graves et nombreuses lacunes. Une telle étude ne peut jamais fournir le meilleur type logique que relativement à l'attribut moyen de la vraie rationalité dont les qualités extrêmes doivent mieux se développer ailleurs. Sous le rapport de la consistance, elle est nécessairement inférieure à la seule science qui puisse accomplir de véritables constructions. Examinée quant à la clarté, sa prééminence reste seulement apparente, puisqu'une telle qualité, toujours propre à la positivité, ne devient vraiment recommandable qu'envers les conceptions les plus compliquées. Son unique privilège concerne la précision, qui ne peut jamais exister au même degré dans les spéculations plus importantes et plus difficiles.

Sans demander à la géométrie une perfection incompatible avec sa nature et superflue pour sa destination, il faut finalement regarder l'intégration mathématique comme ayant, depuis longtemps, réalisé les principaux progrès qui lui sont spécialement propres. On n'a rien ajouté de vraiment essentiel aux travaux des premiers auxiliaires du philosophe germanique sur l'intégration explicite. Il en est, au fond, de même envers l'intégration implicite, dont l'essor a toujours fait davantage surgir des programmes que des conceptions. Nous pouvons donc regarder l'algèbre transcendante comme aussi stagnante que l'algèbre élémentaire, qui n'a jamais pu réellement dépasser la

première ébauche de ses principales études. Si la science fondamentale avait surtout une destination logique, irrévocablement accomplie depuis l'avénement de la synthèse universelle, son perfectionnement ne peut finalement consister qu'en une coordination normale, nécessairement accompagnée d'une épuration systématique.

Fondée sur ce jugement, l'appréciation philosophique de la géométrie intégrale doit successivement caractériser toutes ses parties essentielles, en faisant convenablement ressortir les conceptions qu'elles suscitèrent, et flétrissant, surtout par le silence, les divagations correspondantes. Rapportée à sa vraie destination, cette étude devient finalement satisfaisante, quand l'élimination des puérilités académiques laisse directement sentir le principal mérite d'une telle ébauche de la logique transcendante, qui ne peut être assez développée que dans le domaine moral. On ne saurait maintenant s'étonner que cette apparente construction se trouve réellement réduite à la coordination d'une suite de programmes, dont la réaction générale consiste surtout à manifester la stérilité nécessaire des conceptions spéciales. Nous devons toujours respecter, malgré leur insuffisance scientifique, ces résultats spontanés d'une évolution théorique entièrement dépourvue d'impulsion morale et de direction philosophique. Toute l'indignation de la Postérité se concentre sur les efforts, aussi blâmables moralement que méprisables intellectuellement, qui furent essentiellement destinés à prolonger l'interrègne spirituel quand le positivisme eut fait irrévocablement surgir la discipline religieuse.

On ne doit pas regretter que l'esprit positif, d'abord caractérisé dans le plus simple domaine, ait toujours éludé le régime théologico-métaphysique, qui, ne pouvant jamais régler son développement, l'aurait naturellement entravé. Nous ne devons regarder les géomètres comme devenus vraiment blâmables

que lorsqu'ils se sont insurgés contre une philosophie émanée de la science, au lieu de subordonner leurs travaux spéciaux aux vues générales du double législateur mathématique. Sous l'impulsion d'une vanité coupable, aspirant à perpétuer l'interrègne spirituel, ils repoussèrent une discipline tendant à diriger le mouvement scientifique vers sa destination normale. Explicable, et même excusable, d'après l'insuffisance initiale d'une philosophie alors incomplète faute d'inspiration sociale, cette résistance de l'esprit de détail au génie d'ensemble ne mérite une irrévocable flétrissure que depuis l'avénement du positivisme systématique. Toutefois, la science, surtout mathématique, était déjà démoralisée quand elle reconstruisit le régime académique après que l'ébranlement du peuple central eut assez manifesté le besoin de concentrer les forces intellectuelles sur l'élaboration directe de la réorganisation occidentale.

Rapportée à la destination générale du mouvement moderne, une telle restauration constitue la principale faute de la dictature suscitée par la grande crise. Aboli sous l'impulsion régénératrice, le régime officiel de la spécialité dispersive fut aveuglément reconstruit, avec plus de consistance et d'extension, au début de la réaction rétrograde. Néanmoins, le principal reproche doit, à cet égard, concerner, non des gouvernants bien intentionnés quoique incompétents, mais les savants, et surtout les géomètres, qui sollicitèrent une restauration dont ils pouvaient assez sentir le vice radical. Dans la dernière phase de la préparation moderne, le régime académique avait essentiellement rendu, chez le peuple central, tous les services spéciaux qui pouvaient provisoirement compenser sa tendance anarchique et rétrograde. Après l'explosion de la grande crise, il ne pouvait plus constituer qu'une émeute permanente des médiocrités scientifiques contre l'ascendant philosophique que la situation occidentale devait prochainement susciter.

Mais cette insurrection, vaguement appliquée d'abord à toute tentative de systématisation, dut surtout concerner le positivisme, qui fit irrévocablement surgir la religion universelle, quand il eut assez transformé la science en philosophie. On put alors reconnaître que les principaux ennemis de la régénération finale résidaient parmi ceux qui s'efforçaient de faire indéfiniment prévaloir la spécialité théorique après que la situation occidentale avait irrésistiblement proclamé le besoin de régler l'ensemble de la vie humaine. Repoussant davantage la discipline positive que la domination théologico-métaphysique dont ils sentaient l'inanité, les savants, et surtout les géomètres, développèrent, contre une philosophie émanée de leur sein, la révolte d'abord appliquée au double législateur mathématique. Toutefois, la situation générale avait irrévocablement changé, d'après la plénitude et l'homogénéité de la systématisation finale, où les conditions intellectuelles se trouvaient irrésistiblement liées aux besoins sociaux. Elle devait bientôt surmonter une opposition radicalement inconséquente, qui, luttant contre le théologisme et l'ontologisme au nom de la positivité, voulait pourtant empêcher une réorganisation directement fondée sur le principe positif. L'instinct occidental avait longtemps respecté l'essor scientifique comme le préambule nécessaire de la régénération universelle. Si les savants repoussaient l'issue générale de la préparation théorique, quand elle était irrévocablement réalisé, la flétrissure publique, et même officielle, devait bientôt préserver le positivisme des obstacles spontanément suscités à ses deux principaux précurseurs.

Émanée d'une sagesse purement empirique, la maxime du catholicisme sur la liaison des erreurs de l'esprit aux vices du cœur se trouve systématiquement incorporée à la religion universelle, d'après l'ensemble de la théorie cérébrale, de manière à ne pouvoir plus être éludée. Vainement les faux théoriciens

invoquèrent-ils le développement de la science pour perpétuer le régime où les travaux de détail éteignaient les vues d'ensemble. Il fut bientôt facile au positivisme de démasquer les déclamations académiques, en prouvant que, loin d'être dues, comme avant la crise sociale, à des illusions spéculatives, elles étaient surtout inspirées par le désir d'acquérir, à peu de frais, l'aisance et l'estime. Tous les sophismes des géomètres devinrent naturellement impuissants contre une doctrine qui représente le principal essor de la vraie rationalité comme nécessairement propre au domaine humain. Établie au nom du sentiment et de l'activité, la suprématie encyclopédique de la morale devenait finalement nécessaire au développement de l'intelligence, dont les exigences préliminaires avaient seules suspendu l'ascendant continu du cœur sur l'esprit quand l'unité théocratique fut rompue.

La dégénération de la culture scientifique, et surtout mathématique, pendant la dernière phase de la préparation moderne, ne fut pas seulement due au régime académique. Également liée à la propagation de l'instruction abstraite, elle ne se trouva pleinement développée que quand le siècle exceptionnel eut assez combiné ces deux sources de dégradation en érigeant un tel enseignement en apanage continu des théoriciens officiels. Graduellement incorporées, sous l'impulsion pratique, à l'éducation occidentale, les études mathématiques n'avaient pas directement altéré l'esprit théorique tant qu'elles étaient restées essentiellement privées. Alors la culture scientifique se concentrait chez un petit nombre d'organes dont la spontanéité spéculative demeurait indépendante des attributions didactiques. Leur subsistance reposait, à défaut des ressource personnelles, sur la munificence publique ou privée; tandis que le goût croissant des Occidentaux pour l'instruction positive se satisfaisait d'après des efforts directs et des soins individuels.

Sous le régime spontané, la culture et l'enseignement trouvaient, dans leur séparation provisoire, une garantie naturelle contre les déviations propres à la spécialisation scientifique. Exempte des préoccupations théoriques, l'instruction mathématique se concentrait sur les conceptions vraiment fondamentales, seules pratiquement appréciables. Convenablement préservé des sollicitudes didactiques, le géomètre poursuivait ses méditations spéciales sans altérer leur originalité par l'obligation de les rendre immédiatement accessibles à la raison générale. Telle fut la situation scientifique, même chez le peuple central, jusqu'à l'avénement de la grande crise, malgré les encouragements officiels de l'enseignement mathématique. Elle ne pouvait ainsi persister quand l'explosion finale eut instinctivement érigé l'extension et la propagation des études positives en condition fondamentale de la régénération universelle, dont les exigences devaient alors préoccuper la sollicitude publique.

Généralement excusables, et même louables, vu leur but, les encouragements prodigués à l'instruction mathématique et les attributions didactiques officiellement conférées aux géomètres devinrent autant nuisibles à la culture qu'à l'enseignement, faute de direction philosophique. Également applicable à tous les Occidentaux, ce jugement est surtout convenable au peuple central, où la situation antérieure, si sa persistance eût été possible, aurait spontanément secondé l'initiative régénératrice et diminué ses principales entraves. Nous pouvons déjà remarquer l'altération de la culture théorique par les réactions propres à l'enseignement dans les vicieux efforts que tentèrent le plus fécond et le plus philosophe des grands géomètres envers l'institution infinitésimale. Il faut surtout attribuer aux besoins didactiques l'accroissement des désordres naturellement émanés de l'anarchie académique. Elle n'aurait pas suffi pour accréditer, ou même susciter, la fusion des infiniment petits avec

les fluxions ou leur remplacement par les dérivées, si les exigences de l'enseignement n'avaient point inspiré cette prétendue réformation, directement inutile aux purs géomètres.

En prolongeant le régime spontané de la culture et de la propagation jusqu'à ce que leur commune systématisation devînt possible, on aurait développé, chez le public et parmi les savants, des habitudes plus favorables à l'accomplissement de la transition organique. Nulle solidarité factice n'aurait mutuellement aggravé les préjugés théoriques et les puérilités scolastiques en suscitant les arguties de détail contre les pensées d'ensemble, qui pouvaient mieux prévaloir. Faute de direction philosophique, l'enseignement s'est autant dégradé que la culture, surtout chez le peuple central, depuis que l'aveuglement du public et du gouvernement a développé les vices académiques par les attributions didactiques. Elles ont de plus en plus encouragé les médiocrités scientifiques, et rabaissé l'esprit théorique au niveau des intelligences qu'on supposait incapables d'être convaincues sans une minutieuse argumentation, à laquelle il fallait dès lors adapter les conceptions mathématiques. Rapidement dégradées à mesure qu'elles étaient officiellement protégées, la culture et la propagation auraient été mieux accessibles à l'impulsion régénératrice si leur concentration et leur spontanéité s'étaient assez prolongées.

Néanmoins, les encouragements simultanés de la science et de l'enseignement ont finalement produit une réaction contraire au régime académique et favorable à la systématisation universelle, en faisant involontairement sentir l'incompétence des théoriciens spéciaux. Elle est devenue graduellement irrécusable d'après leur impuissance à remplir les offices didactiques dont ils avaient aveuglément sollicité le monopole. Transformées en sinécures scolastiques, les pensions académiques ont mieux manifesté leur tendance à développer les médiocrités

intrigantes et paresseuses, dès lors poussées aux bénéfices scientifiques, comme aux positions théologiques et métaphysiques, pour échapper aux obligations pratiques. Toujours disposés, même d'après leur inaptitude didactique, à convertir leur existence théorique en avénement politique, les savants ont achevé de prouver leur incompatibilité spéciale avec la réorganisation occidentale en repoussant la séparation fondamentale des deux puissances. Examinée sous tous ses aspects, la protection empiriquement exercée sur la science et l'enseignement, surtout chez le peuple central, a partiellement compensé ses principaux inconvénients par des avantages accessoires.

Toutefois, sa meilleure efficacité, pour seconder la transition organique, dut naturellement consister à faire indirectement surgir un public scientifique, où le positivisme pouvait trouver un appui spécial contre les résistances académiques. En liant la science à l'enseignement, on avait spontanément appelé l'attention universelle sur les conditions encyclopédiques du vrai pouvoir théorique, nécessairement caractérisé par la systématisation des études positives. Mais, si les personnages académiques n'appréciaient leur investiture didactique qu'en vue des ressources qu'ils y trouvaient, le public ne pouvait finalement accueillir l'instruction mathématique que comme base normale de la régénération philosophique. Pendant la première moitié du siècle exceptionnel, une école vicieusement instituée compensases inconvénients, généraux et particuliers, en faisant indirectement surgir, chez le peuple central, un public spécialement propre à seconder l'avénement intellectuel et social du positivisme. La restriction de ses études au domaine mathématique, ou du moins inorganique, y devait involontairement disposer aux aberrations décorées d'un vernis scientifique. Elles n'y durent pourtant affecter que des âmes exceptionnelles, dont l'égarement fut ordinairement passager, en tant que contraire

aux habitudes déjà contractées de positivité rationnelle. Sans l'appui, spontanément combiné, du public mathématique et du public médical, dont les vices respectifs tendaient à la neutralisation mutuelle, la religion universelle aurait difficilement surmonté les résistances intellectuelles et sociales, même chez le peuple central.

Il faut maintenant procéder à l'examen direct de la constitution générale, à la fois abstraite et concrète, qui convient à la géométrie intégrale, dont la nature et la destination sont assez caractérisées par l'ensemble des indications précédentes. Dans les autres phases du cours de Logique, les études scientifiques des jeunes disciples de l'Humanité se trouvent successivement dirigées vers le préambule et la coordination du domaine correspondant. On doit autrement procéder envers la géométrie intégrale, naturellement dispensée d'un préambule propre, alors remplacé par l'ensemle de la géométrie différentielle. Les deux parties scientifiques du sixième degré de la Logique sont normalement consacrées, l'une au domaine subjectif, l'autre au complément objectif, de la géométrie intégrale. On doit ensuite diviser chacun d'eux d'après la distinction entre l'abstrait et le concret, qui, principale dans le chapitre précédent, devient ici secondaire.

Le changement ainsi survenu pour la coordination scientifique doit aussi conduire à modifier la distribution spéciale. A la sixième phase de la Logique, l'initiation encyclopédique consacre vingt leçons, tandis que chacun des degrés précédents en offre seulement seize. Bien que le nombre des leçons propres à la seconde partie scientifique soit le même pour la géométrie intégrale qu'envers la géométrie différentielle, le changement du nombre total fait ici prévaloir la première partie, moins développée auparavant que l'autre. On voit que cette inversion est naturellement conforme à la comparaison actuelle des deux

parties, dont la première devient la plus caractéristique, au lieu d'être seulement préparatoire. Réservant les deux leçons extrêmes pour l'appréciation philosophique et le résumé normal, le cours spécial de géométrie intégrale se trouve ainsi composé de dix-huit-leçons, dix envers le domaine subjectif, et huit sur le complément objectif.

Si l'on veut nettement apprécier l'ensemble de cette distribution, il faut maintenant considérer la division propre à chacune de ces deux parties. Elles doivent également commencer par cinq leçons abstraites, qui s'y trouvent normalement suivies de cinq leçons concrètes pour la première partie, et trois dans la seconde. L'enseignement concret reste donc composé de huit leçons, comme envers les deux autres phases de la géométrie générale ; tandis que l'enseignement abstrait, auquel on n'avait alors affecté que cinq leçons en acquiert maintenant dix, de manière à devenir ici prépondérant. Voilà comment la répartition didactique, quand on a convenablement combiné ses deux degrés successifs, représente et résume l'appréciation philosophique de la géométrie intégrale. A l'aspect de ce plan, on vérifie que l'étude concrète ne comporte qu'une ébauche, et l'on sent que l'étude abstraite doit avoir une destination plus étendue que son office géométrique.

Historiquement considérée, l'institution infinitésimale ne fut d'abord destinée qu'à la géométrie, que le fondateur de la philosophie mathématique eut seule en vue. On dut bientôt reconnaître que la méthode transcendante devenait plus nécessaire à l'étude du mouvement qu'à la science de l'étendue. Nous devons naturellement compliquer nos moyens logiques à mesure que croissent nos difficultés scientifiques; ce qui réserve au domaine humain la plénitude théorique, tant envers les procédés que quant aux notions. Non-seulement la mécanique exigeait plus que la géométrie l'assistance infinitésimale ; mais l'une de-

vait surtout dépendre de l'intégration, tandis que l'autre pouvait principalement utiliser la différentiation. Examinée philosophiquement, cette distinction est essentiellement conforme à celle-ci dessus caractérisée, sous le même aspect, entre l'état statique et l'état dynamique d'un domaine quelconque. Une comparaison systématique fait directement sentir que, dans l'étude théorique de l'existence universelle, la géométrie constitue l'appréciation statique et la mécanique l'appréciation dynamique. Respectivement vouées aux plus simples phénomènes de l'existence et de l'activité, l'une doit essentiellement développer la partie différentielle et l'autre la partie intégrale de la logique infinitésimale, quoique chacune ait naturellement besoin de toutes deux.

Avant que ce contraste devînt suffisamment appréciable, il fut assez senti pour faire spontanément prévaloir la mécanique sur la géométrie dans les travaux abstraitement destinés à perfectionner l'intégration. Rapportée à ce but, l'anomalie apparente du présent chapitre se trouve pleinement expliquée, les leçons géométriques devant ici devenir numériquement inférieures aux leçons algébriques, qui s'y trouvent surtout développées en vue du chapitre suivant. Mais ce développement altérerait la constitution didactique de la géométrie intégrale s'il en affectait la partie principale. Étudiée convenablement, il ne concerne que le complément objectif, sans se faire aucunement sentir envers le domaine subjectif. Examinée abstraitement, cette répartition est autant historique que dogmatique ; car les intégrations correspondantes sont respectivement destinées surtout, les unes à la géométrie, les autres à la mécanique.

Rattachée à l'institution générale de la philosophie mathématique, cette appréciation fait spécialement sentir que la principale destination du calcul infinitésimal consiste à lier la science

de l'étendue à la théorie du mouvement. Étudiée dans son ensemble, la géométrie est essentiellement en harmonie avec la partie préliminaire de l'algèbre transcendante, quoiqu'elle ait naturellement besoin de la plus vaste et la plus difficile. Tout au contraire, la mécanique doit pricipalement dépendre de l'intégration, sans qu'on y puisse nettement assigner aucun domaine uniquement relatif à la différentiation. Il faut ensuite reconnaître que la géométrie fait surtout usage de la partie la plus facile et la moins étendue du calcul intégral, dont le nom usuel rappelle ce lien spécial. Fondée, au contraire, sur l'intégration la plus compliquée et la plus variée, la mécanique n'a directement recours que d'une manière purement accessoire à l'intégration immédiate.

D'après une telle appréciation, implicitement développée au chapitre suivant, l'harmonie fondamentale entre l'abstrait et le concret se trouve convenablement établie dans l'ensemble de la philosophie mathématique. Examinées quant à leur répartition totale, les deux classes d'études doivent finalement obtenir le même nombre de leçons, diversement affectées aux sept degrés de la Logique. Un examen philosophique fait bientôt reconnaître que, malgré cette égalité, le concret a convenablement prévalu sur l'abstrait pour la constitution didactique de la science fondamentale. Les leçons purement abstraites, qui ne sont pas directement subordonnées à la destination concrète du calcul, forment seulement le quart de l'enseignement systématisé dans ce volume. Les études géométriques et mécanique y reçoivent un développement notablement supérieur à celui de leurs diverses annexes algébriques. Indépendamment de la comparaison numérique, l'appréciation dogmatique, concourant avec l'explication historique, fait partout sentir la prépondérance normale du concret sur l'abstrait. Non-seulement le principal essor algébrique se trouve directement institué pour sa

destination concrète ; mais il puise à la même source ses inspirations fondamentales.

Il faut maintenant compléter l'appréciation générale du plan didactique de la géométrie intégrale en faisant successivement ressortir les caractères propres à chacune de ses divisions et leur correspondance normale. Relativement à la distinction principale, elle est géométriquement fondée sur la subjectivité du domaine essentiel et l'objectivité du complément nécessaire. A la première partie, appartiennent les questions directement relatives à la mesure de l'étendue, successivement considérée sous ses trois aspects généraux. Toutes les études géométriques viennent alors converger vers leur destination finale, en instituant les rectifications, les quadratures, et les cubatures, pour des types quelconques. A la seconde partie correspondent les études, spéciales dans leur objet, et générales par leur élaboration, qui concernent d'abord les espèces de lignes, puis les familles de surfaces.

Étudiée abstraitement, cette division représente la distinction entre l'intégration explicite et l'intégration implicite, qui contrastent davantage que les différentiations analogues. Mais, quoique les deux ordres d'institutions algébriques doivent ici comporter le même nombre de leçons, leur égalité didactique, comparée à leur inégalité logique, fait toujours sentir que la destination scientifique du plus éminent est plus relative à la mécanique qu'à la géométrie. Une question quelconque sur la mesure de l'étendue se trouve constamment dépendre de l'intégration des formules, de manière à ne jamais souffrir de l'imperfection plus prononcée que présente l'intégration des équations. Elle est tellement liée à l'explicité qu'elle suppose même résolue l'équation de la figure, dont la mesure ne peut aucunement s'accomplir dans le cas, trop habituel, où le calcul des relations directes interdit cette préparation. Si la principale partie

du calcul intégral se rattache à la géométrie générale, d'abord historiquement, puis dogmatiquement, elle n'y comporte qu'une destination purement objective, pour déterminer les courbes et surfaces d'après leurs tangentes et plans tangents.

Sous cet aspect, l'intégration implicite, quoique étant surtout destinée à la mécanique, se trouve tellement liée à la géométrie qu'elle a d'abord surgi dans ce domaine, pendant l'incomparable demi-siècle qui sépare et réunit les deux législateurs mathématiques. Une qualification vraiment caractéristique fut alors introduite envers les questions où l'on détermine une courbe d'après une propriété relative à ses tangentes. Fondée avant que l'étude du mouvement se trouvât abstraitement instituée, cette classe de recherches avait même intéressé le créateur de la géométrie générale. Faute d'un tel lien, la mécanique serait trop isolée de la géométrie, spontanément poussée à l'élaboration du genre d'intégration qui convient le mieux au complément nécessaire de la philosophie mathématique. Il faut même reconnaître que la principale distinction relative à l'intégration implicite reste dogmatiquement liée à la géométrie, quoiqu'elle ait historiquement surgi de la mécanique, en vue d'une destination plus apparente que réelle. Rapportée d'abord à l'étude abstraite du mouvement des fluides, l'intégration des équations à plusieurs variables indépendantes se trouve finalement rattachée à la classification des surfaces. Elle y constitue le complément normal de la taxonomie géométrique, dont la restriction concrète est surtout due à l'imperfection abstraite de la partie la plus éminente du calcul des relations indirectes.

Après avoir assez expliqué le plan général de la géométrie intégrale, il faut spécialement caractériser chacune des dix leçons normalement consacrées à son domaine subjectif. Rapportées à leur commune destination, elles doivent également instituer d'abord l'intégration des formules, puis son application Domaine subjectif.

à la mesure de l'étendue. Convenablement traitée, la partie abstraite du domaine subjectif de la géométrie intégrale doit seulement comprendre les procédés qui présentent assez d'importance et de difficulté pour être utilement détachés de leurs usages quelconques, en liant à ceux-ci les artifices purement spéciaux.

Rapportée au mode le plus simple de sa destination concrète, toute intégration explicite correspond à la quadrature d'une courbe plane dont l'ordonnée serait égale à la dérivée donnée. Une semblable image est tellement propre à rendre plus nettes, et même plus précises, les principales notions abstraites qu'elle a toujours fourni la dénomination affectée à la partie fondamentale du calcul intégral. Bien que cette peinture générale des opérations algébriques pût aussi s'accomplir d'après les coordonnées polaires, les coordonnées rectilignes la rendent plus simple, et, dès lors, plus claire, en vertu d'une correspondance plus directe entre la figure et la formule. Examinée sous un autre aspect, mais dans le même système, toute intégrale pourrait être géométriquement interprétée comme l'ordonnée d'une courbe dont la tangente formerait avec l'axe un angle déterminé par la dérivée donnée. Représentée ainsi, l'intégration explicite deviendrait mieux comparable à l'intégration implicite, quoique, pour sa propre appréciation, le mode usité soit normalement préférable.

De l'une ou l'autre image, on voit également surgir la nécessité de compléter l'intégrale par l'addition d'une constante arbitraire, qui correspond, soit à l'origine des aires de la courbe donnée, soit à l'ordonnée initiale de la courbe cherchée. On y peut aussi rattacher la notion de l'intégrale définie, algébriquement égale à l'accroissement du résultat entre deux valeurs données de la variable, et géométriquement représentée par l'aire interceptée ou l'ordonnée comprise. Là se combinent les

deux points de vue algébrique et numérique, mais en conservant leur indépendance normale, le même nombre pouvant indifféremment provenir de toutes les intégrations, et la même intégration produire tous les nombres, en faisant convenablement varier les limites.

Examinée comparativement à la différentiation explicite, l'intégration correspondante n'en peut d'abord constituer qu'une simple inversion, d'où résultent ses règles fondamentales. Nous voyons ainsi surgir, de la première loi différentielle, le précepte qui ramène l'intégration des polynômes à celle des monômes, et, de la seconde, la relation générale entre deux cas inverses, dont l'un a pour facteur fini celui qui dans l'autre est différentié. Fondée sur cette mutualité, l'intégration des puissances pourrait immédiatement se ramener à leur différentiation, de manière à faire indirectement ressortir, envers des exposants quelconques, sa liaison à celle des produits. Il importe d'apprécier l'anomalie que présente le résultat général de cette intégration quand l'exposant y devient égal à l'unité soustractive. Alors l'intégrale peut être spécialement obtenue en renversant la différentiation logarithmique, qui la fait directement exprimer par le logarithme de la variable. Tel fut le seul mode adopté pour ce cas exceptionnel jusqu'à ce que le plus philosophe des grands géomètres le fit convenablement rentrer dans la formule générale. On y parvient en reconnaissant qu'elle devient indéterminée, de manière à fournir le résultat spécial d'après le procédé commun à tous les symboles de ce genre.

Nous devons aussi tirer, de la différentiation propre aux deux derniers couples algébriques, le complément général des éléments de l'intégration fondamentale. Il faut alors la faire toujours consister à ramener toutes les autres formules à celles-là, par des transformations ou décompositions qui ne comportent de succès qu'envers les plus simples cas de chaque

espèce. Garantie de toute difficulté propre, la différentiation composée n'exige jamais que le concours des règles adaptées à chacun des éléments qui s'y trouvent combinés. Relativement à l'intégration, l'embarras ne saurait, au contraire, concerner les formules élémentaires, et tous les efforts sont nécessairement destinés à leur rapporter les autres cas. A cet égard, les deux modes propres au calcul des relations indirectes présentent un contraste philosophiquement analogue à celui qui règne entre l'arithmétique et l'algèbre ; de manière à motiver la perfection immédiate des évaluations et des différentiations, comme l'éternelle imperfection des résolutions et des intégrations.

Tous les procédés relatifs à l'intégration des formules ont été suffisamment institués par le principal auxiliaire algébrique du créateur du calcul infinitésimal. Ils n'ont reçu depuis aucun perfectionnement qui puisse jamais infirmer l'arrêt général de la saine philosophie sur les limites nécessaires de nos moyens mathématiques, non moins epuisés à cet égard qu'envers la résolution des équations. Regardée comme une doctrine extrêmement incomplète mais essentiellement close, où l'esprit humain dut bientôt atteindre ses bornes naturelles, l'intégration des formules n'a normalement besoin que d'une coordination rationnelle, après avoir sagement écarté des aspirations vicieuses.

Il faut donc terminer la première des cinq leçons qui la concernent en reproduisant, avec une meilleure opportunité, les réflexions philosophiques déjà spécifiées envers la résolution algébrique des équations. Voilà comment les jeunes disciples de l'Humanité pourront pleinement sentir la destination essentiellement logique de la science fondamentale, où l'imperfection de la doctrine est partout appréciable. Réagissant sur la notion générale du progrès humain, ces indications spéciales tendent à lui procurer plus de précision et même de rectitude. Elles y

dissipent les aspirations indéfinies d'après le cas que sa simplicité rend le plus favorable à ces illusions chez ceux qui ne l'ont pas appréciée comme la source naturelle de la facilité supérieure avec laquelle une culture plus développée dut mieux atteindre les bornes normales. Sans de telles réactions, les jeunes disciples de l'Humanité ne sauraient assez sentir que la vie humaine n'a pas pour but de penser, mais d'agir en vertu d'affections dont le perfectionnement constitue le seul progrès qui puisse jamais être vraiment inépuisable.

Bornée à l'intégration des formules composées des trois premiers couples algébriques, la leçon suivante doit d'abord considérer celles qui, dépourvues de radicaux, constituent le domaine le moins imparfait du calcul intégral. Une application directe des règles élementaires suffit pour les intégrer, quand elles sont exemptes de fraction dont le dénominateur soit polynome. On doit donc regarder cette première branche de l'intégration explicite comme essentiellement relative aux formules fractionnaires, envers lesquelles surgit la seule partie théoriquement satisfaisante du calcul intégral. Nous la voyons spontanément fondée sur le succès immédiat de l'opération quand, après avoir rendu, par la division, le degré du numérateur inférieur à celui du dénominateur, celui-ci n'est que du premier degré, de manière à susciter un logarithme. Il faut donc ramener toutes les fractions à cet état, en les décomposant en autant de parties que le dénominateur contient de facteurs, ainsi devenus propres aux fractions partielles, dont les numérateurs sont des constantes convenablement choisies.

Afin de les déterminer, il suffit de développer la comparaison algébrique, en écartant tout artifice académique ; ce qui doit toujours fournir les équations du premier degré relatives aux coefficients des logarithmes propres à composer l'intégrale totale. Voilà comment l'intégration des fractions dépourvues de

radicaux se trouve normalement subordonnée à la résolution des équations d'un degré quelconque, de manière à répandre sur la base de l'algèbre indirecte, les imperfections propres à l'algèbre directe. Il faut ainsi reconnaître que l'intégration fractionnaire devient finalement illusoire, à moins que toutes les racines du dénominateur ne soient commensurables, ou du moins susceptibles d'être exactement formulées. Toutefois, le succès théorique exige un complément essentiel envers le cas des racines égales, où la décomposition primitive ne saurait fournir assez d'éléments pour équivaloir à la fraction donnée. On fait alors correspondre, à chaque facteur multiple, autant de fractions partielles, à numérateurs constants, que l'indique sa multiplicité, leurs dénominateurs étant ses diverses puissances, depuis la sienne jusqu'à la première.

La distinction entre l'imaginarité des racines et leur réalité ne saurait aucunement affecter une telle opération algébrique, pourvu que toutes soient exactement exprimables. Une préparation spéciale peut cependant convenir aux racines imaginaires, d'après le type spontanément résulté de la différentiation circulaire envers la tangente, où la dérivée est un binome du second degré qui présente ce caractère. Gardant le procédé propre aux racines réelles, il faut seulement modifier la décomposition en donnant aux fractions partielles des dénominateurs du second degré, tandis que leurs numérateurs s'élèvent au premier, de manière à contenir chacun deux coefficients indéterminés. Alors la comparaison algébrique peut toujours déterminer l'ensemble des constantes ainsi liées aux diverses racines, tant réelles qu'imaginaires, chaque couple de celles-ci suscitant une fraction naturellement équivalente à la somme de celles qu'aurait isolément fournies chacune d'elles. Rapprochant les deux modes d'intégration, on voit spontanément naître, surtout d'après le type primitif, la relation fondamentale entre les

deux derniers ordres d'éléments algébriques, rattachée aux séries dans le troisième chapitre.

Convenablement apprécié, ce rapprochement produit la confirmation historique de la notion dogmatique sur l'indépendance nécessaire du point de vue propre au calcul des relations envers celui qui convient au cacul des valeurs. A peine le calcul intégral avait-il distinctement surgi que la liaison des éléments circulaires et logarithmiques fut ainsi découverte, quoiqu'elle soit ensuite restée inaperçue, et surtout stérile pendant quarante ans, faute de hardiesse mathématique envers l'imaginarité. Puisque la systématisation finale de la Logique y fait irrévocablement cesser des scrupules empiriques, elle doit normalement transformer les habitudes trop étroites qu'ils avaient graduellement suscitées. Examinée dans cet esprit, la modification propre au cas d'imaginarité peut entièrement disparaître envers l'intégration fractionnaire, qui dès lors devra toujours se réduire au type fondamental. Les constantes imaginaires ne sauraient jamais offrir d'inconvénients que sous l'aspect numérique, auquel on appliquera les transformations qui lui sont propres. Elles doivent essentiellement consister à ramener au type le plus simple de l'imaginarité toutes les formules composées d'éléments ainsi constitués, à l'aide des propriétés du binome trigonométrique imaginaire et de l'exponentielle correspondante. Nous devons normalement remplacer les modifications de l'intégration fractionnaire envers le cas d'imaginarité par l'explication systématique de ces transformations générales, convenablement appliquées à des exemples caractéristiques, et surtout à l'évaluation des puissances doublement exceptionnelles.

On complète la seconde leçon sur l'intégration explicite en appréciant les principaux artifices destinés à ramener aux fractions les formules qui contiennent des radicaux. Les transfor-

mations que ce cas comporte ne peuvent jamais consister qu'à changer la variable indépendante d'après une équation du premier degré, qui permet de dissiper la radicalité primitive sans en susciter de nouvelles. Il faut d'abord exclure la coexistence de plusieurs radicaux, à moins que les intégrations correspondantes ne soient pleinement séparables, puisque le changement de variable qui convient à l'un ne saurait suffire aux autres que dans des cas trop exceptionnels pour être spécialement considérés. Relativement au radical unique, la transformation n'est normalement possible que lorsqu'il concerne une racine carrée d'une formule du second degré convenablement préparée. Elle peut alors s'accomplir suivant trois modes essentiellement équivalents, dont chacun doit être spécialement préféré selon les cas proposés.

Nous devons normalement terminer cette leçon par un supplément commun aux deux intégrations, fractionnaire et radicale, qu'elle a successivement caractérisées. Une convenable application de la loi relative à l'intégration mutuelle peut successivement réduire aux cas les plus simples de chaque genre l'intégration des formules où la dérivée est composée de deux facteurs, l'un monome d'un degré quelconque, l'autre constituant une puissance d'un binôme. On doit philosophiquement regarder l'importance justement attachée à ce cas imparfaitement accessible comme une confirmation spéciale de la stérilité nécessairement propre à notre génie algébrique, toujours impuissant contre le moindre obstacle. Voilà comment la régénération didactique de la science qui suscita le plus d'orgueil la rend normalement susceptible d'inspirer une humilité sincère et profonde. Alors on sent que la vie humaine ne consiste point à spéculer, et que le meilleur emploi de l'intelligence concerne le domaine moral, envers lequel toutes les études théoriques, et surtout mathématiques, sont seulement préliminaires.

Sous l'empirisme algébrique, les limites nécessaires de nos conceptions abstraites furent confusément senties d'après l'ensemble des antécédents spéciaux, mais en suscitant une irrationnelle appréciation, qui voulut déductivement prouver l'impossibilité de perfectionner l'intégration radicale. Convenablement examinés, ces sophismes sont aussi vicieux que ceux qui concerneraient la résolution algébrique des équations, dont les limites normales ne peuvent être réellement dévoilées que par une suffisante expérience. Une induction sagement établie doit seule fournir aux théoriciens, comme au public, la mesure spéciale des bornes que l'imperfection subjective et les difficultés objectives posent à nos divers succès spéculatifs. Depuis le milieu du dix-huitième siècle, tous les bons esprits ont spontanément limité la résolution algébrique des équations aux quatre degrés complétement institués au seizième siècle, quoique l'impossibilité de résoudre le cinquième degré ne soit ni démontrée ni démontrable. Il faut pareillement apprécier, indépendamment des illusions académiques, les restrictions propres à l'intégration fondamentale, d'après l'irrésistible expérience graduellement résultée des vains efforts que son perfectionnement suscita pendant cinq générations.

Comparée à l'intégration fractionnaire, l'intégration radicale commence à manifester l'accroissement d'imperfection des quadratures à mesure que les formules se composent d'éléments moins directs. A la troisième leçon abstraite sur le domaine subjectif de la géométrie intégrale appartient le principal développement d'une telle appréciation, en intégrant les dérivées composées des deux derniers couples algébriques. Leur intégration reste essentiellement fondée, comme au début, sur l'application successive de la loi de mutualité, qui n'y peut suffire qu'envers les plus simples combinaisons. On doit pourtant renoncer à l'intégration quand elle ne peut être accomplie

ainsi. Rien ne saurait mieux caractériser notre impuissance à surmonter les difficultés abstraites que l'importance graduellement acquise par un expédient aussi borné, faute de conceptions vraiment normales.

On ne peut ainsi réussir envers les exponentielles que lorsqu'elles se rapportent au type le plus élémentaire, combiné seulement avec des puissances dont les exposants soient entiers et même additifs. Une suffisante réitération de la mutualité fait toujours rentrer un produit de ce genre dans le cas où l'intégration devient immédiate. Tel est le seul succès que comporte une classe de formules très-étendue, envers laquelle toute complication de l'exposant empêche d'intégrer. Rien ne peut mieux confirmer la sagesse générale du jugement empirique, systématisé par le positivisme, qui représente les spéculations les plus abstraites comme les moins convenables à notre intelligence. Épuisée dès sa naissance, l'élaboration algébrique n'a jamais suscité des conceptions aussi fécondes que celles qui surgirent envers le domaine moral et poétique, malgré sa difficulté supérieure.

Relativement aux formules logarithmiques, le même mode comporte des résultats équivalents, quand une puissance de la variable en multiplie une de son logarithme, si les deux exposants ne sont ni fractionnaires ni soustractifs. Elles peuvent aussi se ramener au cas exponentiel, d'après un changement convenable de la variable indépendante, en reproduisant, sous d'autres formes, des conditions analogues. L'échange doit plutôt devenir inverse, les logarithmes étant mieux rapprochés des éléments algébriques les plus directs, auxquels ils se lient par la différentiation et l'intégration. Une telle transformation ne saurait d'ailleurs faire aucunement surgir de nouvelles ressources. Sous quelque mode qu'on l'accomplisse, elle devra toujours reproduire des restrictions équivalentes, assez carac-

térisées par l'impossibilité d'intégrer une dérivée égale au rapport de l'exponentielle à son exposant ou réciproque du logarithme de la variable.

Nos moyens sont plus variés, sans que les résultats soient plus étendus, envers les formules trigonométriques, où l'intégration peut-être secondée d'après les transformations propres au dernier couple algébrique. Elle y devient surtout relative aux dérivées composées de deux facteurs, dont chacun consiste en une puissance entière, d'ailleurs additive ou soustractive, du sinus ou du cosinus. Réglée par la mutualité, l'intégration d'un tel produit peut toujours rentrer dans le cas des moindres exposants, de manière à se trouver finalement accomplie envers leurs différentes combinaisons. Vue sous un autre aspect, elle serait aussi réductible au procédé supplémentaire ci-dessus indiqué quant à l'intégration fractionnaire ou radicale. On l'y ferait toujours rentrer en prenant le sinus ou le cosinus pour variable indépendante au lieu de l'arc, sans qu'une telle transformation ait d'autre efficacité que de manifester la corrélation des diverses quadratures, ce qui rend mieux appréciables la connexité des différents couples algébriques. Si les deux exposants sont additifs, l'intégration doit être simplifiée en transformant les puissances trigonométriques en sinus ou cosinus des multiples successifs de l'arc, d'après les propriétés du binôme imaginaire. On applique la même transformation quand l'un des facteurs est remplacé par une exponentielle ou puissance, auquel cas la mutualité peut aussi suffire pour intégrer, pourvu que l'exposant de l'arc soit additif.

Étendue, dans la quatrième leçon, à plusieurs variables, l'intégration des formules y présente un meilleur caractère, en en instituant la réduction toujours possible, de ce cas à celui d'une seule variable. La théorie correspondante est spécialement fondée sur la différentiation des intégrales, qui consiste à diffé-

rentier convenablement la dérivée, en conservant les limites d'intégration. Elle constitue une conséquence générale de la loi relative à l'inversion différentielle, quoiqu'elle puisse être directement établie, mais d'après une considération équivalente. Vue dans son ensemble, cette question suscite le cas où la différentiation de l'intégrale ferait aussi varier ses limites, dont il suffit d'apprécier l'influence isolée, qui doit ensuite concourir avec l'autre, suivant la combinaison toujours propre aux variations infinitésimales. Étendue ainsi, la différentiation des intégrales exige un complément, additif ou soustractif, selon qu'il provient de la limite supérieure ou de l'inférieure : il consiste à multiplier l'intégrale par l'accroissement de sa limite.

Il faut d'abord appliquer cette doctrine à l'intégration des formules seulement composées de deux variables indépendantes, ce qui d'ailleurs constitue le cas ordinaire de pluralité, du moins en géométrie. Gardant une seule des différentielles partielles, on doit directement l'intégrer comme si l'autre variable était constante, pourvu qu'on joigne au résultat un complément conforme à la seconde condition. Nous sommes ainsi conduits à différentier l'intégrale, qui, convenablement retranchée de la dérivée d'abord écartée, fournira la dérivée du complément envers la variable correspondante. Il sera donc déterminé d'après l'intégration de cette différence, qui ne devra finalement dépendre que de termes uniquement relatifs à la seconde variable dans la différentielle primitivement omise. Si l'on exprime l'indépendance nécessaire d'un tel complément envers l'autre variable, on reproduit la condition d'intégrabilité directement émanée de la loi d'inversion, sur laquelle repose cette réduction générale.

L'intégration collective peut ensuite s'étendre à toute pluralité de variables, en faisant toujours rentrer chaque degré dans le précédent, de la même manière qu'on a d'abord ramené le

cas fondamental à la considération d'une variable unique. Une telle extension fait graduellement dépendre la détermination du complément d'une combinaison croissante d'intégrations, dont chacune est seulement relative à l'une des variables simultanées. Convenablement envisagée, la formule générale de ce complément fera, comme ci-dessus, découvrir les conditions d'intégrabilité, d'après son indépendance relative. Une application directe de la loi d'inversion peut toujours suffire envers ces conditions, dont le nombre équivaut à celui des combinaisons binaires des variables libres. Sous leur influence, l'intégration destinée à déterminer le complément ne sera finalement relative qu'aux termes isolément composés de chaque variable correspondante à la différentielle partielle successivement considérée.

Dans sa cinquième et dernière leçon, l'intégration explicite doit normalement recevoir le double supplément, d'abord algébrique, puis numérique, qu'exige son imperfection générale, qui ne saurait d'ailleurs être ainsi compensée sous aucun aspect. Étendue au calcul intégral, l'intervention des séries y peut toujours permettre d'intégrer une formule quelconque, quoique la loi des coefficients, dont la découverte caractérise le principal succès d'une telle opération, y soit moins accessible qu'envers les autres transformations de ce genre. Bien appréciée, cette nouvelle application comporte, comme les précédentes, divers modes d'institution, soit généraux, soit spéciaux, qu'il faut sommairement juger en étendant les notions antérieures. A la règle la plus usuelle sur le développement en série, appartient la détermination d'une formule dont la dérivée est seule donnée, ce qui suffit pour y calculer tous les termes, en ne laissant indéterminé que le premier, ainsi devenu la constante arbitraire de l'intégrale. Toutefois, la série directement relative à la subordination d'une formation quelconque envers l'ensemble de ses dérivées fournirait un mode plus rationnel

f'après son caractère purement algébrique, si son application ne faisait ordinairement surgir une expression confusément ordonnée.

On doit normalement préférer, dans l'intégration spéciale, la méthode déjà reconnue généralement supérieure quant aux formations immédiatement données, en adaptant l'institution du développement aux caractères de chaque cas. Pour les séries de puissances, l'intégration ne fait aucunement croître les difficultés relatives à la loi des coefficients, qu'il suffit donc de connaître envers la dérivée, dont la transformation permet aussitôt d'intégrer. À l'égard des développements ordonnés selon les sinus et cosinus des multiples successifs ou suivant les exponentielles équivalentes, la correspondance entre l'intégrale et la dérivée serait presque aussi simple, de manière à comporter le même mode, qui conviendrait à la plupart des autres séries. Convenablement jugé, le succès, rarement possible envers les formules immédiatement connues, doit ici devenir plus exceptionnel, quelque simple surcroît que l'intégration apporte à la complication des coefficients. On peut cependant regarder un tel supplément comme fort précieux en vertu de sa généralité spontanée, sauf les précautions spécialement conformes à l'usage numérique des séries.

Complétant, sous l'aspect arithmétique, l'ensemble des procédés relatifs à l'intégration explicite, l'évaluation directe des intégrales définies comporte deux modes, l'un général, l'autre spécial qu'il faut successivement apprécier. Le premier ne peut jamais être qu'approximatif, même envers les intégrales dont la valeur eût été commensurable si l'opération algébrique s'était accomplie. Examiné sous l'aspect concret, il comprend l'ensemble des procédés relatifs à la quadrature approchée des courbes planes en coordonnées rectilignes. Remplaçant l'arc par une suite de cordes, on mesure l'aire en ajoutant les tra-

pèzes correspondants, auxquels on peut d'ailleurs substituer les rectangles de mêmes bases, dont la sommation, alternativement inférieure ou supérieure au résultat, permet d'apprécier et de graduer l'approximation. Convenablement généralisée, cette opération pourrait aussi s'accomplir à l'aide d'éléments paraboliques, ou propres à d'autres figures, exactement carrables, de manière à mieux accélérer l'estimation, qui toujours exige une discussion préalable envers les états exceptionnels de l'ordonnée et de la tangente.

Tel est le seul mode vraiment général que comporte l'évaluation, nécessairement approximative, des intégrales définies, quand l'intégration algébrique ne peut être aucunement accomplie. Une autre classe de questions, où les idées de relation et de valeur se trouvent spontanément combinées, a graduellement surgi, pendant que l'évolution mathématique se terminait, envers la détermination spéciale, mais exacte, de certaines intégrales définies. Toutefois, cet extrême complément de l'intégration fondamentale n'ayant pu se développer que sous le plein essor de l'anarchie académique, on doit peu s'étonner qu'il ait suscité tant d'ignobles travaux. Examinées philosophiquement, ces spéculations sont les plus particulières et les moins disciplinables que puisse offrir l'ensemble du domaine mathématique, puisque leur succès est autant relatif à la valeur des limites considérées qu'à la nature de la formule proposée. Les artifices correspondants ne sauraient ici mériter aucune mention, quand même ils seraient plus ingénieux et plus puissants. L'appréciation du petit nombre de cas qui comportent un véritable interêt doit naturellement appartenir aux études spécialement susceptibles de les utiliser. Exprimée ci-dessus envers l'intégration algébrique, cette règle didactique est surtout applicable à l'intégration arithmétique, même la mieux instituée.

Examinée sous l'aspect synthétique, l'intégration définie, qui fit surgir des divagations si méprisables avant d'être convenablement disciplinée, fournit au positivisme le germe mathématique d'une appréciation normalement applicable à l'ensemble des spéculations pratiques. L'impossibilité d'intégrer correspond, philosophiquement, à l'ignorance des lois particulières envers les phénomènes composés, tandis que la différentiation toujours possible représente notre aptitude à découvrir les lois générales à l'égard des événements simples. Expliquée d'après la synthèse universelle, l'intégration définie devient normalement comparable à la détermination pratique des résultats concrets indépendamment de la connaissance théorique des principes abstraits. Convenablement dirigé, le génie empirique peut quelquefois suppléer, par des efforts spéciaux, aux notions générales que la sagesse dogmatique reste souvent incapable de fournir. Telle est notre unique ressource envers les cas qui peuvent suffisamment stimuler nos spéculations pratiques, et dont le domaine mathématique doit normalement offrir le type rudimentaire à l'égard des intégrales définies.

Une appréciation pleinement philosophique représente la logique infinitésimale comme nécessairement commune, sous divers modes, à l'ensemble du système encyclopédique, ainsi que je l'ai ci-dessus expliqué. Nous devons donc retrouver aussi, pour toutes les spéculations positives, l'analogue quelconque du supplément général que l'intégration définie a spontanément fourni dans le plus simple domaine. Rendue autant universelle que l'intégration algébrique, l'intégration arithmétique, où tous les aspects mathématiques doivent intimement coexister, est normalement assimilée aux efforts directement synthétiques envers les questions dépourvues de préparation analytique. On tente de déterminer les résultats pratiques sans connaître les principes théoriques, dans les cas qui peuvent

réellement offrir assez d'intérêt. La même disposition convient, en Logique, à l'égard des questions, géométriques ou mécaniques, dont la solution générale nous reste interdite, pourvu qu'elles méritent de tels efforts.

Réciproquement envisagée, cette similitude est directement propre à discipliner l'esprit mathématique envers les spéculations qui comportaient les divagations les plus dégradantes, quand les algébristes choisissaient les formules et les limites les plus favorables à leurs frivoles succès. Assimilée à l'estimation pratique, l'intégration arithmétique ne représente que le moindre essor d'une marche partout applicable, et surtout destinée au domaine le plus éminent, comme l'intégration algébrique comparée à la synthèse théorique. Nous avons déjà reconnu l'incompétence nécessaire des purs géomètres envers l'appréciation totale de la méthode transcendante, qu'il faut normalement juger d'après le cas le plus complet. Généralement applicables aux divers aspects de la logique infinitésimale, cette explication doit aussi s'étendre à son supplément numérique. Elle y fait irrévocablement surgir, sous l'impulsion synthétique de la religion positive, une discipline analogue à celle de toutes les spéculations empiriques, où les efforts sont toujours rapportés à leur destination spéciale, et dirigés par les praticiens correspondants.

Fondée sur l'intégration explicite, la géométrie subjective peut directement instituer la solution générale des diverses questions relatives à la mesure rationnelle de l'étendue. Il faut les regarder comme normalement équivalentes sous l'aspect abstrait, quoique leur appréciation concrète oblige de les séparer. Elles doivent d'abord former deux groupes, dont l'un concerne les lignes et l'autre les surfaces ; ce qui fait abstraitement surgir la distinction entre les intégrales simples et les intégrales doubles, respectivement propres aux deux genres de

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] diffé- [illegible] est à [illegible] du

système polaire, qui d'ailleurs comporte une formulation directe, en traitant les éléments comme circulaires. Il rend la dérivée de l'aire envers l'angle proportionnelle au carré du rayon ; ce qui permet autant de succès que dans le système rectiligne. Telles sont les deux formules générales qu'exige la mesure des aires planes, qui pourrait ainsi fournir les lois spéciales de tous les cas si l'intégration était toujours accessible. Elle fait uniformément retrouver les solutions déjà résultées des méthodes particulières ; elle résout plusieurs problèmes que celles-ci n'auraient jamais abordés, et dont les principaux doivent être spécialement signalés aux jeunes disciples de l'Humanité.

D'après l'imperfection propre au calcul, la géométrie se trouve nécessairement incapable d'accomplir la plupart des recherches qu'elle institue. Il faut même reconnaître que l'impuissance de l'algèbre directe se combine avec l'insuffisance de l'algèbre indirecte pour entraver les quadratures, et par suite toutes les autres mesures rationnelles de l'étendue. Car toute quadrature exige que l'équation de la courbe proposée soit normalement résolue envers l'ordonnée, de manière à nous interdire, en vertu de ce seul préambule, la plupart des élaborations géométriques. Après que la difficulté préliminaire est convenablement surmontée, les entraves propres à l'intégration font finalement avorter nos projets, même envers des équations extrêmement simples en apparence. Telles sont ensuite les imperfections des procédés supplémentaires que nous pouvons rarement décider si l'aire comprise entre l'ensemble d'une courbe et son asymptote est infinie, comme dans l'hyperbole ordinaire, ou finie, comme dans la cissoïde, triple du cercle générateur. Un pareil concours d'entraves doit spécialement confirmer l'appréciation générale du véritable but de la géométrie subjective, que ses deux fondateurs purent seuls sentir

jusqu'à l'avénement du positivisme. Systématisant les méthodes, sans développer les doctrines, la transformation des problèmes concrets en recherches abstraites fut surtout destinée à dégager l'esprit humain des préoccupations mathématiques, en lui procurant une préparation convenable à son principal essor.

A l'examen des quadratures planes, doit normalement succéder celui des rectifications, objet spécial de la seconde leçon directe de géométrie intégrale. L'ordre inverse pourrait d'abord sembler préférable, si la comparaison dogmatique ne venait pleinement confirmer, d'après les équations différentielles des deux problèmes, la marche générale de l'élaboration historique, où la mesure des aires a toujours précédé celle des longueurs. Tel est le contraste des deux questions que, dès le début de l'essor abstrait, on carra l'ellipse d'après le cercle, tandis que la loi suivant laquelle sa circonférence dépend de ses axes restera constamment ignorée. Avant la création du calcul infinitésimal, on avait essentiellement représenté la diversité des deux problèmes en assimilant, sous l'impulsion cartésienne, la rectification de toute courbe à la quadrature plane où l'ordonnée serait la sécante de l'inclinaison de la tangente sur la base du segment. Rapportant cette sécante à la dérivée, suivant la loi des tangentes, on ferait ainsi surgir l'équation différentielle des rectifications, si sa formation directe n'était pas spontanée en coordonnées rectilignes, et même polaires, d'après le théorème théocratique, que la ligne soit plane ou non.

La comparaison de cette équation avec celle des quadratures suffit pour expliquer la diversité concrète des deux cas : car la géométrie subjective gradue les difficultés spéciales d'après la complication des formules générales. Elle fait d'abord sentir que, sauf des exceptions extrêmement rares, la rectification d'une courbe doit toujours être plus difficile que sa quadra-

ture, même en coordonnées rectilignes ; puisque la présence d'un radical y gêne l'intégration, jusque dans les moindres cas. Alors on peut aussi juger l'imperfection plus prononcée des rectifications propres aux courbes non planes, où deux dérivées concourent à compliquer le radical. L'intégration n'a jamais dépassé, sous cet aspect, la rectification spontanée de l'hélice, sauf envers les cas arbitrairement composés pour exercer les algébristes. Elle est moins stérile à l'égard des courbes planes où les principaux résultats furent pourtant obtenus avant qu'elle surgit : la seule acquisition vraiment intéressante qui lui soit effectivement due concerne la spirale que le grand géomètre avait carrée sans la rectifier.

Il faut finalement rapporter la géométrie subjective à sa destination essentiellement logique, en évitant toute exagération envers son aptitude scientifique, qui ne saurait jamais dispenser des méthodes propres à la géométrie objective. Nous devons, historiquement, et, par suite, dogmatiquement, regarder l'évolution géométrique comme normalement destinée, dans son ensemble, à développer nos forces théoriques d'après leur plus simple exercice. Notre tendance à négliger le but pour les moyens aurait indéfiniment prolongé ce début nécessaire si l'impulsion philosophique n'était venue, en temps opportun, systématiser le travail scientifique, afin d'appliquer au domaine supérieur des facultés assez préparées en bas. Épuisées, d'après l'ensemble des études accomplies depuis l'origine de la transition occidentale, les recherches spéciales de la géométrie objective semblèrent d'abord ranimées par la législation surtout destinée à les écarter, vu qu'elle surgit sous une anarchie qu'elle ne pouvait immédiatement surmonter. Suspendue jusqu'à l'avénement de la synthèse universelle, leur discipline systématique fut irrévocablement établie quand le positivisme subordonna la science à la philosophie au nom de la religion.

Graduant les études géométriques d'après les conceptions algébriques, cette discipline divise la géométrie transcendante, tant intégrale que différentielle, en deux parties essentielles, suivant que les équations subjectives y sont du premier ordre ou du second. On doit pourtant reconnaître que cette distinction est moins prononcée envers les questions finales, qui peuvent toujours rentrer les unes dans les autres, qu'à l'égard des spéculations préparatoires, dont la diversité concrète interdit une telle fusion. Reproduite algébriquement, cette appréciation s'exprime conformément à la nature des équations du second ordre que font respectivement surgir la géométrie différentielle et la géométrie intégrale. Généralisée convenablement, l'intégration explicite est autant applicable aux secondes dérivées qu'aux premières, sauf les difficultés d'exécution qui doivent habituellement résulter du redoublement. Elle fait donc ranger la mesure des surfaces après celle des lignes comme devant être plus difficile algébriquement, sans que sa nature soit géométriquement différente ; tandis que l'étude de la courbure devait radicalement différer de celle du simple contact.

On est ainsi conduit à placer, entre les deux parties essentielles du domaine subjectif de la géométrie intégrale, le cas où l'équation différentielle reste du premier ordre quoiqu'elle concerne des surfaces, parce que leur forme les a suffisamment simplifiées d'après une seule différentiation. D'abord appliquée aux cylindres quelconques, pourvu qu'ils ne soient pas tronqués, cette exception n'y saurait jamais concerner que la quadrature, puisque la cubature est toujours accomplie par la géométrie préliminaire, en partant du prisme. On doit pareillement écarter l'aire du cylindre droit qui n'offre aucune difficulté, quelle que soit la base, comme le troisième chapitre l'a spécialement noté. Réduite au cylindre oblique, la question se trouve subjectivement résolue quand on a décomposé la base

en éléments rectilignes, d'où procèdent, selon les génératrices, des parallélogrammes ayant un côté commun, qui constituent les différentielles premières de l'aire cherchée. Elle doit ainsi dépendre d'une intégration analogue à celle des rectifications, mais plus compliquée, au point de ne pas réussir envers le cercle : l'expression des éléments de la base s'y combine avec leur inclinaison variable sur la direction fixe des génératrices. Nous devons aussi considérer la même recherche envers les cônes à base plane, où, quelle que soit celle-ci, la cubature se trouve immédiatement accomplie, d'après la pyramide ; tandis que la quadrature n'est d'abord connue qu'à l'égard du type droit et circulaire. Une systématisation subjective ne rend pas plus complète la solution objective, quoiqu'elle en fasse mieux apprécier la difficulté, suivant l'échelle uniformément surgie de l'intégration. Établie de la même manière que pour les cylindres l'équation différentielle des aires coniques suscite plus de difficultés algébriques, parce que la variation, de longueur et de direction, alors propre aux génératrices, introduit une double complication. Elle permet, cependant, de mieux apprécier la comparaison générale de ce problème au type fondamental des quadratures planes, en y dispensant d'une double intégration, qui serait d'ailleurs confuse dans un tel cas. Sous l'aspect philosophique, un pareil examen fait davantage ressortir l'insuffisance de nos moyens théoriques, et la nécessité de ne jamais renoncer aux méthodes particulières envers les questions spéciales qui pourraient vraiment mériter notre sollicitude.

Fondée sur une décomposition convenable, la double mesure des corps ronds constitue la principale des trois branches propres au domaine exceptionnel qui suscite la troisième leçon directe de géométrie intégrale. A l'aide de plans perpendiculaires à l'axe, on divise l'aire en éléments coniques, et le volume en éléments cylindriques, dont la mesure immédiate fournit une

rentier convenablement la dérivée, en conservant les limites d'intégration. Elle constitue une conséquence générale de la loi relative à l'inversion différentielle, quoiqu'elle puisse être directement établie, mais d'après une considération équivalente. Vue dans son ensemble, cette question suscite le cas où la différentiation de l'intégrale ferait aussi varier ses limites, dont il suffit d'apprécier l'influence isolée, qui doit ensuite concourir avec l'autre, suivant la combinaison toujours propre aux variations infinitésimales. Étendue ainsi, la différentiation des intégrales exige un complément, additif ou soustractif, selon qu'il provient de la limite supérieure ou de l'inférieure : il consiste à multiplier l'intégrale par l'accroissement de sa limite.

Il faut d'abord appliquer cette doctrine à l'intégration des formules seulement composées de deux variables indépendantes, ce qui d'ailleurs constitue le cas ordinaire de pluralité, du moins en géométrie. Gardant une seule des différentielles partielles, on doit directement l'intégrer comme si l'autre variable était constante, pourvu qu'on joigne au résultat un complément conforme à la seconde condition. Nous sommes ainsi conduits à différentier l'intégrale, qui, convenablement retranchée de la dérivée d'abord écartée, fournira la dérivée du complément envers la variable correspondante. Il sera donc déterminé d'après l'intégration de cette différence, qui ne devra finalement dépendre que de termes uniquement relatifs à la seconde variable dans la différentielle primitivement omise. Si l'on exprime l'indépendance nécessaire d'un tel complément envers l'autre variable, on reproduit la condition d'intégrabilité directement émanée de la loi d'inversion, sur laquelle repose cette réduction générale.

L'intégration collective peut ensuite s'étendre à toute pluralité de variables, en faisant toujours rentrer chaque degré dans le précédent, de la même manière qu'on a d'abord ramené le

cas fondamental à la considération d'une variable unique. Une telle extension fait graduellement dépendre la détermination du complément d'une combinaison croissante d'intégrations, dont chacune est seulement relative à l'une des variables simultanées. Convenablement envisagée, la formule générale de ce complément fera, comme ci-dessus, découvrir les conditions d'intégrabilité, d'après son indépendance relative. Une application directe de la loi d'inversion peut toujours suffire envers ces conditions, dont le nombre équivaut à celui des combinaisons binaires des variables libres. Sous leur influence, l'intégration destinée à déterminer le complément ne sera finalement relative qu'aux termes isolément composés de chaque variable correspondante à la différentielle partielle successivement considérée.

Dans sa cinquième et dernière leçon, l'intégration explicite doit normalement recevoir le double supplément, d'abord algébrique, puis numérique, qu'exige son imperfection générale, qui ne saurait d'ailleurs être ainsi compensée sous aucun aspect. Étendue au calcul intégral, l'intervention des séries y peut toujours permettre d'intégrer une formule quelconque, quoique la loi des coefficients, dont la découverte caractérise le principal succès d'une telle opération, y soit moins accessible qu'envers les autres transformations de ce genre. Bien appréciée, cette nouvelle application comporte, comme les précédentes, divers modes d'institution, soit généraux, soit spéciaux, qu'il faut sommairement juger en étendant les notions antérieures. A la règle la plus usuelle sur le développement en série, appartient la détermination d'une formule dont la dérivée est seule donnée, ce qui suffit pour y calculer tous les termes, en ne laissant indéterminé que le premier, ainsi devenu la constante arbitraire de l'intégrale. Toutefois, la série directement relative à la subordination d'une formation quelconque envers l'ensemble de ses dérivées fournirait un mode plus rationnel

d'après son caractère purement algébrique, si son application ne faisait ordinairement surgir une expression confusément ordonnée.

On doit normalement préférer, dans l'intégration spéciale, la méthode déjà reconnue généralement supérieure quant aux formations immédiatement données, en adaptant l'institution du développement aux caractères de chaque cas. Pour les séries de puissances, l'intégration ne fait aucunement croître les difficultés relatives à la loi des coefficients, qu'il suffit donc de connaître envers la dérivée, dont la transformation permet aussitôt d'intégrer. A l'égard des développements ordonnés selon les sinus et cosinus des multiples successifs ou suivant les exponentielles équivalentes, la correspondance entre l'intégrale et la dérivée serait presque aussi simple, de manière à comporter le même mode, qui conviendrait à la plupart des autres séries. Convenablement jugé, le succès, rarement possible envers les formules immédiatement connues, doit ici devenir plus exceptionnel, quelque faible surcroît que l'intégration apporte à la complication des coefficients. On peut cependant regarder un tel supplément comme fort précieux en vertu de sa généralité spontanée, sauf les précautions spécialement conformes à l'usage numérique des séries.

Complétant, sous l'aspect arithmétique, l'ensemble des procédés relatifs à l'intégration explicite, l'évaluation directe des intégrales définies comporte deux modes, l'un général, l'autre spécial qu'il faut successivement apprécier. Le premier ne peut jamais être qu'approximatif, même envers les intégrales dont la valeur eût été commensurable si l'opération algébrique s'était accomplie. Examiné sous l'aspect concret, il comprend l'ensemble des procédés relatifs à la quadrature approchée des courbes planes en coordonnées rectilignes. Remplaçant l'arc par une suite de cordes, on mesure l'aire en ajoutant les tra-

pèzes correspondants, auxquels on peut d'ailleurs substituer les rectangles de mêmes bases, dont la sommation, alternativement inférieure ou supérieure au résultat, permet d'apprécier et de graduer l'approximation. Convenablement généralisée, cette opération pourrait aussi s'accomplir à l'aide d'éléments paraboliques, ou propres à d'autres figures, exactement carrables, de manière à mieux accélérer l'estimation, qui toujours exige une discussion préalable envers les états exceptionnels de l'ordonnée et de la tangente.

Tel est le seul mode vraiment général que comporte l'évaluation, nécessairement approximative, des intégrales définies, quand l'intégration algébrique ne peut être aucunement accomplie. Une autre classe de questions, où les idées de relation et de valeur se trouvent spontanément combinées, a graduellement surgi, pendant que l'évolution mathématique se terminait, envers la détermination spéciale, mais exacte, de certaines intégrales définies. Toutefois, cet extrême complément de l'intégration fondamentale n'ayant pu se développer que sous le plein essor de l'anarchie académique, on doit peu s'étonner qu'il ait suscité tant d'ignobles travaux. Examinées philosophiquement, ces spéculations sont les plus particulières et les moins disciplinables que puisse offrir l'ensemble du domaine mathématique, puisque leur succès est autant relatif à la valeur des limites considérées qu'à la nature de la formule proposée. Les artifices correspondants ne sauraient ici mériter aucune mention, quand même ils seraient plus ingénieux et plus puissants. L'appréciation du petit nombre de cas qui comportent un véritable interêt doit naturellement appartenir aux études spécialement susceptibles de les utiliser. Exprimée ci-dessus envers l'intégration algébrique, cette règle didactique est surtout applicable à l'intégration arithmétique, même la mieux instituée.

Examinée sous l'aspect synthétique, l'intégration définie, qui fit surgir des divagations si méprisables avant d'être convenablement disciplinée, fournit au positivisme le germe mathématique d'une appréciation normalement applicable à l'ensemble des spéculations pratiques. L'impossibilité d'intégrer correspond, philosophiquement, à l'ignorance des lois particulières envers les phénomènes composés, tandis que la différentiation toujours possible représente notre aptitude à découvrir les lois générales à l'égard des événements simples. Expliquée d'après la synthèse universelle, l'intégration définie devient normalement comparable à la détermination pratique des résultats concrets indépendamment de la connaissance théorique des principes abstraits. Convenablement dirigé, le génie empirique peut quelquefois suppléer, par des efforts spéciaux, aux notions générales que la sagesse dogmatique reste souvent incapable de fournir. Telle est notre unique ressource envers les cas qui peuvent suffisamment stimuler nos spéculations pratiques, et dont le domaine mathématique doit normalement offrir le type rudimentaire à l'égard des intégrales définies.

Une appréciation pleinement philosophique représente la logique infinitésimale comme nécessairement commune, sous divers modes, à l'ensemble du système encyclopédique, ainsi que je l'ai ci-dessus expliqué. Nous devons donc retrouver aussi, pour toutes les spéculations positives, l'analogue quelconque du supplément général que l'intégration définie a spontanément fourni dans le plus simple domaine. Rendue autant universelle que l'intégration algébrique, l'intégration arithmétique, où tous les aspects mathématiques doivent intimement coexister, est normalement assimilée aux efforts directement synthétiques envers les questions dépourvues de préparation analytique. On tente de déterminer les résultats pratiques sans connaître les principes théoriques, dans les cas qui peuvent

réellement offrir assez d'intérêt. La même disposition convient, en Logique, à l'égard des questions, géométriques ou mécaniques, dont la solution générale nous reste interdite, pourvu qu'elles méritent de tels efforts.

Réciproquement envisagée, cette similitude est directement propre à discipliner l'esprit mathématique envers les spéculations qui comportaient les divagations les plus dégradantes, quand les algébristes choisissaient les formules et les limites les plus favorables à leurs frivoles succès. Assimilée à l'estimation pratique, l'intégration arithmétique ne représente que le moindre essor d'une marche partout applicable, et surtout destinée au domaine le plus éminent, comme l'intégration algébrique comparée à la synthèse théorique. Nous avons déjà reconnu l'incompétence nécessaire des purs géomètres envers l'appréciation totale de la méthode transcendante, qu'il faut normalement juger d'après le cas le plus complet. Généralement applicables aux divers aspects de la logique infinitésimale, cette explication doit aussi s'étendre à son supplément numérique. Elle y fait irrévocablement surgir, sous l'impulsion synthétique de la religion positive, une discipline analogue à celle de toutes les spéculations empiriques, où les efforts sont toujours rapportés à leur destination spéciale, et dirigés par les praticiens correspondants.

Fondée sur l'intégration explicite, la géométrie subjective peut directement instituer la solution générale des diverses questions relatives à la mesure rationnelle de l'étendue. Il faut les regarder comme normalement équivalentes sous l'aspect abstrait, quoique leur appréciation concrète oblige de les séparer. Elles doivent d'abord former deux groupes, dont l'un concerne les lignes et l'autre les surfaces ; ce qui fait abstraitement surgir la distinction entre les intégrales simples et les intégrales doubles, respectivement propres aux deux genres de

mesure. Fondé sur les mêmes motifs, un ordre intermédiaire lie ces deux classes, d'après les cas qui n'exigent qu'une seule intégration, quoiqu'ils concernent les surfaces : ces exceptions ont assez d'importance, surtout envers les corps ronds, pour mériter un examen spécial. Si l'on partage le groupe initial en quadratures et rectifications, puis le groupe final en cubatures et quadratures, on distribue le domaine subjectif de la géométrie intégrale entre les cinq leçons qui lui sont directement consacrées.

Examinées comparativement, d'après leur équivalence normale, ces cinq classes de questions doivent être principalement rapportées à la mesure des aires planes en coordonnées rectilignes. Les études qui la concernent formèrent le meilleur type des travaux destinés à préparer l'institution générale de la géométrie intégrale, surtout chez son précurseur britannique. Dans l'éducation individuelle, il faut toujours caractériser l'ensemble des mémorables tentatives ainsi surgies pour l'évolution collective sous l'impulsion cartésienne : mon traité spécial les a suffisamment indiquées. Elles instituèrent, envers les courbes binomes, une quadrature essentiellement équivalente à l'intégration des puissances, et rattachèrent à ce type beaucoup de figures plus compliquées, d'après un principe qui correspond à la réduction générale des polynomes aux monomes. Rapportée, dès sa naissance, à sa meilleure destination, l'institution des séries étendit ce domaine autant que possible, de manière à faire déjà surgir des solutions complètes dans les cas assez favorables.

Une fois posée en cordonnées rectilignes, l'équation différentielle du problème des quadratures, où l'ordonnée est la dérivée de l'aire, peut être aisément formulée envers tout autre système, d'après les transformations convenables. Nous n'avons normalement besoin d'accomplir ce passage qu'à l'égard du

système polaire, qui d'ailleurs comporte une formulation directe, en traitant les éléments comme circulaires. Il rend la dérivée de l'aire envers l'angle proportionnelle au carré du rayon ; ce qui permet autant de succès que dans le système rectiligne. Telles sont les deux formules générales qu'exige la mesure des aires planes, qui pourrait ainsi fournir les lois spéciales de tous les cas si l'intégration était toujours accessible. Elle fait uniformément retrouver les solutions déjà résultées des méthodes particulières ; elle résout plusieurs problèmes que celles-ci n'auraient jamais abordés, et dont les principaux doivent être spécialement signalés aux jeunes disciples de l'Humanité.

D'après l'imperfection propre au calcul, la géométrie se trouve nécessairement incapable d'accomplir la plupart des recherches qu'elle institue. Il faut même reconnaître que l'impuissance de l'algèbre directe se combine avec l'insuffisance de l'algèbre indirecte pour entraver les quadratures, et par suite toutes les autres mesures rationnelles de l'étendue. Car toute quadrature exige que l'équation de la courbe proposée soit normalement résolue envers l'ordonnée, de manière à nous interdire, en vertu de ce seul préambule, la plupart des élaborations géométriques. Après que la difficulté préliminaire est convenablement surmontée, les entraves propres à l'intégration font finalement avorter nos projets, même envers des équations extrêmement simples en apparence. Telles sont ensuite les imperfections des procédés supplémentaires que nous pouvons rarement décider si l'aire comprise entre l'ensemble d'une courbe et son asymptote est infinie, comme dans l'hyperbole ordinaire, ou finie, comme dans la cissoïde, triple du cercle générateur. Un pareil concours d'entraves doit spécialement confirmer l'appréciation générale du véritable but de la géométrie subjective, que ses deux fondateurs purent seuls sentir

jusqu'à l'avénement du positivisme. Systématisant les méthodes, sans développer les doctrines, la transformation des problèmes concrets en recherches abstraites fut surtout destinée à dégager l'esprit humain des préoccupations mathématiques, en lui procurant une préparation convenable à son principal essor.

A l'examen des quadratures planes, doit normalement succéder celui des rectifications, objet spécial de la seconde leçon directe de géométrie intégrale. L'ordre inverse pourrait d'abord sembler préférable, si la comparaison dogmatique ne venait pleinement confirmer, d'après les équations différentielles des deux problèmes, la marche générale de l'élaboration historique, où la mesure des aires a toujours précédé celle des longueurs. Tel est le contraste des deux questions que, dès le début de l'essor abstrait, on carra l'ellipse d'après le cercle, tandis que la loi suivant laquelle sa circonférence dépend de ses axes restera constamment ignorée. Avant la création du calcul infinitésimal, on avait essentiellement représenté la diversité des deux problèmes en assimilant, sous l'impulsion cartésienne, la rectification de toute courbe à la quadrature plane où l'ordonnée serait la sécante de l'inclinaison de la tangente sur la base du segment. Rapportant cette sécante à la dérivée, suivant la loi des tangentes, on ferait ainsi surgir l'équation différentielle des rectifications, si sa formation directe n'était pas spontanée en coordonnées rectilignes, et même polaires, d'après le théorème théocratique, que la ligne soit plane ou non.

La comparaison de cette équation avec celle des quadratures suffit pour expliquer la diversité concrète des deux cas : car la géométrie subjective gradue les difficultés spéciales d'après la complication des formules générales. Elle fait d'abord sentir que, sauf des exceptions extrêmement rares, la rectification d'une courbe doit toujours être plus difficile que sa quadra-

ture, même en coordonnées rectilignes ; puisque la présence d'un radical y gêne l'intégration, jusque dans les moindres cas. Alors on peut aussi juger l'imperfection plus prononcée des rectifications propres aux courbes non planes, où deux dérivées concourent à compliquer le radical. L'intégration n'a jamais dépassé, sous cet aspect, la rectification spontanée de l'hélice, sauf envers les cas arbitrairement composés pour exercer les algébristes. Elle est moins stérile à l'égard des courbes planes où les principaux résultats furent pourtant obtenus avant qu'elle surgit : la seule acquisition vraiment intéressante qui lui soit effectivement due concerne la spirale que le grand géomètre avait carrée sans la rectifier.

Il faut finalement rapporter la géométrie subjective à sa destination essentiellement logique, en évitant toute exagération envers son aptitude scientifique, qui ne saurait jamais dispenser des méthodes propres à la géométrie objective. Nous devons, historiquement, et, par suite, dogmatiquement, regarder l'évolution géométrique comme normalement destinée, dans son ensemble, à développer nos forces théoriques d'après leur plus simple exercice. Notre tendance à négliger le but pour les moyens aurait indéfiniment prolongé ce début nécessaire si l'impulsion philosophique n'était venue, en temps opportun, systématiser le travail scientifique, afin d'appliquer au domaine supérieur des facultés assez préparées en bas. Épuisées, d'après l'ensemble des études accomplies depuis l'origine de la transition occidentale, les recherches spéciales de la géométrie objective semblèrent d'abord ranimées par la législation surtout destinée à les écarter, vu qu'elle surgit sous une anarchie qu'elle ne pouvait immédiatement surmonter. Suspendue jusqu'à l'avénement de la synthèse universelle, leur discipline systématique fut irrévocablement établie quand le positivisme subordonna la science à la philosophie au nom de la religion.

Graduant les études géométriques d'après les conceptions algébriques, cette discipline divise la géométrie transcendante, tant intégrale que différentielle, en deux parties essentielles, suivant que les équations subjectives y sont du premier ordre ou du second. On doit pourtant reconnaître que cette distinction est moins prononcée envers les questions finales, qui peuvent toujours rentrer les unes dans les autres, qu'à l'égard des spéculations préparatoires, dont la diversité concrète interdit une telle fusion. Reproduite algébriquement, cette appréciation s'exprime conformément à la nature des équations du second ordre que font respectivement surgir la géométrie différentielle et la géométrie intégrale. Généralisée convenablement, l'intégration explicite est autant applicable aux secondes dérivées qu'aux premières, sauf les difficultés d'exécution qui doivent habituellement résulter du redoublement. Elle fait donc ranger la mesure des surfaces après celle des lignes comme devant être plus difficile algébriquement, sans que sa nature soit géométriquement différente ; tandis que l'étude de la courbure devait radicalement différer de celle du simple contact.

On est ainsi conduit à placer, entre les deux parties essentielles du domaine subjectif de la géométrie intégrale, le cas où l'équation différentielle reste du premier ordre quoiqu'elle concerne des surfaces, parce que leur forme les a suffisamment simplifiées d'après une seule différentiation. D'abord appliquée aux cylindres quelconques, pourvu qu'ils ne soient pas tronqués, cette exception n'y saurait jamais concerner que la quadrature, puisque la cubature est toujours accomplie par la géométrie préliminaire, en partant du prisme. On doit pareillement écarter l'aire du cylindre droit qui n'offre aucune difficulté, quelle que soit la base, comme le troisième chapitre l'a spécialement noté. Réduite au cylindre oblique, la question se trouve subjectivement résolue quand on a décomposé la base

en éléments rectilignes, d'où procèdent, selon les génératrices, des parallélogrammes ayant un côté commun, qui constituent les différentielles premières de l'aire cherchée. Elle doit ainsi dépendre d'une intégration analogue à celle des rectifications, mais plus compliquée, au point de ne pas réussir envers le cercle : l'expression des éléments de la base s'y combine avec leur inclinaison variable sur la direction fixe des génératrices. Nous devons aussi considérer la même recherche envers les cônes à base plane, où, quelle que soit celle-ci, la cubature se trouve immédiatement accomplie, d'après la pyramide ; tandis que la quadrature n'est d'abord connue qu'à l'égard du type droit et circulaire. Une systématisation subjective ne rend pas plus complète la solution objective, quoiqu'elle en fasse mieux apprécier la difficulté, suivant l'échelle uniformément surgie de l'intégration. Établie de la même manière que pour les cylindres l'équation différentielle des aires coniques suscite plus de difficultés algébriques, parce que la variation, de longueur et de direction, alors propre aux génératrices, introduit une double complication. Elle permet, cependant, de mieux apprécier la comparaison générale de ce problème au type fondamental des quadratures planes, en y dispensant d'une double intégration, qui serait d'ailleurs confuse dans un tel cas. Sous l'aspect philosophique, un pareil examen fait davantage ressortir l'insuffisance de nos moyens théoriques, et la nécessité de ne jamais renoncer aux méthodes particulières envers les questions spéciales qui pourraient vraiment mériter notre sollicitude.

Fondée sur une décomposition convenable, la double mesure des corps ronds constitue la principale des trois branches propres au domaine exceptionnel qui suscite la troisième leçon directe de géométrie intégrale. A l'aide de plans perpendiculaires à l'axe, on divise l'aire en éléments coniques, et le volume en éléments cylindriques, dont la mesure immédiate fournit une

équation subjective du premier ordre, objectivement subordonnée à la courbe méridienne, ou relative à toute autre directrice. Comparés entre eux, les deux types différentiels font directement apprécier une distinction essentiellement analogue à celle que présentent la rectification et la quadrature des lignes planes. Tous les cas vraiment traités par le grand géomètre et ses principaux imitateurs, anciens ou modernes, viennent aisément rentrer sous la compétence spéciale de la méthode subjective. Il faut aussi reconnaître qu'elle embrasse des applications qui seraient toujours restées autrement inaccessibles, surtout envers les aires, quoiqu'elles soient ordinairement dépourvues d'intérêt réel, même quant aux volumes. Cependant, sa principale efficacité consiste, comme dans les cas précédents, à perfectionner la comparaison générale de ces deux problèmes au type fondamental de la géométrie intégrale. Elle tend à dégager l'esprit humain des sollicitudes scientifiques qui, devant longtemps absorber ses meilleures forces, seraient finalement devenues contraires à l'essor décisif de la positivité rationnelle, sans l'issue philosophiquement instituée par le double législateur de la Logique.

La quatrième leçon directe de géométrie intégrale est uniquement consacrée à la cubature des corps de forme quelconque, qui constitue le cas le plus simple de la double intégration, surtout en coordonnées rectilignes et rectangulaires. On peut d'abord présumer que l'équation subjective doit alors s'élever jusqu'au troisième ordre, puisque le volume n'admet d'éléments immédiatement mesurables que lorsqu'ils sont devenus infiniment petits dans tous les sens. Rapprochant la géométrie intégrale de la géométrie différentielle, on est ainsi conduit à penser que l'une exige, envers les cubatures quelconques, la considération des troisièmes dérivées, comme l'autre la prescrit pour la courbure de torsion. D'après une

meilleure appréciation, on reconnaît que la molécule géométrique fournit l'élément du second ordre sans susciter aucune intégration, dont le vrai caractère consiste dans son objectivité spéciale, tandis que ce passage s'opère généralement et subjectivement. Sous le rapport des volumes, comme à l'égard des aires, la géométrie intégrale ne saurait jamais dépasser le second ordre, puisqu'il y suffit de différentier deux fois pour obtenir des éléments immédiatement mesurables.

Examinée convenablement, la diversité que présentent, à cet égard, les deux domaines de la géométrie transcendante ne peut aucunement altérer l'appréciation philosophique de leur difficulté respective, où la nature des opérations prévaut sur leur degré de réitération. Rattachées à des équations subjectives du second ordre, les questions prépondérantes de la géométrie intégrale sont néanmoins supérieures, en complication comme en importance, aux problèmes du troisième ordre de la géométrie différentielle. Elles surpassent celles du premier ordre, parce que, l'intégration étant rarement possible et fournissant des résultats plus complexes que leurs sources, l'obligation de la réitérer doit ordinairement interdire la solution spéciale. Dans la géométrie différentielle, où l'accomplissement est toujours certain, le redoublement des différentiations doit seulement compliquer les formules, sans faire jamais avorter le travail. Elle érige l'ordre des équations générales en mesure des difficultés objectives, tandis que, pour la géométrie intégrale, il devient surtout conforme aux entraves subjectives que comportent les divers modes ou degrés d'une recherche essentiellement uniforme.

Relativement aux coordonnées rectilignes et rectangulaires, le volume, différentié successivement par rapport à chacune des variables libres, fournit une dérivée évidemment égale à l'ordonnée dépendante. Après la première intégration, on a

seulement mesuré la tranche, d'abord inconnue, que comprennent deux plans infiniment voisins perpendiculaires à la variable traitée comme constante. Nous pouvons toujours convertir ce résultat préliminaire en ordonnée d'une courbe auxiliaire, dont l'aire, envers cette variable, sera numériquement équivalente au volume cherché ; ce qui montre que le type des quadratures planes peut successivement représenter toutes les questions de la géométrie intégrale. Graduant les difficultés en les assimilant, une telle appréciation les fait mieux ressortir, en indiquant que, pour poser le problème uniforme, il faut alors accomplir une recherche essentiellement analogue à sa résolution directe. On peut ainsi concevoir, d'après l'irrévocable imperfection de l'intégration explicite, que ce surcroît de complication surpasse celui qui résulte des rectifications, où l'ordonnée de la courbe à carrer reste immédiatement donnée quoique sa loi devienne plus embarrassante.

Historiquement considérée, la mesure générale des volumes fut d'abord instituée en attribuant des limites purement constantes aux deux intégrations successives. On doit ainsi cuber le segment compris entre la surface proposée, le plan des variables libres, et deux couples de plans respectivement perpendiculaires à chacune d'elles. Une telle institution resterait normalement insuffisante, ou du moins elle susciterait de graves complications, pour ramener à ce type tous les autres cas de cubature. Mieux appréciée, la méthode fut finalement agrandie en étendant à la constance géométrique la relativité spontanément surgie envers la constance algébrique. Alors les limites de la première intégrale, au lieu d'être purement constantes, peuvent se rapporter, suivant des lois quelconques, à la seconde variable, à laquelle seule conviendront des limites pleinement constantes, quand on accomplira l'intégration qui la concerne. Généralisée autant que possible, l'opération n'exige

aucune similitude entre les deux formules respectivement propres aux deux limites de la première intégration. Elle offre même plus de netteté quand ces limites appartiennent à des courbes entièrement distinctes que lorsqu'elles correspondent aux deux branches d'une seule courbe.

On est ainsi conduit à mesurer le volume compris entre la surface donnée, le plan des coordonnées indépendantes, deux cylindres quelconques perpendiculaires à ce plan, et deux autres plans perpendiculaires à la dernière variable intégrée. Nous pouvons toujours regarder un tel corps, quelque diversité que comportent ses bornes latérales, comme ayant, pour seconde dérivée, l'ordonnée dépendante, quand il est successivement différentié par rapport à chacune des deux variables libres. Il faut normalement reconnaître que l'intégration peut seule apprécier les variétés propres à cet ensemble; elles doivent spontanément disparaître dans ses éléments du second ordre. Rapportées à ce type, toutes les autres questions de cubature y peuvent graduellement rentrer, en ajoutant ou retranchant des espaces auxiliaires, comme doit souvent l'exiger la mesure des aires planes. Examinée directement, l'institution algébrique du problème géométrique se trouve toujours affectée par la nature du système de coordonnées adopté; mais la base choisie doit constamment devenir apte à représenter tous les cas, quand elle est assez généralisée.

Si les coordonnées sont polaires, la loi des cubatures, quoiqu'elle reste du second ordre, devient plus compliquée envers les deux angles qui doivent alors constituer les variables indépendantes : les éléments se rapportent à la pyramide au lieu du prisme. A chacun des modes que comporte un tel système, doit naturellement correspondre une modification générale de l'équation différentielle, dont il serait ici superflu de spécifier les diverses compositions. Graduellement comparées au type

fondamental, elles pourront toujours reproduire, sous différentes formes, l'assimilation nécessaire de toute cubature à la mesure d'une aire plane, où l'ordonnée résultera de l'intégration initiale. Relativement aux limites, variables ou constantes, l'appréciation reste logiquement analogue à celle ci-dessus indiquée envers le système rectiligne : mais les cylindres se changent en cônes, et la translation des plans en rotation. Après que le type géométrique est ainsi devenu suffisamment général, tous les autres cas de cubature y peuvent être normalement rattachés, par addition ou soustraction.

Pour que le domaine subjectif de la géométrie intégrale soit assez apprécié, la cinquième et dernière de ses leçons concrètes doit uniquement concerner la mesure des aires convenablement tracées sur une surface quelconque. Rapportée aux coordonnées rectilignes et rectangulaires, cette question est géométriquement définie, quant aux bornes latérales, comme celle des cubatures. On ne peut alors éprouver aucun doute envers l'ordre de l'équation subjective, puisque ce problème, quoique plus difficile que le précédent, fait mieux ressortir la suffisance spontanée d'une double différentiation. Guidée par sa projection sur le plan des coordonnées libres, l'estimation de l'élément s'accomplit en affectant le produit des deux différentielles indépendantes d'un diviseur égal au cosinus de l'inclinaison correspondante du plan tangent. Rapprochée de l'équation des cubatures, cette loi permet d'assimiler la mesure d'une aire quelconque à celle du volume compris, entre les mêmes limites, sous la surface ayant pour ordonnée la sécante de cette inclinaison. Examinées comparativement, les deux moitiés du domaine subjectif de la géométrie intégrale font ainsi contraster de la même manière, d'un côté, les quadratures planes et les rectifications correspondantes, de l'autre, les cubatures quelconques et les quadratures analogues. Sous l'aspect algé-

brique, un radical composé des deux dérivées partielles institue, entre les deux cas du second ordre, un surcroît de difficulté supérieur à celui qui sépare ceux du premier.

Il serait ici superflu d'insister davantage sur l'appréciation spéciale d'une théorie dont l'application ne devient pleinement réalisable qu'envers des cas déjà traités par les méthodes propres à la géométrie objective. Nous devons cependant recommander aux jeunes disciples de l'Humanité l'accomplissement d'une de ces études, mais au simple titre d'exercice. On ne pourrait autrement avoir assez compris la nature et senti la difficulté d'une telle recherche, où la quadrature de la sphère constituerait le seul succès vraiment précieux si le grand géomètre ne l'avait assez accomplie. Pour faire mieux ressortir l'insuffisance nos moyens théoriques, même dans cet exemple, il faut ici noter que l'on ne peut rationnellement mesurer l'aire sphérique comprise entre trois plans quelconques. Elle ne devient suffisamment appréciable que quand ils passent tous au centre de la sphère, sans que l'institution subjective ait aucunement surpassé, sous cet aspect, l'appréciation objective.

Ces confirmations décisives de notre insuffisance théorique font assez sentir que la rationalité positive doit surtout concerner la consistance et la clarté, mais en renonçant à la précision, même envers le plus simples des sept domaines encyclopédiques. Examinée dogmatiquement, comme historiquement, la géométrie subjective est principalement destinée à dissiper les préoccupations que suscita la géométrie objective jusqu'à l'avénement de la philosophie mathématique. L'émancipation résulte du concours de deux influences continues, normalement pressenties par le double législateur de la science fondamentale, et spontanément développées chez quiconque l'a convenablement étudiée. D'après leur systématisation, les spéculations géométriques cessent naturellement d'absorber les principales

forces de notre intelligence, qui ne pouvait dignement aspirer à la rationalité des théories supérieures tant qu'elle ne l'avait point instituée envers le domaine inférieur. Appréciée scientifiquement, l'institution cartésio-leibnitzienne a fait normalement ressortir l'impossibilité des solutions spéciales, en assimilant les obstacles géométriques aux entraves algébriques.

Examiné sous l'aspect le plus philosophique, ce jugement, qui d'abord semble essentiellement négatif et purement passager, doit finalement exercer une influence positive et permanente en faisant assez sentir les limites nécessaires du progrès théorique. Leur manifestation dut naturellement surgir du domaine le plus abstrait, parce que sa simplicité plus complète, suscitant une culture plus facile et plus ancienne, y fit plus tôt atteindre au degré de perfection, scientifique et logique, que comportent notre nature et notre situation. Une telle appréciation doit partout constituer le complément normal de l'initiation théorique, afin qu'elle soit toujours subordonnée à sa destination morale. Dans le domaine mathématique, ce jugement comporte une netteté qui ne saurait autant exister ailleurs, où les bornes sont moins atteintes et plus voilées, en vertu d'une complication supérieure. Étudiée ainsi, la science qui fit historiquement surgir le plus d'orgueil doit dogmatiquement développer le plus d'humilité, puisque les spéculations plus éminentes ne sauraient jamais comporter des succès moins limités. Rien ne doit donc être négligé pour diriger les jeunes disciples de l'Humanité vers une telle appréciation, que l'enseignement mathématique peut convenablement réitérer. Elle leur fera dignement sentir l'irrationnalité de l'existence purement spéculative, d'après l'impossibilité d'instituer l'unité, même théorique, sans subordonner la contemplation à l'affection autant que l'action.

A la fin du premier tiers de ce chapitre, j'ai suffisamment

expliqué l'anomalie naturellement propre au complément objectif de la géométrie intégrale. Mais il faut ici rappeler que la prépondérance exceptionnelle du préambule abstrait sur l'étude concrète y résulte de ce que sa principale destination se rapporte à la mécanique, quoiqu'il doive dogmatiquement adhérer à la géométrie, comme il le fit historiquement. Alors les cinq leçons propres à l'intégration implicite doivent logiquement lier la science de l'étendue à la théorie du mouvement, en faisant spontanément surgir de l'une le calcul spécialement convenable à l'autre.

Bien apprecié, l'ensemble de cette étude achève de manifester la destination normale de l'essor mathématique pour l'éducation individuelle et l'évolution collective. Épuisée dès son début, l'intégration implicite a toujours offert un contraste croissant entre l'activité des travaux et la stérilité des produits. Nous avons assez reconnu combien l'intégration des formules reste au-dessous de sa destination spéciale. Il faut maintenant regarder l'intégration des équations comme étant davantage inférieure aux principaux problèmes qu'elle fit graduellement surgir. Si l'on excepte la conception, purement épisodique, du plus philosophe des grands géomètres, son développement se borne, depuis l'origine de l'algèbre transcendante, à construire une suite de programmes, dont le meilleur usage consiste à nous faire spécialement sentir notre faiblesse théorique.

Une première appréciation de l'ensemble d'un tel domaine le partage en deux champs principaux, respectivement caractérisés par l'unité de variable indépendante et la pluralité. Si l'on compare, à cet égard, les deux moitiés de l'algèbre transcendante, on sent que cette distinction doit davantage affecter l'intégration que la différentiation. Elle y développe sa principale influence envers l'implicité, tandis que l'explicité fait seule

surgir, sous cet aspect, les notions différentielles, spontanément étendues à l'autre cas.

Examinées didactiquement, les deux parties de l'intégration implicite exigent, la première trois leçons, et la seconde deux en combinant, dans leur comparaison, l'importance, l'extension, et la difficulté. Sous l'aspect philosophique, l'ensemble du calcul intégral doit successivement caractériser, en cinq leçons, trois, et deux, l'intégration des formules, celle des équations concernant une seule variable indépendante, et celle des relations entre les dérivées partielles. Pour compléter le plan de l'intégration implicite, il y faut convenablement introduire la distinction relative à l'ordre différentiel, qui, dans l'intégration explicite, multiplie les obstacles, sans susciter aucune question vraiment nouvelle. Réagissant sur l'implicité, l'élévation de l'ordre y fait normalement surgir d'autres programmes, qui resteraient nécessairement insolubles, quand même celui du premier ordre serait pleinement réalisable. Il faut philosophiquement assimiler l'influence de l'ordre à celle du degré d'implicité, puisque ces deux obstacles peuvent toujours rentrer l'un dans l'autre, en concentrant ou dispersant les équations. Toutefois, cette distinction ne doit être spécialement étudiée qu'envers une seule variable indépendante, en lui consacrant la dernière des trois leçons propres à la première partie de l'intégration implicite. Sa combinaison avec la pluralité des variables libres suscite de telles difficultés que cette extrémité du calcul intégral ne comporte aucune étude vraiment rationnelle, faute de conceptions spécialement adaptées à sa nature.

La première leçon sur l'intégration implicite doit uniquement concerner les équations du premier ordre envers une seule variable indépendante. Une telle recherche suppose pleinement surmontées les difficultés relatives à l'intégration explicite ; sa perfection consisterait à pouvoir toujours ramener le cas des

équations à celui des formules. Cette étude doit, à plus forte raison, dépendre de la résolution algébrique des équations : tout effort pour intégrer une équation du premier ordre exige qu'elle soit préalablement résolue par rapport à la dérivée. Examinées dans leur subordination normale, les cinq phases essentielles de l'algèbre totale, depuis le début du calcul direct jusqu'à l'extrémité du calcul indirect, constituent une succession de programmes dont chacun suppose tous les précédents. Mieux appréciable d'après un tel enchaînement, leur nature de plus en plus illusoire fait profondément sentir que leur principale efficacité consiste à nous dégager du domaine inférieur quand il nous a suffisamment préparés aux spéculations supérieures.

On peut finalement regarder le meilleur auxiliaire algébrique du créateur du calcul infinitésimal comme ayant déjà construit les seules notions vraiment usuelles envers l'intégration des équations du premier ordre. Rattachant ce problème à celui des formules, il y prit pour type le cas où la variable dépendante et la variable libre sont pleinement séparées dans les multiplicateurs de leurs différentielles respectives, ce qui rend la question immédiatement réductible aux quadratures. Beaucoup de classes peuvent être artificiellement ramenées à celle-là, soit en changeant la forme de l'équation, soit surtout en introduisant des variables auxiliaires.

Sous cet aspect, il faut normalement spécifier les deux cas principaux, dont l'un concerne les équations du premier degré relativement à la variable dépendante ainsi qu'envers sa dérivée, leur composition étant d'ailleurs quelconque à l'égard de la variable libre. Elles peuvent toujours permettre la séparation des variables, de manière à subordonner l'intégration à deux quadratures, d'après une convenable décomposition de l'inconnue en deux facteurs. Nous ne devons pas juger entièrement illusoire l'expression générale ainsi surgie, quoique l'une, au moins, des

quadratures qu'elle indique puisse rarement s'accomplir : car un tel tableau devient quelquefois utile sans être pleinement explicite. Il faut ensuite considérer le cas où la dérivée équivaut au quotient de deux formules homogènes d'un même degré, d'ailleurs quelconque. La séparation s'opère, et l'intégration se ramène aux quadratures, en introduisant le rapport des deux variables primitives pour remplacer l'une d'elles.

Beaucoup d'autres cas pourraient artificiellement permettre de séparer les variables, d'après des transformations trop spéciales pour mériter aucune mention. Afin de mieux juger cette principale ressource de l'intégration implicite, il faut philosophiquement reconnaître que rien n'autorise à regarder une telle séparation comme étant rationnellement conforme à la constitution générale des équations différentielles. Si nous pouvons rarement l'accomplir, nous devons même présumer qu'elle est habituellement impossible, l'obstacle étant plus objectif que subjectif. Elle ne fait donc surgir qu'un expédient exceptionnel, que les géomètres ont qualifié de méthode, faute de conceptions vraiment normales. Rapportée à la destination philosophique ci-dessus assignée aux programmes d'intégration, une telle appréciation rend mieux jugeable l'inaptitude de l'esprit humain envers le domaine d'où le double législateur mathématique s'efforça de le dégager.

Assez constaté par expérience, l'épuisement de cet artifice poussa le plus fécond des grands géomètres à concevoir une méthode plus rationnelle, qui n'est pas finalement devenue plus efficace, en généralisant le type primitif. Nous pouvons regarder l'intégration comme immédiatement réductible aux quadratures, sans que la séparation y soit aucunement accomplie, si son premier membre est une différentielle exacte envers les deux variables qu'il contient. Convenablement apprécié, ce type comprend, outre le cas de la séparation spontanée, tous ceux qui

satisfont à la condition de l'intégrabilité collective. Rattachant à ce début spécial la considération générale, la méthode repose sur l'existence, aisément démontrable, d'une infinité de multiplicateurs propres à rendre l'équation toujours susceptible de remplir une telle condition. Examinée ainsi, la question n'a réellement avancé que d'après la possibilité de choisir parmi tous ces facteurs, sans qu'on puisse aucunement garantir qu'on en saura constamment trouver un.

Telle est la nature nécessairement illusoire des abstractions indiciplinées, que cet espoir de réduire aux quadratures toute intégration implicite fit bientôt surgir un désappointement que la philosophie pouvait aisément prévoir. A peine la recherche générale du multiplicateur fut-elle directement abordée, qu'on la vit exiger une intégration plus difficile que celle dont elle devait dispenser. Relatif à la pluralité des variables, ce préambule institue un circuit logique aussi complet que celui qui résulterait de l'illusion où l'on aspirerait à la résolution algébrique des équations en supprimant leur dernier terme d'après un convenable accroissement de leurs racines. Examinée normalement, la recherche du multiplicateur ne devient pleinement accessible que s'il doit seulement contenir l'une des variables ; ce qui ne convient qu'au premier des deux cas ci-dessus rapportés à la séparation. A l'égard des équations homogènes, on peut aussi déterminer un facteur, qui ne rendrait pas plus facile la réduction aux quadratures, déjà résultée du mode spontané, dont l'efficacité ne fut jamais surpassée par cette systématisation apparente.

A ces deux méthodes, finalement équivalentes, le principal constructeur de la mécanique céleste, accessoirement occupé d'intégration, en joignit une normalement recommandable, d'après son caractère logique, outre son aptitude scientifique envers des cas autrement inaccessibles. Bien appréciée, elle

consiste à différentier l'équation proposée, afin de la comparer, envers la dérivée, aux types précédemment intégrés, ce qui permettra l'intégration demandée en éliminant cette dérivée entre les deux équations du premier ordre ainsi relatives à la même source. On peut spécialement juger la pauvreté du calcul intégral d'après le prix, trop méconnu, qu'on est finalement forcé d'attacher à de tels détours, qui, dans les cas ordinaires, doivent naturellement aggraver les obstacles. Un pareil expédient peut pleinement réussir envers toute équation du premier degré relativement aux deux variables, de quelque manière qu'elle contienne la dérivée. Toujours l'intégration d'une telle, équation se trouve ainsi ramenée à celle de la première classe ci-dessus indiquée, en y concevant la variable d'abord indépendante comme rapportée à cette dérivée, sans qu'une telle inversion exige aucune préparation algébrique. Il faut finalement regarder le troisième procédé comme ayant utilement augmenté les faibles ressources de l'intégration implicite, en traitant des cas entièrement interdits aux deux autres, faute d'y pouvoir jamais dégager la dérivée. Réellement comparable aux modes les mieux goûtés d'une étude toujours vouée aux expédients exceptionnels, cette méthode ne fut officiellement dédaignée que comme émanant d'un géomètre plus occupé de mécanique que d'algèbre.

Vue historiquement, cette classe d'équations différentielles se trouve spécialement liée à la théorie par laquelle le plus philosophe des grands géomètres compléta la notion fondamentale de l'intégration implicite. Il suffit d'appliquer la méthode précédente au plus usuel des cas qu'elle embrasse pour y reconnaître l'existence d'une solution capable de satisfaire à l'équation différentielle sans émaner de l'intégrale générale ,quelque valeur qu'on y suppose à la constante arbitraire. La théorie instituée envers ces intégrales exceptionnelles mérite, par son

importance logique, supérieure à son efficacité scientifique, que la seconde leçon sur l'intégration implicite lui soit spécialement consacrée. Le paradoxe se résout en étendant le sens de l'intégrale générale à des valeurs convenablement variables du paramètre qu'elle contient. Elle peut continuer de satisfaire à l'équation différentielle, malgré cette variation, si l'ensemble des résultats provenus d'un tel changement devient identiquement nul.

Examinée directement, cette condition exige l'annulation de la dérivée du premier membre de l'équation primitive par rapport au paramètre qui la généralise. Résultée de cette annulation, la formule du paramètre fournit l'intégrale exceptionnelle d'après sa substitution dans l'intégrale générale. Il faut normalement compléter une telle explication en caractérisant la corrélation des courbes qui correspondent aux deux modes de solution. Alors on reconnaît que l'intégrale exceptionnelle exprime l'enveloppe des lignes émanées de l'intégrale générale d'après toutes les valeurs purement constantes du paramètre. La considération géométrique pouvait normalement devancer et remplacer la conception algébrique, puisque, l'enveloppe, devant toujours toucher les enveloppées, doit spontanément satisfaire à leur équation différentielle, qui consiste à déterminer en chaque point la direction de la tangente.

Sous cet aspect, le contraste et la liaison deviennent également appréciables entre l'intégrale générale et l'intégrale exceptionnelle. On voit, d'après la théorie des enveloppes, que la seconde est entièrement hétérogène à la première, quoiqu'elle en puisse directement résulter, outre leur commune aptitude envers l'équation différentielle. Ce rapprochement permet d'instituer le type de l'intégrale générale en vue d'une intégrale exceptionnelle indifféremment choisie. Il suffit que ce type contienne deux constantes arbitraires entre lesquelles on cherchera

la relation propre à fournir un tel résultat. Il faut alors procéder comme si l'on voulait rendre la courbe générale convenablement tangente à la courbe exceptionnelle.

Cherchée conformément à l'explication fondamentale, la solution exceptionnelle exige qu'on ait d'abord obtenu la solution générale. Habituellement destinée à dispenser de l'intégration dans les cas convenables, elle ne saurait assez développer son efficacité scientifique qu'en émanant de l'équation différentielle. Elle y peut être directement rattachée quand celle-ci résulte de l'équation primitive par une différentiation immédiate, qui n'exige aucune élimination envers la constante, si ce paramètre est spontanément isolé. Fondée sur une telle origine, l'équation différentielle devient alors susceptible de fournir, après avoir été différentiée, une relation décomposable en deux facteurs, l'un du second ordre, l'autre du premier. Successivement considérés, l'un détermine, par une double intégration la solution générale, tandis que l'autre fait directement trouver la solution exceptionnelle, en éliminant la dérivée entre l'équation proposée et celle qu'il suscite.

Rapportée à toute autre origine, l'équation différentielle ne pourrait ordinairement offrir le caractère sur lequel repose une telle détermination. Élaborée convenablement, la méthode peut convenir à toutes les suppositions envers le mode de formation de l'équation différentielle donnée. Généralisé davantage, le caractère consiste en ce que l'intégrale exceptionnelle doit toujours satisfaire à l'équation du second ordre indépendamment de la dérivée correspondante. Il faut donc que l'expression de la seconde dérivée y devienne indéterminée quand les deux variables ont entre elles la relation résultée de la solution exceptionnelle. Rendant séparément nuls les deux termes de la fraction qui détermine cette dérivée, on obtient l'intégrale exceptionnelle en éliminant la première dérivée entre chacune des

équations ainsi formées et l'équation proposée, si les deux résultats peuvent assez concorder.

On doit finalement regarder la théorie ainsi construite par le plus philosophe des grands géomètres comme la seule conception vraiment normale que présente l'ensemble de l'intégration implicite. Son importance logique suffit pour la faire toujours apprécier dans l'enseignement encyclopédique, malgré le dédain qu'elle inspirait à l'empirisme académique. Appliquée convenablement, elle est même susceptible d'efficacité scientifique, envers des cas géométriques qui seront ci-dessous caractérisés Rattachée à l'ensemble des notions sur l'intégration du premier ordre, elle se trouve spécialement liée à la méthode des multiplicateurs. Examinée directement, cette liaison consiste en ce que l'intégrale exceptionnelle rend toujours infini le facteur propre à convertir l'équation proposée en une différentielle collective.

Modifiée par l'ordre, l'intégration offre, envers l'implicité, des difficultés dont l'appréciation normale, plutôt que celle des faibles ressources correspondantes, suscite la troisième leçon sur les équations qui ne contiennent qu'une seule variable libre. A la nature plus indirecte de la relation différentielle, correspond une plus grande généralité de l'intégrale, où le nombre des constantes arbitraires devient toujours égal à l'ordre considéré. Dans l'intégration par séries, seule convenable à tous les cas, ces paramètres correspondent aux valeurs indéterminées de la variable dépendante et de toutes ses dérivées d'un ordre inférieur à celui de l'équation proposée. Une telle considération autant applicable à l'explicité qu'à l'implicité, ne peut directement caractériser le surcroît de difficulté que l'élévation de l'ordre apporte à l'intégration des équations, quoique les deux cas diffèrent par la manière dont les paramètres participent à la composition du type. Relativement aux formules, les con-

forces de notre intelligence, qui ne pouvait dignement aspirer à la rationalité des théories supérieures tant qu'elle ne l'avait point instituée envers le domaine inférieur. Appréciée scientifiquement, l'institution cartésio-leibnitzienne a fait normalement ressortir l'impossibilité des solutions spéciales, en assimilant les obstacles géométriques aux entraves algébriques.

Examiné sous l'aspect le plus philosophique, ce jugement, qui d'abord semble essentiellement négatif et purement passager, doit finalement exercer une influence positive et permanente en faisant assez sentir les limites nécessaires du progrès théorique. Leur manifestation dut naturellement surgir du domaine le plus abstrait, parce que sa simplicité plus complète, suscitant une culture plus facile et plus ancienne, y fit plus tôt atteindre au degré de perfection, scientifique et logique, que comportent notre nature et notre situation. Une telle appréciation doit partout constituer le complément normal de l'initiation théorique, afin qu'elle soit toujours subordonnée à sa destination morale. Dans le domaine mathématique, ce jugement comporte une netteté qui ne saurait autant exister ailleurs, où les bornes sont moins atteintes et plus voilées, en vertu d'une complication supérieure. Étudiée ainsi, la science qui fit historiquement surgir le plus d'orgueil doit dogmatiquement développer le plus d'humilité, puisque les spéculations plus éminentes ne sauraient jamais comporter des succès moins limités. Rien ne doit donc être négligé pour diriger les jeunes disciples de l'Humanité vers une telle appréciation, que l'enseignement mathématique peut convenablement réitérer. Elle leur fera dignement sentir l'irrationnalité de l'existence purement spéculative, d'après l'impossibilité d'instituer l'unité, même théorique, sans subordonner la contemplation à l'affection autant que l'action.

Complément objectif.

A la fin du premier tiers de ce chapitre, j'ai suffisamment

expliqué l'anomalie naturellement propre au complément objectif de la géométrie intégrale. Mais il faut ici rappeler que la prépondérance exceptionnelle du préambule abstrait sur l'étude concrète y résulte de ce que sa principale destination se rapporte à la mécanique, quoiqu'il doive dogmatiquement adhérer à la géométrie, comme il le fit historiquement. Alors les cinq leçons propres à l'intégration implicite doivent logiquement lier la science de l'étendue à la théorie du mouvement, en faisant spontanément surgir de l'une le calcul spécialement convenable à l'autre.

Bien apprecié, l'ensemble de cette étude achève de manifester la destination normale de l'essor mathématique pour l'éducation individuelle et l'évolution collective. Épuisée dès son début, l'intégration implicite a toujours offert un contraste croissant entre l'activité des travaux et la stérilité des produits. Nous avons assez reconnu combien l'intégration des formules reste au-dessous de sa destination spéciale. Il faut maintenant regarder l'intégration des équations comme étant davantage inférieure aux principaux problèmes qu'elle fit graduellement surgir. Si l'on excepte la conception, purement épisodique, du plus philosophe des grands géomètres, son développement se borne, depuis l'origine de l'algèbre transcendante, à construire une suite de programmes, dont le meilleur usage consiste à nous faire spécialement sentir notre faiblesse théorique.

Une première appréciation de l'ensemble d'un tel domaine le partage en deux champs principaux, respectivement caractérisés par l'unité de variable indépendante et la pluralité. Si l'on compare, à cet égard, les deux moitiés de l'algèbre transcendante, on sent que cette distinction doit davantage affecter l'intégration que la différentiation. Elle y développe sa principale influence envers l'implicité, tandis que l'explicité fait seule

surgir, sous cet aspect, les notions différentielles, spontanément étendues à l'autre cas.

Examinées didactiquement, les deux parties de l'intégration implicite exigent, la première trois leçons, et la seconde deux en combinant, dans leur comparaison, l'importance, l'extension, et la difficulté. Sous l'aspect philosophique, l'ensemble du calcul intégral doit successivement caractériser, en cinq leçons, trois, et deux, l'intégration des formules, celle des équations concernant une seule variable indépendante, et celle des relations entre les dérivées partielles. Pour compléter le plan de l'intégration implicite, il y faut convenablement introduire la distinction relative à l'ordre différentiel, qui, dans l'intégration explicite, multiplie les obstacles, sans susciter aucune question vraiment nouvelle. Réagissant sur l'implicité, l'élévation de l'ordre y fait normalement surgir d'autres programmes, qui resteraient nécessairement insolubles, quand même celui du premier ordre serait pleinement réalisable. Il faut philosophiquement assimiler l'influence de l'ordre à celle du degré d'implicité, puisque ces deux obstacles peuvent toujours rentrer l'un dans l'autre, en concentrant ou dispersant les équations. Toutefois, cette distinction ne doit être spécialement étudiée qu'envers une seule variable indépendante, en lui consacrant la dernière des trois leçons propres à la première partie de l'intégration implicite. Sa combinaison avec la pluralité des variables libres suscite de telles difficultés que cette extrémité du calcul intégral ne comporte aucune étude vraiment rationnelle, faute de conceptions spécialement adaptées à sa nature.

La première leçon sur l'intégration implicite doit uniquement concerner les équations du premier ordre envers une seule variable indépendante. Une telle recherche suppose pleinement surmontées les difficultés relatives à l'intégration explicite ; sa perfection consisterait à pouvoir toujours ramener le cas des

équations à celui des formules. Cette étude doit, à plus forte raison, dépendre de la résolution algébrique des équations : tout effort pour intégrer une équation du premier ordre exige qu'elle soit préalablement résolue par rapport à la dérivée. Examinées dans leur subordination normale, les cinq phases essentielles de l'algèbre totale, depuis le début du calcul direct jusqu'à l'extrémité du calcul indirect, constituent une succession de programmes dont chacun suppose tous les précédents. Mieux appréciable d'après un tel enchaînement, leur nature de plus en plus illusoire fait profondément sentir que leur principale efficacité consiste à nous dégager du domaine inférieur quand il nous a suffisamment préparés aux spéculations supérieures.

On peut finalement regarder le meilleur auxiliaire algébrique du créateur du calcul infinitésimal comme ayant déjà construit les seules notions vraiment usuelles envers l'intégration des équations du premier ordre. Rattachant ce problème à celui des formules, il y prit pour type le cas où la variable dépendante et la variable libre sont pleinement séparées dans les multiplicateurs de leurs différentielles respectives, ce qui rend la question immédiatement réductible aux quadratures. Beaucoup de classes peuvent être artificiellement ramenées à celle-là, soit en changeant la forme de l'équation, soit surtout en introduisant des variables auxiliaires.

Sous cet aspect, il faut normalement spécifier les deux cas principaux, dont l'un concerne les équations du premier degré relativement à la variable dépendante ainsi qu'envers sa dérivée, leur composition étant d'ailleurs quelconque à l'égard de la variable libre. Elles peuvent toujours permettre la séparation des variables, de manière à subordonner l'intégration à deux quadratures, d'après une convenable décomposition de l'inconnue en deux facteurs. Nous ne devons pas juger entièrement illusoire l'expression générale ainsi surgie, quoique l'une, au moins, des

quadratures qu'elle indique puisse rarement s'accomplir : car un tel tableau devient quelquefois utile sans être pleinement explicite. Il faut ensuite considérer le cas où la dérivée équivaut au quotient de deux formules homogènes d'un même degré, d'ailleurs quelconque. La séparation s'opère, et l'intégration se ramène aux quadratures, en introduisant le rapport des deux variables primitives pour remplacer l'une d'elles.

Beaucoup d'autres cas pourraient artificiellement permettre de séparer les variables, d'après des transformations trop spéciales pour mériter aucune mention. Afin de mieux juger cette principale ressource de l'intégration implicite, il faut philosophiquement reconnaître que rien n'autorise à regarder une telle séparation comme étant rationnellement conforme à la constitution générale des équations différentielles. Si nous pouvons rarement l'accomplir, nous devons même présumer qu'elle est habituellement impossible, l'obstacle étant plus objectif que subjectif. Elle ne fait donc surgir qu'un expédient exceptionnel, que les géomètres ont qualifié de méthode, faute de conceptions vraiment normales. Rapportée à la destination philosophique ci-dessus assignée aux programmes d'intégration, une telle appréciation rend mieux jugeable l'inaptitude de l'esprit humain envers le domaine d'où le double législateur mathématique s'efforça de le dégager.

Assez constaté par expérience, l'épuisement de cet artifice poussa le plus fécond des grands géomètres à concevoir une méthode plus rationnelle, qui n'est pas finalement devenue plus efficace, en généralisant le type primitif. Nous pouvons regarder l'intégration comme immédiatement réductible aux quadratures, sans que la séparation y soit aucunement accomplie, si son premier membre est une différentielle exacte envers les deux variables qu'il contient. Convenablement apprécié, ce type comprend, outre le cas de la séparation spontanée, tous ceux qui

satisfont à la condition de l'intégrabilité collective. Rattachant à ce début spécial la considération générale, la méthode repose sur l'existence, aisément démontrable, d'une infinité de multiplicateurs propres à rendre l'équation toujours susceptible de remplir une telle condition. Examinée ainsi, la question n'a réllement avancé que d'après la possibilité de choisir parmi tous ces facteurs, sans qu'on puisse aucunement garantir qu'on en saura constamment trouver un.

Telle est la nature nécessairement illusoire des abstractions indiciplinées, que cet espoir de réduire aux quadratures toute intégration implicite fit bientôt surgir un désappointement que la philosophie pouvait aisément prévoir. A peine la recherche générale du multiplicateur fut-elle directement abordée, qu'on la vit exiger une intégration plus difficile que celle dont elle devait dispenser. Relatif à la pluralité des variables, ce préambule institue un circuit logique aussi complet que celui qui résulterait de l'illusion où l'on aspirerait à la résolution algébrique des équations en supprimant leur dernier terme d'après un convenable accroissement de leurs racines. Examinée normalement, la recherche du multiplicateur ne devient pleinement accessible que s'il doit seulement conteuir l'une des variables ; ce qui ne convient qu'au premier des deux cas ci-dessus rapportés à la séparation. A l'égard des équations homogènes, on peut aussi déterminer un facteur, qui ne rendrait pas plus facile la réduction aux quadratures, déjà résultée du mode spontané, dont l'efficacité ne fut jamais surpassée par cette systématisation apparente.

A ces deux méthodes, finalement équivalentes, le principal constructeur de la mécanique céleste, accessoirement occupé d'intégration, en joignit une normalement recommandable, d'après son caractère logique, outre son aptitude scientifique envers des cas autrement inaccessibles. Bien appréciée, elle

consiste à différentier l'équation proposée, afin de la comparer, envers la dérivée, aux types précédemment intégrés, ce qui permettra l'intégration demandée en éliminant cette dérivée entre les deux équations du premier ordre ainsi relatives à la même source. On peut spécialement juger la pauvreté du calcul intégral d'après le prix, trop méconnu, qu'on est finalement forcé d'attacher à de tels détours, qui, dans les cas ordinaires, doivent naturellement aggraver les obstacles. Un pareil expédient peut pleinement réussir envers toute équation du premier degré relativement aux deux variables, de quelque manière qu'elle contienne la dérivée. Toujours l'intégration d'une telle, équation se trouve ainsi ramenée à celle de la première classe ci-dessus indiquée, en y concevant la variable d'abord indépendante comme rapportée à cette dérivée, sans qu'une telle inversion exige aucune préparation algébrique. Il faut finalement regarder le troisième procédé comme ayant utilement augmenté les faibles ressources de l'intégration implicite, en traitant des cas entièrement interdits aux deux autres, faute d'y pouvoir jamais dégager la dérivée. Réellement comparable aux modes les mieux goûtés d'une étude toujours vouée aux expédients exceptionnels, cette méthode ne fut officiellement dédaignée que comme émanant d'un géomètre plus occupé de mécanique que d'algèbre.

Vue historiquement, cette classe d'équations différentielles se trouve spécialement liée à la théorie par laquelle le plus philosophe des grands géomètres compléta la notion fondamentale de l'intégration implicite. Il suffit d'appliquer la méthode précédente au plus usuel des cas qu'elle embrasse pour y reconnaître l'existence d'une solution capable de satisfaire à l'équation différentielle sans émaner de l'intégrale générale ,quelque valeur qu'on y suppose à la constante arbitraire. La théorie instituée envers ces intégrales exceptionnelles mérite, par son

importance logique, supérieure à son efficacité scientifique, que la seconde leçon sur l'intégration implicite lui soit spécialement consacrée. Le paradoxe se résout en étendant le sens de l'intégrale générale à des valeurs convenablement variables du paramètre qu'elle contient. Elle peut continuer de satisfaire à l'équation différentielle, malgré cette variation, si l'ensemble des résultats provenus d'un tel changement devient identiquement nul.

Examinée directement, cette condition exige l'annulation de la dérivée du premier membre de l'équation primitive par rapport au paramètre qui la généralise. Résultée de cette annulation, la formule du paramètre fournit l'intégrale exceptionnelle d'après sa substitution dans l'intégrale générale. Il faut normalement compléter une telle explication en caractérisant la corrélation des courbes qui correspondent aux deux modes de solution. Alors on reconnaît que l'intégrale exceptionnelle exprime l'enveloppe des lignes émanées de l'intégrale générale d'après toutes les valeurs purement constantes du paramètre. La considération géométrique pouvait normalement devancer et remplacer la conception algébrique, puisque, l'enveloppe, devant toujours toucher les enveloppées, doit spontanément satisfaire à leur équation différentielle, qui consiste à déterminer en chaque point la direction de la tangente.

Sous cet aspect, le contraste et la liaison deviennent également appréciables entre l'intégrale générale et l'intégrale exceptionnelle. On voit, d'après la théorie des enveloppes, que la seconde est entièrement hétérogène à la première, quoiqu'elle en puisse directement résulter, outre leur commune aptitude envers l'équation différentielle. Ce rapprochement permet d'instituer le type de l'intégrale générale en vue d'une intégrale exceptionnelle indifféremment choisie. Il suffit que ce type contienne deux constantes arbitraires entre lesquelles on cherchera

dérivées, dont le nombre ne saurait jamais accroître l'indétermination. Relativement au cas exceptionnel où l'équation n'est pas du même ordre envers les deux variables libres, on peut ainsi trouver deux développements dont la généralité doit d'abord sembler inégale, quoique rien n'exclue aucun d'eux. Attentivement considérée, la contradiction se dissipe en reconnaissant que les deux types sont également généraux, par cela même que le nombre des coefficients indéterminés y concorde avec l'ordre différentiel de la variable correspondante. L'explication devient spécialement irrécusable quand chaque développement peut effectivement rentrer dans l'autre en substituant à ses coefficients des séries convenablement subordonnées à la variable qu'ils contiennent.

Il semble, d'après la considération des séries, que la loi sur l'égalité du nombre des éléments arbitraires à l'ordre différentiel est uniformément applicable aux autres degrés de pluralité. Mais, au-delà de deux variables indépendantes, la différentiation cesse de confirmer les indications résultées, à cet égard, d'un tel mode d'intégration, dont la plénitude nécessaire ne saurait être normalement établie. Avec trois variables libres, le premier ordre fournit trois relations partielles, à l'aide desquelles on pourrait ordinairement éliminer deux formations arbitraires au lieu d'une seule : la différence augmente en même temps que l'ordre et la pluralité. Généralisée complétement, la seule notion propre à l'ensemble du dernier domaine de l'intégration implicite se trouve donc affectée d'une grave incertitude, d'après l'insuffisant concours des deux appréciations qui la concernent. Il faut pourtant reconnaître que l'hésitation ainsi laissée envers la constitution abstraite de l'intégrale offre peu d'inconvénients concrets, puisqu'on n'a jamais besoin d'intégrer ce genre d'équations avec toute l'extension logiquement possible.

importance logique, supérieure à son efficacité scientifique, que la seconde leçon sur l'intégration implicite lui soit spécialement consacrée. Le paradoxe se résout en étendant le sens de l'intégrale générale à des valeurs convenablement variables du paramètre qu'elle contient. Elle peut continuer de satisfaire à l'équation différentielle, malgré cette variation, si l'ensemble des résultats provenus d'un tel changement devient identiquement nul.

Examinée directement, cette condition exige l'annulation de la dérivée du premier membre de l'équation primitive par rapport au paramètre qui la généralise. Résultée de cette annulation, la formule du paramètre fournit l'intégrale exceptionnelle d'après sa substitution dans l'intégrale générale. Il faut normalement compléter une telle explication en caractérisant la corrélation des courbes qui correspondent aux deux modes de solution. Alors on reconnaît que l'intégrale exceptionnelle exprime l'enveloppe des lignes émanées de l'intégrale générale d'après toutes les valeurs purement constantes du paramètre. La considération géométrique pouvait normalement devancer et remplacer la conception algébrique, puisque, l'enveloppe, devant toujours toucher les enveloppées, doit spontanément satisfaire à leur équation différentielle, qui consiste à déterminer en chaque point la direction de la tangente.

Sous cet aspect, le contraste et la liaison deviennent également appréciables entre l'intégrale générale et l'intégrale exceptionnelle. On voit, d'après la théorie des enveloppes, que la seconde est entièrement hétérogène à la première, quoiqu'elle en puisse directement résulter, outre leur commune aptitude envers l'équation différentielle. Ce rapprochement permet d'instituer le type de l'intégrale générale en vue d'une intégrale exceptionnelle indifféremment choisie. Il suffit que ce type contienne deux constantes arbitraires entre lesquelles on cherchera

ment objectif de la géométrie intégrale peut ainsi constituer une harmonie générale entre l'abstrait et le concret, puisque cette distinction représente celle des deux parties de l'intégration implicite. Relativement à la disproportion entre le préambule abstrait et la constitution concrète, il faut maintenant reconnaître qu'elle n'est pas seulement due à ce que un tel calcul, quoique institué pour la géométrie, devient finalement propre à la mécanique. Nous devons aussi l'attribuer à l'imperfection des moyens algébriques, qui prive les spéculations géométriques du développement dont elles sont objectivement susceptibles. Afin de mieux caractériser ce complément d'explication de la seule anomalie propre au cours normal de logique, il faut d'abord apprécier l'intégration implicite comme la base naturelle du principal intérêt que comporte la géométrie objective.

Il ne suffit pas, pour avoir pleinement systématisé la géométrie abstraite, que les méthodes y soient enfin devenues aussi générales que les questions. Nous avons, en outre, besoin de discerner, entre toutes les figures rationnellement imaginables, les types qui méritent une appréciation spéciale, en vertu d'un caractère important. Alors la géométrie objective devient, même envers les lignes, le complément normal de la géométrie subjective ; ce qui peut historiquement expliquer l'intérêt que conserva la première après la fondation de la seconde. Nous devons même reconnaître que l'imperfection de celle-ci, par suite de l'insuffisance algébrique, rend celle-là plus nécessaire, pour indiquer vers quels types concrets les efforts abstraits doivent être principalement dirigés. Il faut normalement apprécier l'intégration explicite et l'intégration implicite comme devant surtout convenir, l'une à la géométrie subjective, l'autre à la géométrie objective.

Nous pouvons ainsi sentir que la restriction dogmatique de celle-ci ne résulte que de l'imperfection de sa base algébrique,

importance logique, supérieure à son efficacité scientifique, que la seconde leçon sur l'intégration implicite lui soit spécialement consacrée. Le paradoxe se résout en étendant le sens de l'intégrale générale à des valeurs convenablement variables du paramètre qu'elle contient. Elle peut continuer de satisfaire à l'équation différentielle, malgré cette variation, si l'ensemble des résultats provenus d'un tel changement devient identiquement nul.

Examinée directement, cette condition exige l'annulation de la dérivée du premier membre de l'équation primitive par rapport au paramètre qui la généralise. Résultée de cette annulation, la formule du paramètre fournit l'intégrale exceptionnelle d'après sa substitution dans l'intégrale générale. Il faut normalement compléter une telle explication en caractérisant la corrélation des courbes qui correspondent aux deux modes de solution. Alors on reconnaît que l'intégrale exceptionnelle exprime l'enveloppe des lignes émanées de l'intégrale générale d'après toutes les valeurs purement constantes du paramètre. La considération géométrique pouvait normalement devancer et remplacer la conception algébrique, puisque, l'enveloppe, devant toujours toucher les enveloppées, doit spontanément satisfaire à leur équation différentielle, qui consiste à déterminer en chaque point la direction de la tangente.

Sous cet aspect, le contraste et la liaison deviennent également appréciables entre l'intégrale générale et l'intégrale exceptionnelle. On voit, d'après la théorie des enveloppes, que la seconde est entièrement hétérogène à la première, quoiqu'elle en puisse directement résulter, outre leur commune aptitude envers l'équation différentielle. Ce rapprochement permet d'instituer le type de l'intégrale générale en vue d'une intégrale exceptionnelle indifféremment choisie. Il suffit que ce type contienne deux constantes arbitraires entre lesquelles on cherchera

ment objectif de la géométrie intégrale peut ainsi constituer une harmonie générale entre l'abstrait et le concret, puisque cette distinction représente celle des deux parties de l'intégration implicite. Relativement à la disproportion entre le préambule abstrait et la constitution concrète, il faut maintenant reconnaître qu'elle n'est pas seulement due à ce que un tel calcul, quoique institué pour la géométrie, devient finalement propre à la mécanique. Nous devons aussi l'attribuer à l'imperfection des moyens algébriques, qui prive les spéculations géométriques du développement dont elles sont objectivement susceptibles. Afin de mieux caractériser ce complément d'explication de la seule anomalie propre au cours normal de logique, il faut d'abord apprécier l'intégration implicite comme la base naturelle du principal intérêt que comporte la géométrie objective.

Il ne suffit pas, pour avoir pleinement systématisé la géométrie abstraite, que les méthodes y soient enfin devenues aussi générales que les questions. Nous avons, en outre, besoin de discerner, entre toutes les figures rationnellement imaginables, les types qui méritent une appréciation spéciale, en vertu d'un caractère important. Alors la géométrie objective devient, même envers les lignes, le complément normal de la géométrie subjective ; ce qui peut historiquement expliquer l'intérêt que conserva la première après la fondation de la seconde. Nous devons même reconnaître que l'imperfection de celle-ci, par suite de l'insuffisance algébrique, rend celle-là plus nécessaire, pour indiquer vers quels types concrets les efforts abstraits doivent être principalement dirigés. Il faut normalement apprécier l'intégration explicite et l'intégration implicite comme devant surtout convenir, l'une à la géométrie subjective, l'autre à la géométrie objective.

Nous pouvons ainsi sentir que la restriction dogmatique de celle-ci ne résulte que de l'imperfection de sa base algébrique,

importance logique, supérieure à son efficacité scientifique, que la seconde leçon sur l'intégration implicite lui soit spécialement consacrée. Le paradoxe se résout en étendant le sens de l'intégrale générale à des valeurs convenablement variables du paramètre qu'elle contient. Elle peut continuer de satisfaire à l'équation différentielle, malgré cette variation, si l'ensemble des résultats provenus d'un tel changement devient identiquement nul.

Examinée directement, cette condition exige l'annulation de la dérivée du premier membre de l'équation primitive par rapport au paramètre qui la généralise. Résultée de cette annulation, la formule du paramètre fournit l'intégrale exceptionnelle d'après sa substitution dans l'intégrale générale. Il faut normalement compléter une telle explication en caractérisant la corrélation des courbes qui correspondent aux deux modes de solution. Alors on reconnaît que l'intégrale exceptionnelle exprime l'enveloppe des lignes émanées de l'intégrale générale d'après toutes les valeurs purement constantes du paramètre. La considération géométrique pouvait normalement devancer et remplacer la conception algébrique, puisque, l'enveloppe, devant toujours toucher les enveloppées, doit spontanément satisfaire à leur équation différentielle, qui consiste à déterminer en chaque point la direction de la tangente.

Sous cet aspect, le contraste et la liaison deviennent également appréciables entre l'intégrale générale et l'intégrale exceptionnelle. On voit, d'après la théorie des enveloppes, que la seconde est entièrement hétérogène à la première, quoiqu'elle en puisse directement résulter, outre leur commune aptitude envers l'équation différentielle. Ce rapprochement permet d'instituer le type de l'intégrale générale en vue d'une intégrale exceptionnelle indifféremment choisie. Il suffit que ce type contienne deux constantes arbitraires entre lesquelles on chercherait

ment objectif de la géométrie intégrale peut ainsi constituer une harmonie générale entre l'abstrait et le concret, puisque cette distinction représente celle des deux parties de l'intégration implicite. Relativement à la disproportion entre le préambule abstrait et la constitution concrète, il faut maintenant reconnaître qu'elle n'est pas seulement due à ce que un tel calcul, quoique institué pour la géométrie, devient finalement propre à la mécanique. Nous devons aussi l'attribuer à l'imperfection des moyens algébriques, qui prive les spéculations géométriques du développement dont elles sont objectivement susceptibles. Afin de mieux caractériser ce complément d'explication de la seule anomalie propre au cours normal de logique, il faut d'abord apprécier l'intégration implicite comme la base naturelle du principal intérêt que comporte la géométrie objective.

Il ne suffit pas, pour avoir pleinement systématisé la géométrie abstraite, que les méthodes y soient enfin devenues aussi générales que les questions. Nous avons, en outre, besoin de discerner, entre toutes les figures rationnellement imaginables, les types qui méritent une appréciation spéciale, en vertu d'un caractère important. Alors la géométrie objective devient, même envers les lignes, le complément normal de la géométrie subjective ; ce qui peut historiquement expliquer l'intérêt que conserva la première après la fondation de la seconde. Nous devons même reconnaître que l'imperfection de celle-ci, par suite de l'insuffisance algébrique, rend celle-là plus nécessaire, pour indiquer vers quels types concrets les efforts abstraits doivent être principalement dirigés. Il faut normalement apprécier l'intégration explicite et l'intégration implicite comme [illegible] surtout convenir, l'une à la géométrie subjective [illegible] géométrie objective.

Nous pouvons ainsi sentir que la [illegible] celle-ci ne résulte que de l'imperf[illegible]

dont l'amélioration permettrait d'aborder des spéculations vraiment intéressantes, qu'on est finalement forcé d'écarter, même envers les lignes. Une telle appréciation doit philosophiquement confirmer l'inanité nécessaire de toute systématisation partielle, en faisant spécialement ressortir la réaction que l'imperfection de la géométrie objective exerce sur la géométrie subjective. Relative à la détermination des types par des propriétés de contact ou de courbure, la première dépend de l'intégration des équations, tandis que la seconde n'exige que celle des formules, pour mesurer toute étendue. Si l'imperfection algébrique conduit à regarder la première comme nécessaire à la seconde, la systématisation géométrique devient finalement contradictoire, en subordonnant la constitution principale à l'élaboration d'un complément plus difficile à régulariser. Examinée philosophiquement, la restriction dogmatique de la géométrie objective peut donc fournir une précieuse confirmation des préceptes généraux de la religion positive sur la nature et la destination des efforts théoriques.

Après une telle appréciation, la première des trois leçons finales de géométrie intégrale doit spécialement caractériser les meilleurs types de la détermination d'une ligne par une propriété de contact ou de courbure. Sous cet aspect, il faut d'abord indiquer, entre les cas du premier ordre, une distinction essentielle, suivant que la courbe cherchée doit naturellement dépendre de l'intégrale générale ou de l'intégrale exceptionnelle, qui n'exige que la différentiation. Il est toujours possible de discerner à laquelle de ces deux classes appartient chaque problème spécial, selon que le caractère proposé con[illegible]sition du point de contact ou seulement la direction [illegible]nte. D[illegible] premier cas, la solution se rapporte à [illegible], t[illegible]ns le second, elle convient à l'ensemble [illegible] courbe sert d'enveloppe. On peut

Il faut normalement lier cette leçon à la suivante en ouvrant celle-ci par des questions relatives à des lignes tracées sur une surface quelconque, avant d'aborder des déterminations analogues envers les surfaces. Telle est surtout la recherche des lignes de courbure, déjà caractérisée en géométrie différentielle ; l'équation spéciale y devient rarement intégrale : ce qui fait mieux apprécier la solution directement surgie pour les cas vraiment usuels. A cet égard, on pourrait aussi noter la détermination des lignes de plus grande pente, si leur perpendicularité nécessaire envers les lignes de niveau ne rendait essentiellement superflue leur appréciation algébrique. La majeure partie de cette seconde leçon concrète sur le complément objectif de la géométrie intégrale doit directement concerner les surfaces, mais en y traitant des questions aussi spéciales que le sont les précédentes à l'égard des courbes. Il faut alors reconnaître que la recherche, indépendante de toute formation arbitraire, et seulement relative à des paramètres indéterminés, doit immédiatement dépendre de l'intégration des équations totales, qui peut quelquefois éviter celle des corrélations partielles. Elle offre comme principal type, à la fois historique et dogmatique, la détermination des surfaces de niveau dans l'équilibre des fluides, en se bornant à la définition géométrique, où la normale coïncide avec la direction, partout donnée, de la pesanteur. Nous devons ici réserver, envers les surfaces et les lignes, les spéculations, plus difficiles et plus imparfaites, qui seront bientôt caractérisées en instituant le préambule général de la mécanique, parce qu'elles dépendent d'un calcul destiné surtout à l'extrême domaine mathématique.

Nul développement spécial ne venant modifier une leçon essentiellement vouée à des programmes irréalisables ; elle peut normalement fournir le meilleur essor des réflexions philosophiques ci-dessus indiquées sur la destination et l'imperfection

de la géométrie objective. Alors on doit mieux sentir que la restriction didactique d'une telle étude est surtout due à sa difficulté sans atténuer son importance, puisque les spéculations ainsi surgies envers les surfaces comporteraient plus d'intérêt qu'à l'égard des courbes si leur nature était assez accessible. Il faut enfin consacrer la dernière leçon de géométrie intégrale aux spéculations qui, concernant les familles de surfaces, sont algébriquement subordonnées au domaine le plus vaste et le plus imparfait de l'intégration implicite. Fondées sur des caractères tirés du plan tangent ou de la normale, ces déterminations diffèrent des précédentes, en ce que la direction propre à chaque point n'est jamais définie, même implicitement ; ses deux coefficients doivent seulement offrir une relation donnée. Sous cet aspect, l'intégration, au lieu de concerner les équations totales, y devient toujours propre aux corrélations partielles, de manière à susciter des formations arbitraires, qui n'y sont jamais déterminables que si la surface doit finalement contenir autant de lignes spécifiées.

Étudiée même envers le premier ordre, cette extrémité de la géométrie intégrale ne comporte que des succès scientifiquement illusoires, quoiqu'ils soient logiquement utiles. Pour toutes les familles géométriques dont l'équation collective peut être directement instituée, on sait ainsi la reproduire d'après les types différentiels ; ce qui fournit, aux jeunes disciples de l'Humanité, d'intéressants exercices, à la fois abstraits et concrets. Une équivalente efficacité n'est jamais obtenue envers les cas qui l'exigeraient ; quand le groupe résiste à la synthèse géométrique, il échappe à l'analyse algébrique. Relativement aux surfaces canales, malgré la simplicité du caractère abstrait et concret, l'intégration ne supplée point à l'insuffisance directe parce que l'équation, quoique du premier ordre, contient les secondes puissances des deux dérivées. Étendue à des types

différentiels arbitrairement établis, l'opération peut souvent réussir, mais envers des cas seulement propres à multiplier des exercices logiques dont le principal essor est déjà réalisé.

Sous l'impulsion philosophiquement résultée de tels avortements, la dernière leçon concrète de géométrie intégrale se trouve normalement terminée en appréciant les corrélations d'un ordre supérieur au premier. Telle est leur imperfection nécessaire que le caractère différentiel des surfaces développables, où l'une des dérivées secondes devient moyenne proportionnelle entre les deux autres, ne comporte aucune intégration. Alors on sent combien le calcul des relations indirectes reste loin de suppléer à l'insuffisance du calcul des relations directes envers les principales questions de la géométrie objective. Bien appréciée néanmoins, cette double impuissance fait mieux ressortir l'importance des équations différentielles, immédiatement assignables à toutes les collections de surfaces convenablement définies. Il faut ainsi confirmer la supériorité philosophique du calcul différentiel sur le calcul intégral relativement à la géométrie objective. La nature indirecte des relations qu'il y fournit n'empêche pas d'utiliser leur constitution pleinement déterminée, tandis que les formations arbitraires qui sont alors propres aux types intégrés entravent davantage l'élaboration déductive, et même inductive. Il faut finalement étendre une équivalente comparaison à la géométrie subjective, où le principal intérêt concerne les lois différentielles, quoique l'intégration avorte moins : ce qui vérifie la décision philosophique du positivisme sur la vraie destination de la logique infinitésimale.

CHAPITRE SEPTIÈME.

MÉCANIQUE GÉNÉRALE.

Avant que le double législateur de la science fondamentale eut institué la philosophie mathématique en systématisant la géométrie, la mécanique générale avait irrévocablement surgi. Deux théoriciens du premier ordre, qui forment un couple inaltérable, avaient dignement posé ses principales bases, d'après les applications les plus décisives, respectivement céleste et terrestre. Depuis l'impulsion résultée de cette connexité, l'évolution de la dynamique attendait que l'essor abstrait fût assez dégagé des sollicitudes relatives à la science de l'étendue pour se vouer à la théorie du mouvement. Appréciation fondamentale.

Bientôt l'incomparable géomètre batave et le principal géomètre suisse, spontanément assistés de leurs dignes adjoints au calendrier occidental, complétèrent l'ébauche fondamentale, surtout en instituant les lois de la force centrifuge et de la mutualité mécanique. Rattachée à la préparation successivement émanée des trois couples, inaugurateur, complémentaire, et secondaire, la fondation de la mécanique céleste fut dignement accomplie par le plus éminent des théoriciens britanniques. Un tel résultat de l'ensemble du dix-septième siècle procura, dans

le siècle suivant, à l'étude rationnelle du mouvement, une prépondérance que le fondateur de la géométrie générale et le créateur du calcul infinitésimal avaient convenablement pressentie. Il faut historiquement regarder la construction de la mécanique céleste comme la principale source de l'élaboration dogmatique des théories dynamiques et même statiques. Telle fut l'origine concrète qui rendit finalement indispensable la coordination abstraite de la mécanique générale par le plus philosophe des grands géomètres ; il compléta l'institution de la philosophie mathématique en étendant à la mécanique la systématisation algébrique de la géométrie.

On ne peut normalement apprécier l'ensemble de cette évolution qu'en la rattachant à la marche fondamentale de la préparation humaine, depuis le début de la transition occidentale entre la théocratie et la sociocratie. Afin qu'une telle liaison soit assez caractérisée, il faut spécialement reconnaître la connexité de l'élaboration dynamique avec la conception du mouvement terrestre et l'institution de la législation planétaire. Rendue évidente d'après l'enchaînement dogmatique, la filiation historique de ces trois progrès se résume dans la coïncidence, nullement fortuite, où le premier émane des organes propres aux deux autres.

Rapportée à l'ensemble de la préparation occidentale, cette triple évolution comporte une explication que le point de vue purement scientifique n'aurait aucunement permise. Étrangère à l'antiquité, quoique ses bases mathématiques s'y trouvassent assez posées, elle ne fut nécessairement réservée aux modernes qu'en vertu de sa liaison naturelle avec l'extinction du régime théologique et l'avénement de la synthèse positive. Après que l'explosion protestante eut spontanément dévoilé l'épuisement radical du monothéisme, la principale sollicitude des vrais penseurs devint involontairement relative à l'élaboration finale de

la positivité rationnelle. Les grands esprits du dix-septième siècle sentirent que là devait désormais résider l'unique source du régime, intellectuel et social, propre à la situation moderne. Ils durent spécialement reconnaître l'importance de la théorie générale du mouvement et de l'équilibre, qui constitue le lien direct du domaine mathématique avec l'ensemble de la philosophie naturelle. Tandis qu'elle surgissait, l'élaboration de la géométrie générale et du calcul infinitésimal dissipait la concentration géométrique de l'essor théorique. Étendu dès lors au complément mathématique, il fut ainsi conduit à satisfaire au besoin fondamental de la situation moderne en osant déjà tenter une systématisation universelle, qui devait réellement émaner du suprême domaine encyclopédique.

Dans cet effort, prématuré mais nécessaire, toutes les conceptions se ralliaient à la synthèse objective provisoirement instituée par le fondateur de la géométrie générale. Éveillé sur l'aptitude spontanée de la mécanique à compléter l'évolution mathématique, il systématisa l'usage universel de la théorie du mouvement avant qu'elle fût assez élaborée, de manière à mieux stimuler une préparation ainsi liée à l'ensemble des besoins spéculatifs. Avec les différences résultées d'une situation moins active, le créateur du calcul infinitésimal sentit autant l'importance d'une telle étude, à laquelle ses méditations spéciales fournirent des aperçus mal appréciés. Les deux législateurs de la science fondamentale durent surtout coopérer à l'institution de son complément par une influence indirecte mais décisive, en systématisant la géométrie et développant l'algèbre. Tant que les spéculations géométriques étaient spontanément restées objectives et particulières, l'étude générale du mouvement et de l'équilibre ne pouvait assez absorber les efforts mathématiques.

Examinée historiquement, l'institution de la géométrie sub-

jective fut doublement nécessaire à l'essor continu de la mécanique rationnelle, en rendant disponibles les forces qu'il exigeait et préparant leur instrument algébrique. Voilà comment cette institution, directement liée à l'avénement de la synthèse finale, s'y trouvait aussi rattachée indirectement, d'après ses relations normales avec l'étude immédiatement fondée sur l'épuisement du théologisme et l'ascendant du positivisme. On vit l'esprit mathématique, alors systématisé, par son double législateur, autant qu'il pouvait isolément l'être, devenir l'organe théorique des aspirations occidentales à la régénération de l'entendement humain.

Sous l'impulsion philosophique, l'élaboration de la mécanique générale fut surtout destinée, chez les meilleurs géomètres, à compléter la préparation logique déjà jugée indispensable à la réorganisation moderne. Avant que le début encyclopédique se trouvât assez terminé, les inspirations qu'il fit ainsi surgir osèrent même aborder l'extension directe de la méthode positive aux études sociales. Généralisées par le dernier organe du complément dynamique, les conceptions du premier sur le prétendu calcul des chances furent alors érigées en moyen d'instituer les théories supérieures d'après l'universelle extension de l'instrument élaboré dans les spéculations inférieures. Examinées à cette époque, de telles illusions ne méritent pas la flétrissure justement appliquée à leur empirique prolongation en un temps où le domaine suprême était enfin devenu rationnellement accessible. Si l'empirisme académique développa cette aberration pour éluder les obligations imposées à l'esprit théorique par l'ébranlement du peuple central, elle avait d'abord fourni le premier symptôme scientifique de la destination sociale des efforts intellectuels.

Bien que l'élaboration dynamique eût primitivement consolidé la discipline émanée du double législateur mathématique,

elle dut finalement seconder l'anarchie résultée de l'insuffisance d'une systématisation purement partielle. A mesure que l'algèbre augmentait son crédit en appliquant au mouvement l'aptitude logique d'abord développée envers l'étendue, elle aspirait à prévaloir d'après une culture isolée. Ses usurpations, furent spontanément secondées par la diversité des applications, qui permit d'éluder la discipline philosophique en attribuant une efficacité géométrique aux calculs dépourvus d'utilité mécanique, et réciproquement. Examinée empiriquement, cette double destination sembla de plus en plus justifier les prétentions métaphysiques de l'algèbre à constituer la science universelle, en cultivant la méthode indépendamment de toute doctrine. Successivement développées à mesure que la construction de la mécanique céleste dégagea les géomètres, les divagations algébriques se trouvèrent surtout appliquées aux conceptions dynamiques et statiques, qui, loin de discipliner le calcul, furent gravement altérées par son irrationnel ascendant.

Attentivement comparés, les deux derniers siècles de la véritable évolution mathématique manifestent, à tous égards, la supériorité philosophique de celui qui fonda la mécanique générale sur celui qui l'élabora. Nous voyons l'un subordonner l'instrument à l'usage, tandis que l'autre exagéra la déduction jusqu'à repousser toute induction, en s'efforçant de procurer un caractère purement abstrait aux bases, nécessairement concrètes, de la théorie positive du mouvement et de l'équilibre. Il faut alors regarder le matérialisme mathématique, auparavant progressif et même organique, comme étant irrévocablement devenu rétrograde autant qu'anarchique. Moins disciplinés que développés par leur destination illusoire, ses deux modes, abstrait et concret, opposèrent des entraves croissantes à l'essor décisif de la positivité rationnelle, qu'ils avaient spontanément secondée au dix-septième siècle. A mesure que l'esprit mathé-

matique s'accréditait d'après ses applications scientifiques, sa dégénération logique le rendait de plus en plus indigne de la présidence théorique qu'il avait officiellement obtenue.

Pendant cette manifestation décisive de l'impuissance propre à toute systématisation partielle, le développement spontané de la préparation encyclopédique tendait vers l'avénement direct de la synthèse universelle, seule capable de discipliner la science fondamentale en la consacrant. Il faut pourtant reconnaître que les dispositions théoriques seraient toujours restées insuffisantes si l'explosion centrale ne les avait irrévocablement liées aux impulsions sociales. Étendue dès lors au domaine humain, la positivité rationnelle y transforma la science en philosophie, d'où le principe affectif fit irrévocablement surgir la vraie religion, dont les divers préambules étaient assez élaborés. Tel fut l'enchaînement, intellectuel et social, dignement pressenti par le double législateur mathématique, autant que le permit la situation propre au principal siècle de la préparation encyclopédique. Érigée en complément nécessaire du premier domaine théorique, la mécanique générale doit finalement constituer la limite normale de l'esprit que son élaboration empirique tendit à faire partout prévaloir.

Toute existence étant naturellement accompagnée d'activité, la mécanique devient normalement inséparable de la géométrie, pour achever d'apprécier l'économie universelle abstraitement réduite à sa moindre complication. Il faut historiquement regarder l'établissement de la doctrine du mouvement terrestre comme ayant nécessairement ramené l'esprit occidental aux croyances spontanées sur l'activité matérielle, de plus en plus méconnue pendant la transition théologique entre le fétichisme et le positivisme. Si, d'une part, ce mouvement érige la planète humaine en astre essentiellement actif, il fait, d'une autre part, reconnaître que les existences quelconques qui se mani-

festent dans un tel séjour n'y peuvent jamais être vraiment inertes, et comportent seulement un repos relatif. Sous cet aspect, cette doctrine est autant incompatible avec tout théologisme envers l'ordre terrestre que quant à l'économie céleste, de manière à n'avoir pu prévaloir que d'après l'épuisement du monothéisme. Une telle appréciation fait spécialement sentir la connexité nécessaire, à la fois historique et dogmatique, entre l'institution de la mécanique générale et l'émancipation de la raison humaine. Retardée jusqu'à ce que le théologisme eût essentiellement épuisé son dernier mode, l'évolution du complément mathématique dut, réciproquement, garantir l'esprit occidental contre tout retour sincère et profond aux croyances surnaturelles. Elle ne put cependant développer une telle efficacité qu'en suscitant l'extension graduelle de la positivité rationnelle à tous les domaines encyclopédiques.

Il faut finalement regarder l'esprit mathématique comme incapable d'exercer sa principale influence tant qu'il n'est pas normalement étendu jusqu'à la théorie du mouvement. La transition entre la Logique et la Physique ne s'opère que d'après ce complément, sans lequel la première phase encyclopédique resterait esentiellement isolée. Elle ne pourrait dès lors développer une suffisante efficacité logique, faute d'un champ scientifique assez varié pour servir de type à l'essor théorique. Successivement élevée du nombre à l'étendue, et de l'étendue au mouvement, cette phase institue une progression fondamentale, qui peut seule ébaucher, dans le plus simple domaine, la hiérarchie positive des phénomènes quelconques suivant la complication et la dignité croissantes. Avant que la mécanique eut convenablement surgi, l'esprit mathématique, réduit au dualisme entre le calcul et la géométrie, ne pouvait offrir qu'une combinaison essentiellement immobile, dépourvue de liaison

scientifique, et par suite logique, avec l'ensemble de l'essor théorique.

Si, malgré son universalité nécessaire, la méthode positive ne saurait être normalement étudiée sans concerner une doctrine déterminée, il faut compléter ce principe en reconnaissant que le berceau doit avoir assez d'importance et d'extension pour réagir sur tout le système spéculatif. Avant que cette condition fut convenablement remplie par l'institution de la mécanique rationnelle, l'esprit mathématique semblait naturellement restreint à des spéculations isolées. C'est pourquoi son évolution était jusqu'alors restée sincèrement compatible avec l'ascendant universel du théologisme ou de l'ontologisme, malgré le constraste des méthodes. Elle devint directement contraire au régime ancien, quand elle fut irrévocablement étendue jusqu'à la théorie générale du mouvement et de l'équilibre. Rien ne put alors surmonter ni dissimuler la tendance continue de la positivité rationnelle à renouveler l'ensemble de l'entendement humain, au lieu de rester bornée au moindre domaine.

Mieux appréciable depuis qu'elle est entièrement réalisée, cette disposition doit faire davantage sentir l'importance normale du complément mathématique, non-seulement envers une lutte pleinement terminée, mais surtout pour une préparation toujours nécessaire. On doit y voir la principale difficulté que présente la conception générale de la hiérarchie encyclopédique, jamais suffisante chez ceux dont l'éducation embrassa le calcul et la géométrie sans y joindre la mécanique. De la Physique à la Morale, la transition devient normalement insensible, d'après la liaison, scientifique et logique, de la partie supérieure de la chimie avec la partie inférieure de la biologie. Une équivalente gradation s'établit entre la Logiqne et la Physique par le développement de la mécanique, dont les principales théories

ont spontanément surgi pour leurs applications célestes et terrestres. Sans une telle interposition, la hiérarchie encyclopédique devient directement inappréciable dès sa naissance, parce que la philosophie mathématique reste essentiellement séparée de la philosophie naturelle, quoiqu'elle doive lui servir de base.

Convenablement appréciée, la théorie générale du mouvement constitua, chez les modernes, le pas le plus décisif pour l'avénement universel de la positivité rationnelle. Unie, depuis le moyen âge, à sa destination humaine, par l'éssor de la chimie, directement liée à la médecine, la philosophie naturelle restait encore isolée de sa base mathématique, spontanément surgie des spéculations sur le nombre et l'étendue. Rien ne pouvait donc intéresser davantage la constitution encyclopédique que l'accomplissement de la transition normale entre la Logique et la Physique. Sous cette impulsion, la hiérarchie positive, devenue complète et continue, a directement tendu vers la régénération intellectuelle que l'épuisement du théologisme nécessitait en Occident. On doit, réciproquement, attribuer à cette connexité le retard, autrement inexplicable, de l'installation des études dynamiques, dont les germes statiques eussent naturellement suscité l'essor dans l'antiquité, s'il eût été compatible avec les destinées alors réservées au monothéisme.

On peut aussi reconnaître au complément mathématique une aptitude, non moins dogmatique qu'historique, à perfectionner autant la méthode que la doctrine. Le calcul et la géométrie font assez sentir les lois subjectives, sans pouvoir directement susciter une suffisante appréciation des lois objectives. Toutes les ressources propres à l'enseignement encyclopédique sont spécialement nécessaires pour empêcher les jeunes disciples de l'Humanité d'attribuer un caractère purement déductif aux spéculations algébriques et même géométriques. Rien de sem-

blable n'est à craindre envers la mécanique, où la base inductive ne fut essentiellement méconnue que quand l'anarchie académique eut radicalement altéré l'esprit mathématique. Alors les lois objectives sont directement senties avec la généralité convenable, indépendamment de leur liaison nécessaire aux lois subjectives, dont elles peuvent ainsi compléter l'appréciation normale, d'après la corrélation fondamentale entre l'ordre universel et l'ordre humain.

Mais la réaction logique de la mécanique rationnelle et son efficacité scientifique ne sauraient assez surgir si son étude n'est pas instituée et poursuivie philosophiquement. Elle offre, à cet égard, moins de difficultés que la géométrie et le calcul, soit parce que son ensemble, plus circonscrit, est mieux systématisable, soit parce qu'elle surgit sous de meilleure impulsions, quand les conditions normales étaient déjà devenues plus appréciables. Dans une telle étude, quoiqu'elle ait naturellement suscité le principal essor de l'ontologie algébrique, le positivisme put davantage surmonter les perturbations académiques. Il lui suffit de faire directement prévaloir la base inductive et l'institution subjective que le dix-septième siècle avait spontanément respectées. Renvoyant à la Physique les solutions spéciales suffisamment accessibles, il réduisit la mécanique rationnelle aux théories générales qui constituent sa destination logique.

Pour instituer l'enseignement normal du complément mathématique, il faut d'abord poser le problème fondamental qui caractérise son ensemble. On peut toujours le réduire à la combinaison des mouvements, si l'on a suffisamment égard aux deux modes, également généraux d'un tel concours, par composition directe et communication mutuelle. Sous le premier aspect, où les corps figurent comme des points, en considérant la translation sans rotation, on cherche le mouvement total qui

résulte de la coexistence de plusieurs mouvements séparément appréciés. Il faut, dans l'autre cas, combiner le mouvement total de chaque corps ou point avec celui des autres parties d'un même système suffisamment défini d'après une constitution quelconque. Tel est le double problème de la mécanique rationnelle, qui souvent y joint la recherche inverse, mais seulement envers la première question, la seconde étant trop difficile pour comporter un renversement alors oiseux. Il faut normalement conserver, en l'épurant, la conception des forces, spontanément instituée afin de considérer d'une manière abstraite l'influence habituelle des moteurs quelconques. Fondée sous un régime ontologique, elle tendit à dégénérer en pure entité quand l'anarchie académique eut temporairement surmonté l'impulsion philosophique imparfaitement émanée du double législateur mathématique, dont l'ascendant fut spécialement insuffisant en mécanique.

Il faut aussi reconnaître l'influence exercée sur cette dégénération par la confusion spontanée entre la conception dynamique et l'appréciation statique. Graduellement neutralisés sous les conditions convenables de direction et d'intensité, les divers moteurs peuvent se combiner de manière à ne produire qu'un équilibre total, où leurs efforts respectifs ne sont directement jugeables que d'après leurs pressions mutuelles. Une telle appréciation dut d'autant mieux conduire à considérer les forces indépendamment des mouvements que, suivant les influences, philosophiques et sociales, ci-dessus indiquées, la statique fut longtemps cultivée avant que la dynamique pût convenablement surgir. Après l'avénement de celle-ci, l'empirisme académique prolongea les habitudes métaphysiques, que le double législateur mathématique n'avait pu suffisamment rectifier, parce qu'elles semblaient ainsi fondées sur une destination spéciale. Leur rectification doit finalement

résulter de la distinction nécessaire entre la conception des forces, toujours relative au mouvement, et leur mesure, où l'équilibre peut souvent prévaloir.

Regardées comme des mouvements, actuels ou possibles, abstraitement séparés des moteurs correspondants, les forces exigent une appréciation corrélative envers les corps qui doivent habituellement subir leur influence, instantanée ou continue. Étendue à la mécanique, la subjectivité géométrique y fit normalement prévaloir l'institution fondamentale de l'inertie, sans laquelle aucune règle dynamique, ou même statique, ne comporterait la généralité convenable. Grâces à cet artifice logique, l'étude rationnelle du mouvement et de l'équilibre peut toujours se borner à la considération exclusive des forces extérieures, en écartant les réactions intérieures où le corps modifie leur action suivant des lois ordinairement inconnues. Le simple équilibre entre deux forces égales et contraires deviendrait radicalement douteux si le point qu'elles pressent était spontanément actif. Établie rationnellement, la mécanique a donc besoin que la matière y soit artificiellement traitée comme passive, en rapportant au dehors l'activité réellement émanée du dedans.

Examinée historiquement, l'institution de l'inertie constitua le nœud spécial de l'avénement du complément mathématique, où ce fondement nécessaire exigeait l'épuisement général de l'esprit théologique et l'installation géométrique de la subjectivité positive. Sans la première condition, une telle institution eût directement semblé contraire à l'ascendant graduel du principe positif, qui déjà ramenait l'intelligence aux habitudes fétichiques envers l'activité matérielle, en dissipant les illusions et sophismes monothéiques. Après que la conception théologique eût été péniblement rectifiée par la Physique, celle-ci devint longtemps contraire à l'essor rationnel du complément de

la Logique, en attribuant à l'appréciation objective un caractère essentiellement absolu. Mais l'avénement de la synthèse subjective en géométrie dut bientôt conduire à faire convenablement prévaloir, en mécanique, la relativité philosophique, de manière à laisser pleinement surgir l'institution de l'inertie, alors devenue autant opportune que nécessaire. Examinée dogmatiquement, cette relation explique la liaison historique entre sa construction cartésio-leibnitzienne et la fondation keplero-galiléenne.

D'après l'ensemble des indications précédentes, la base logique de la mécanique générale consiste dans la connexité permanente de deux institutions également nécessaires, dont la subjectivité fut pareillement méconnue jusqu'au positivisme. Il est facile de caractériser leur liaison mutuelle quand on a bien apprécié leurs destinations respectives envers les corps mouvants et les corps mus. Voilà comment la mécanique peut à la fois devenir abstraite et théorique, en faisant simultanément ressortir son insuffisance concrète et sa dignité systématique. A l'aide des forces quelconques, on écarte les moteurs déterminés, de manière à rendre les lois du mouvement uniformément applicables à tous les cas réels, en substituant des influences extérieures aux actions intérieures. Mais la restitution pratique finalement necessitée par l'inertie théorique doit ordinairement restreindre cette application à des considérations générales, sans pouvoir habituellement permettre les solutions spéciales.

Après avoir séparément apprécié l'institution des forces et celle de l'inertie, on peut aisément sentir combien chacune exige l'autre pour développer son aptitude logique. Mêlées dans toutes les conceptions relatives à la mécanique rationnelle, elles permettent d'y faire continuellement abstraction de la diversité des moteurs et de la réaction des mobiles. Avec les forces extérieures, on peut toujours représenter l'état altéré

par l'inertie intérieure, sans laquelle, réciproquement, leur influence ne comporterait aucune notion vraiment générale. Rapproché de son analogue géométrique, ce double artifice remplit, envers l'étude du mouvement, un office logique essentiellement équivalent à celui qu'exerce, pour la science de l'étendue, la double institution de l'espace et des types. Examinés philosophiquement, les deux cas sont pleinement comparables, soit d'après la parité du moyen, soit quant à la conformité du but; de manière à compléter, par l'affinité dogmatique, le rapprochement ci-dessus fondé sur l'enchaînement historique.

Nous devons finalement regarder la double institution de l'inertie et des forces comme spontanément résultée du premier exercice vraiment décisif d'une faculté partout nécessaire à la philosophie seconde, afin que chaque phase encyclopédique y puisse convenablement préparer la suivante. On est ainsi conduit à faire toujours abstraction des phénomènes supérieurs à la catégorie considérée, dont l'étude deviendrait autrement inaccessible, faute d'y pouvoir jamais tenir assez compte d'une réaction inconnue, qui peut d'abord être normalement écartée, parce qu'elle reste purement modificatrice. Mais le principe encyclopédique qui permet et prescrit une telle simplification interdit de l'instituer en sens inverse ; l'ordre inférieur ne comporte aucune élimination, même provisoire, dans l'étude d'un domaine qu'il domine. Examinée ainsi, l'abstraction théorique est nécessairement décroissante à mesure qu'elle concerne des spéculations plus élevées, toujours compliquées des précédentes, quoique indépendantes des suivantes. Nous pouvons déjà vérifier cette loi dans l'enceinte mathématique, où la géométrie écarte les influences mécaniques, tandis que la mécanique ne saurait aucunement négliger les conditions géométriques, comme, par l'institution de l'inertie et des forces, elle élimine l'appréciation physique.

Nous voyons ainsi surgir l'aptitude naturelle de la mécanique à manifester, envers la méthode positive, des caractères que la géométrie ne peut assez développer. On ne saurait suffisamment connaître la loi générale de l'abstraction théorique d'après l'institution de l'espace, qui pourtant en fournit la première application, parce que ce domaine reste d'abord isolé du système encyclopédique. Voilà comment la réaction philosophique de l'institution de l'inertie se trouve normalement liée à la principale destination de la mécanique, comme transition nécessaire entre la Logique et la Physique. Appréciée suivant ce type, la loi d'abstraction fut bientôt étendue aux parties supérieures de la philosophie naturelle, et finalement à la philosophie morale, où réside sa terminaison normale, quand l'objet coïncide avec le sujet. Tous les efforts des physiciens, des chimistes, et des biologistes, pour écarter respectivement l'affinité, l'état vital, et la socialité, furent spontanément guidés par l'élimination que les géomètres avaient convenablement instituée envers les conditions physiques du mouvement. On peut ainsi juger la réaction philosophique historiquement propre à l'institution de l'inertie sur l'ensemble de l'évolution théorique, qui n'eut jamais à surmonter une difficulté vraiment comparable à celle d'un tel début. Rapportée à l'initiation individuelle, cette appréciation doit dogmatiquement représenter ce pas comme pouvant toujours offrir une importance capitale, pour que les jeunes disciples de l'Humanité sachent dignement reproduire une semblable suite d'efforts logiques.

Toute l'efficacité philosophique de la mécanique est donc liée à sa position encyclopédique, qui résume l'ensemble de ses conditions, de ses influences, et même de ses dangers. Examinée d'après la progression ternaire qui la condense, l'évolution positive fait successivement prévaloir la subjectivité dans la Logique, en Physique l'objectivité, pour instituer, en

Morale, leur concours normal. Rapportée à cette succession, la mécanique devient normalement intermédiaire entre la Logique et la Physique, puisqu'elle manifeste l'objectivité, restée équivoque en géométrie, sans lui procurer la prépondérance qui ne convient qu'à la science préparatoire. Sous son impulsion, l'ordre extérieur se fait directement sentir à des intelligences qui d'abord n'avaient pu spontanément apprécier que l'ordre intérieur. Il faut même étendre cette influence jusqu'à la réaction morale, en reconnaissant que les lois subjectives, isolément conçues, peuvent souvent développer l'orgueil et la vanité, tandis que les lois objectives doivent toujours inspirer la soumission et l'humilité.

Terme normal de l'initiation mathématique, la théorie générale du mouvement et de l'équilibre complète, dans le plus simple domaine, une progression partielle qui représente la progression générale de la positivité rationnelle. On peut toujours regarder la Logique, la Physique, et la Morale, comme offrant, d'après la succession intérieure des trois éléments propres à chacune d'elles, la reproduction spontanée de la correspondance naturelle que leur ensemble forme avec le triumvirat religieux. Si partout l'élément supérieur devient spécialement relatif à l'Humanité, l'inférieur concerne davantage l'Espace, et le moyen la Terre. Comparativement appréciée, cette correspondance est surtout sensible en Morale, mais elle convient pleinement à la Physique, et même à la Logique, où les jeunes disciples du Grand-Être doivent d'abord l'ébaucher. On y doit particulièrement remarquer l'aptitude de la mécanique à représenter l'Humanité d'après l'ensemble de ses attributions logiques et scientifiques, spontanément résumées par le nom qu'elle reçut de la raison universelle, que les réformes spéciales n'ont jamais surmontée.

Élaboré sous l'anarchie académique, le complément mathé-

matique dut souvent susciter des aberrations et divagations qui ne sont pas propres à sa nature. Pourtant sa position encyclopédique l'expose à des abus qui demandent une sollicitude continue, surtout envers le matérialisme concret, dont il fournit la principale source. Isolé dans la géométrie et le calcul, l'esprit mathématique y put longtemps offrir le contraste de l'émancipation spéciale avec la foi générale. Complété par la mécanique, il osa directement aspirer à la présidence encyclopédique, en vertu de l'universalité nécessaire des lois du mouvement, dont l'influence sur tous les domaines supérieurs est normalement irrécusable. On doit surtout attribuer aux sophismes ainsi surgis la consistance du matérialisme théorique, qui, restreint à sa base algébrique, n'avait jamais été vraiment dangereux, même quand elle fut assistée par l'inspiration géométrique.

Fondé sur la mécanique, il devint directement insurmontable jusqu'à ce que le positivisme eût assez institué la systématisation universelle sous l'impulsion sociale. Exposée à ses atteintes la biologie n'avait pu s'en garantir qu'en niant l'assujettissement nécessaire des corps vivants aux lois générales du mouvement et de l'équilibre; ce qui sans la préserver de l'anarchie, l'entraînait vers la rétrogradation. Rattachée au domaine où le matérialisme mathématique ne pouvait gravement pénétrer, la discipline positive put seule surmonter des sophismes que la théologie, la métaphysique, et même la science, avaient vainement combattus. Mais ce succès n'aurait jamais été réalisé sans le début mathématique dont la religion universelle a toujours dû s'honorer, en vertu de l'indivisibilité propre à la vraie synthèse. Elle put ainsi rectifier les aberrations des géomètres, au nom du progrès comme de l'ordre, en faisant irrévocablement prévaloir la spiritualité positive sur le matérialisme scientifique et le spiritualisme métaphysique, alors devenus également arriérés et pertubateurs.

La rectification serait insuffisante si l'éducation encyclopédique ne la faisait directement pénétrer dans l'enseignement mathématique, de manière à dissiper la source directe d'une dégénération toujours susceptible de se reproduire sans une telle sollicitude. Examinées quand à leurs fondements dogmatiques, les prétentions de la mécanique à la présidence théorique sont plus dangereuses, quoique moins spécieuses, que celles de l'algèbre, parce que leur réalité partielle est normalement incontestable. Toutes les aspirations algébriques reposent sur l'universalité subjective du calcul des relations, qui doit partout sembler compétent, quand on a suffisamment reconnu l'identité nécessaire entre l'idée d'équation et la notion de loi. Rapportées à cette appréciation, de telles prétentions se trouvent radicalement écartées aussitôt qu'on peut directement juger les difficultés insurmontables que présentent, hors du plus simple domaine, l'établissement et l'élaboration des équations, toujours subordonnées aux études spéciales. A l'égard de la mécanique, les aspirations encyclopédiqnes ont un caractère essentiellement objectif; elles reposènt sur l'irrécusable participation des lois générales du mouvement et de l'équilibre à la production continue des phénomènes quelconques.

Étudié sous l'aspect concret, le matérialisme mathématique ne devient réellement sophistique qu'en exagérant l'influence objective qui lui sert de base, comme le fit son mode abstrait envers la puissance subjective qu'il invoque. La disposition à juger mécaniques les divers phénomènes de la physique, ne peut réellement convenir qu'à l'ordre céleste, où la discipline positive doit même surmonter les déviations spontanées de l'esprit mathématique. On les voit surtout caractérisées envers la prétendue astronomie sidérale, finalement flétrie comme irréligieuse, en tant que directement incompatible avec la nature subjective et le génie relatif de la synthèse universelle. Géné-

ralement considérée, l'astronomie planétaire, seule réelle et convenable, a même besoin d'être systématiquement préservée des usurpations suscitées par la théorie algébrique du mouvement, dans un domaine qui doit toujours rester plus géométrique que mécanique. Examinés dans leur ensemble, les principaux ravages du matérialisme concret sont spécialement relatifs aux diverses branches de la physique proprement dite, depuis la barologie jusqu'à l'électrologie.

Chimériquement instituées envers la plupart des cas, les applications de la mécanique à la physique terrestre tendirent à faire vicieusement prévaloir la déduction pour l'étude où l'induction doit spécialement surgir. Hors de la barologie, affranchie à la suite de l'astronomie, elles furent essentiellement subordonnées aux fluides métaphysiques qui dominérent la science préparatoire jusqu'à l'avénement de la religion positive. A la fois anarchique et rétrograde, le matérialisme mathématique s'efforçait ainsi de prolonger, sous forme objective, le règne de l'absolu, tandis qu'il entravait l'élaboration de la relativité subjective. Religieusement considérées, ses aberrations sont finalement flétries comme directement contraires à la dignité du Grand-Fétiche, dont elles méconnaissent la principale activité, pour la rapporter à des fluides imaginaires, qui le rendraient essentiellement passif. Même en barologie, où les hypothèses anti-scientifiques furent spontanément écartées, les applications spéciales de la mécanique générale, quoique mieux instituées, développèrent l'abus de la déduction, surtout envers les liquides. Elles devinrent philosophiquement inférieures à celles que le dix-septième siècle suscita sous l'impulsion directe du double fondateur de la dynamique. Si l'on y juge cette rétrogradation, on la voit essentiellement due à l'irrationnel orgueil développé chez les géomètres par la construction de la mécanique céleste.

Historiquement appréciée, cette principale application de la théorie générale du mouvement et de l'équilibre exerça d'abord une influence plus nuisible qu'utile sur l'évolution normale de la rationalité positive, en poussant l'esprit mathématique vers une vicieuse domination. Après avoir coordonné l'astronomie et lié la physique céleste à la physique terrestre, cette construction avait assez réalisé la destination philosophique que ses précurseurs avaient indiquée et qui fut toujours sentie par son fondateur. Bornée à ce double office, elle reste normalement indispensable afin d'augmenter la consistance et la dignité de l'esprit positif, ainsi conduit à quitter son berceau pour prendre graduellement possession de l'ensemble du domaine spéculatif. Les développements relatifs aux perturbations, qui suscitèrent les principaux efforts algébriques, ne purent essentiellement aboutir qu'à retarder l'évolution régénératrice, en prolongeant la phase mathématique de la positivité rationnelle. A l'égard de leur réaction spéciale sur les études célestes, ils ont finalement suscité des illusions oppressives, en plaçant sous le joug des géomètres une science dont le dix-septième siècle avait mieux apprécié le caractère et l'indépendance.

Il faut surtout attribuer ces vices à l'institution spontanément dispersive du travail théorique, qui poussait chaque classe de savants à d'aveugles usurpations, pour faire universellement prévaloir son propre domaine. Dans l'état normal, une organisation pleinement synthétique semble suffisamment garantir la raison publique et privée contre le retour de telles aberrations. Dirigée par un sacerdoce toujours préoccupé de sa destination sociale, même en développant son office théorique, la culture, constamment encyclopédique, des spéculations positives ne paraît jamais comporter des abus capables d'exiger une sollicitude continue. Il faut pourtant reconnaître que les principales déviations propres à l'évolution collective peuvent spon-

tanément surgir de l'initiation individuelle, soit chez les élèves, soit même parmi les maîtres. On ne doit jamais négliger les précautions, intellectuelles et morales, qui peuvent normalement empêcher le complément mathématique de susciter les aberrations toujours liées à sa position encyclopédique.

Relativement à cette discipline, le moyen le plus efficace consiste à renfermer la Logique dans son enceinte légitime, sans lui permettre aucune invasion en Physique, même céleste. Examinée à son début, l'usurpation mathématique commence envers l'astronomie, où l'instrument aspire à dominer l'usage, au lieu de s'y subordonner. Toujours fondée sur la tendance à déduire sans induire, où concourent notre faiblesse et notre orgueil, cette disposition n'a pas besoin qu'une classe particulière lui serve habituellement d'organe. Toutes les perturbations développées sous l'anarchie académique peuvent constamment renaître, à de moindres degrés, dans l'état normal, chez le sacerdoce, et même parmi le public. Ils n'en sauraient être suffisamment préservés que d'après une sage institution des études fondamentales, complétée par une discussion directe des abus propres à la première phase encyclopédique, et surtout à sa terminaison.

Graduellement étendue de l'astronomie à la physique, la domination mathématique doit être immédiatement repoussée dès l'invasion initiale. Rejetant toute explication trop précise et toute coordination exagérée envers le domaine céleste, on peut facilement appliquer le même régime à des études plus compliquées. Après avoir admis les usurpations mathématiques en astronomie, on est difficilement capable de les réprimer en physique, où, sans rien produire, elles doivent tout entraver. Voilà comment la discipline encyclopédique se trouve surtout obligée de bien instituer la transition nécessaire entre la science fondamentale et la science préparatoire. Il faut toujours regarder

ce passage comme le nœud le plus décisif de l'éducation théorique, tant pour l'individu qu'envers l'espèce.

Afin de mieux protéger la Physique contre la domination de la Logique, il importe que le positivisme fasse partout prévaloir une juste appréciation historique de l'efficacité spéciale des théories dynamiques en astronomie. Convenablement jugée, la seconde des sept bases encyclopédiques est essentiellement géométrique, et la mécanique n'y doit jamais figurer que comme dans la première, à titre de complément général, destiné surtout à la lier avec la troisième. Une discussion suffisamment dégagée des préjugés théoriques fait directement reconnaitre que les travaux algébriques sur la théorie des perturbations planétaires n'y purent jamais produire une découverte vraiment importante. Toutes les inégalités essentielles avaient été géométriquement appréciées par les astronomes longtemps avant l'explication dynamique, toujours guidée d'après la détermination directe, sans laquelle auraient souvent dévié des calculs qui ne sauraient rationnellement procéder. On pourrait normalement écarter de la mécanique céleste tous les détails relatifs aux perturbations sans susciter d'autre inconvénient réel que l'obligation, peu gênante, de renouveler plus souvent la mesure immédiate des coefficients propres à la législation planétaire.

La géométrie, qui longtemps suffit aux besoins mathématiques de l'astronomie, aurait toujours pu s'y passer de la mécanique si les nécessités philosophiques n'avaient normalement investi celle-ci d'un office général, vicieusement converti, par les algébristes, en domination spéciale. Examinées comparativement, les deux parties concrètes de la science fondamentale manifestent un caractère et des tendances naturellement conformes à leur position encyclopédique. Généralement inoffensive en vertu de son insuffisance spontanée et de son isolement

primitif, la géométrie assiste l'astronomie et la physique sans y tenter aucune usurpation. Géométriquement étudiée, la théorie de la réfraction, par exemple, développe sa loi fondamentale et renonce à l'expliquer ; tandis que, mécaniquement instituée, elle dédaigne les effets réels pour s'attacher aux prétendues causes. Il faut partout reconnaître que, hors du domaine purement mathématique, la théorie générale du mouvement et de l'équilibre rétrograda vers l'absolu jusqu'à l'avénement de la discipline positive, pendant que la science de l'étendue disposait au relatif.

Il importe, à cet égard, de bien distinguer entre les influences passagères d'une évolution nécessairement indisciplinée et les tendances permanentes naturellement propres à la position encyclopédique. Nous devons pourtant régler celles-ci dans la vue de prévenir le retour, toujours possible, de celles-là, d'après la similitude générale de l'éducation individuelle à l'initiation collective. Classée au centre mathématique, la géométrie absorbe le calcul en le développant, et prépare la mécanique sans la dominer, en s'y formant un lien nécessaire avec la Physique. La science fondamentale est normalement condensée dans son élément moyen, auquel le premier sert d'introduction et le dernier de complément. Il resta toujours pur, en vertu de sa position, du matérialisme abstrait suscité par l'algèbre et du matérialisme concret que la mécanique développe. Tous les dangers finalement propres à l'usurpation mathématique durent essentiellement résulter de la théorie générale du mouvement et de l'équilibre, où la première phase encyclopédique confine avec l'ensemble des suivantes, d'après l'universalité des lois correspondantes. On y doit donc concentrer le principal essor de la discipline normalement émanée de la religion positive envers des aberrations dont elle peut seule dissiper la source et prévenir le retour.

La rectification consiste à renfermer la mécanique rationnelle dans l'enceinte purement mathématique, où son office se borne à l'établissement des notions générales, en réservant les solutions spéciales aux études capables de manifester leurs conditions et d'apprécier leur caractère. Il suffit, à cet égard, de conformer la mécanique au type logique spontanément émané de la géométrie, dont la simplicité plus grande pourrait mieux aspirer à la spécialité des applications, envers laquelle l'expérience lui fit graduellement adopter une sage réserve. Tandis que la géométrie doit finalement renoncer à la plupart des rectifications, quadratures, et cubatures qu'elle eut primitivement en vue, on ne saurait admettre que la mécanique poursuivît des solutions précises dans des problèmes plus compliqués. Elle restera toujours incapable de déterminer le mouvement d'un solide même homogène, de forme quelconque, quand il est seulement animé d'une impulsion instantanée. Ses efforts, à cet égard, ne sauraient jamais aboutir qu'à transformer en embarras algébriques ou géométriques les entraves directement suscitées par l'application spéciale de la théorie générale des rotations qui suffit à nos besoins logiques.

Examinée philosophiquement, la discipline propre à la mécanique se trouve normalement résumée d'après la consécration systématique du nom que l'instinct vulgaire lui conserva, malgré les protestations officielles. Toujours apte à rappeler l'origine pratique et la destination active des études théoriques, cette dénomination doit continuellement caractériser l'insuffisance concrète des conceptions abstraites sur le mouvement et l'équilibre. Elle tend à renfermer les spéculations dynamiques et statiques dans leur enceinte générale, en leur interdisant une domination spéciale dont elles ne peuvent assez remplir les conditions, même envers les moindres cas. Relativement au domaine pratique, les aberrations des géomètres furent plus profondes que celles qui

résultèrent de leurs usurpations théoriques, au point d'avoir gravement altéré les notions fondamentales sur la mesure du travail mécanique. Examinées au dernier tome de cet ouvrage, ces déviations ne doivent être ici mentionnées que pour indiquer la tendance du positivisme à systématiser, sous ce rapport, les répugnances, confuses mais énergiques, que l'expérience inspire aux vrais praticiens contre les prétentions des faux théoriciens.

On doit finalement attribuer à l'algèbre la principale gravité des illusions et déceptions longtemps développées par la mécanique, qui s'en était spontanément préservée dans le siècle de sa fondation. Normalement étudiée, la théorie générale du mouvement et de l'équilibre fait systématiquement ressortir l'impossibilité des solutions spéciales envers un domaine aussi compliqué, sans attendre les désappointements résultés d'irrationnelles tentatives. Outre son aptitude à consolider et développer la méthode positive, elle comporte une efficacité morale directement propre à prévenir ou rectifier sa dégénération, en inspirant, mieux que la géométrie, une soumission profonde, bientôt étendue jusqu'aux lois émanées de l'Humanité. Rapportée à sa destination historique, toujours reproduite individuellement, elle doit surtout dégager le véritable esprit philosophique de son berceau nécessairement mathématique, en le poussant vers son domaine final. Irrationnellement appliquée aux détails, la partie de la Logique qui fait le mieux sentir les pensées d'ensemble se trouve donc placée dans une situation radicalement contradictoire, où le matérialisme abstrait, directement discrédité, tendit à se perpétuer sous le matérialisme concret.

Historiquement appréciée, la principale division de la mécanique ne comporte aucune incertitude, puisque la statique fut spécialement ébauchée par l'antiquité, tandis que l'essor de la

dynamique est purement moderne. On doit surtout attribuer cet intervalle aux conditions philosophiques et sociales que j'ai suffisamment caractérisées ci-dessus, et qui furent particulières à la préparation occidentale. Pourtant, cette explication étant essentiellement fondée sur la position encyclopédique du complément mathématique, il suffit de la préciser davantage pour y faire assez concorder l'appréciation dogmatique et le jugement historique. Examinée dans son ensemble, la mécanique est normalement dessinée à lier la Logique à la Physique, chez l'individu comme envers l'espèce. Fondée sur cette destination, sa division générale l'oblige à commencer par la théorie de l'équilibre, qui la rattache à la géométrie, pour aboutir à l'étude du mouvement, où s'opère sa principale communication avec la science préparatoire. Une même abstraction du temps rapproche la partie de la mécanique qui concerne l'activité neutralisée et la science directement vouée à l'appréciation passive de l'étendue. La mécanique est essentiellement caractérisée par la considération du mouvement, et n'introduit aucune nouvelle impulsion philosophique tant qu'elle reste bornée à l'équilibre.

A cet égard, il faut pourtant reconnaître que l'appréciation historique et l'examen dogmatique concourent à représenter la théorie de l'équilibre comme ne pouvant jamais être entièrement instituée sans se subordonner aux lois fondamentales du mouvement. Généralisée par les modernes, la statique fut ainsi traitée tant que l'esprit philosophique y put assez résister à l'empirisme académique. Elle n'avait pu surgir directement chez le grand géomètre qu'en se bornant à des cas particuliers, où l'induction avait spécialement fourni deux lois immédiates d'équilibre, l'une envers le levier à poids, l'autre pour les corps flottants. Relativement aux forces quelconques, les conditions de neutralisation ne furent réellement découvertes que sous l'inspiration dynamique, quoiqu'on se soit ensuite efforcé de les

en dégager, d'après la révolte des géomètres contre les philosophes. Examinée ainsi, la constitution didactique du complément mathématique semble radicalement contradictoire, jusqu'à ce que l'appréciation synthétique ait assez dissipé le conflit analytique.

Rationnellement instituée, la statique ne dépend que du préambule générale de la dynamique, immédiatement relatif aux lois fondamentales du mouvement. Elle peut toujours traiter les forces comme purement instantanées, puisqu'elle fait nécessairement abstraction du temps, dont l'influence prévaut dans la dynamique proprement dite, essentiellement vouée aux forces continues. Guidé par cette distinction, on voit comment la statique est à la fois indépendante et dépendante de la dynamique, parce que la théorie de l'équilibre exige seulement l'étude du mouvement uniforme, tandis que le mouvement varié constitue le principal objet de la mécanique. Après avoir suffisamment établi le préambule général du complément de la Logique, l'enseignement normal doit donc commencer son élaboration spéciale en instituant l'ensemble des doctrines relatives à la neutralisation d'activité. Regardant l'équilibre comme un cas particulier du mouvement, on peut ainsi construire sa théorie complète sans que le principal problème de la mécanique ait été directement traité.

Voilà comment la mécanique se trouve spontanément douée d'une constitution subjective, tandis que la géométrie, plus vaste et moins synthétique, put seulement l'obtenir sous l'impulsion systématique. Afin de mieux reconnaître qu'un tel avantage résulte surtout de la nature de cette étude, il suffit de remarquer que la réflexion l'a plus altéré que développé, faute d'une suffisante appréciation philosophique de l'esprit qui convient au complément mathématique. La subdivision objective qui résulte de la distinction entre les solides et les fluides de

vint didactiquement supérieure à la division subjective entre l'équilibre et le mouvement. Le coordinateur algébrique du complément mathématique voulut directement rectifier la déviation académique, en s'appuyant sur le concours décisif de l'essor historique avec l'enchaînement dogmatique. Approuvée sans être adoptée, cette rectification dut toujours rester insuffisante, parce qu'elle consacrait une distinction qu'il faut normalement écarter, en vertu du caractère abstrait de la mécanique générale. C'est à la Physique, et non à la Logique, qu'il appartient d'étudier les modifications que les lois universelles de l'équilibre et du mouvement subissent d'après la fluidité du mobile, comme par suite de toute autre condition concrète. Examinée en elle-même, la mécanique générale doit toujours se borner à l'état solide, puisque les notions qui le concernent sont seules communes à tous les cas, sauf l'appréciation, astronomique ou barologique, des particularités relatives à chaque constitution du système.

Étudié dans cet esprit, le complément de la Logique acquiert plus de consistance et de dignité, d'après une meilleure harmonie entre sa nature et sa composition, sans susciter aucune usurpation envers la Physique, justement choquée des hypothèses mathématiques sur la fluidité. Toutefois, en écartant une division vicieuse, on doit regarder la mécanique comme exigeant une distinction secondaire, dont le caractère pleinement subjectif est directement conforme à sa décomposition principale. A la vérité, le contraste, indiqué dans la définition fondamentale du complément mathématique, entre le cas d'un point et celui d'un corps, semble essentiellement objectif. Nous pouvons aisément dissiper cette apparence, en reconnaissant que la distinction est radicalement propre aux phénomènes considérés, sans aucun égard au mobile : elle se réduit à la différence entre la translation et la rotation, simultanément

accomplies, mais successivement étudiées, envers un système quelconque. Guidé par une telle appréciation, on sent que la seule subdivision normalement convenable à la mécanique générale n'offre aucune importance en statique et reste essentiellement destinée à la dynamique, où l'essor historique confirme, sous cet aspect, l'examen dogmatique.

Suffisamment purifiée des développements contraires à sa vraie destination, plus logique que scientifique, la théorie du mouvement et de l'équilibre doit aussi s'affranchir des études spéciales sur les principaux modes de variabilité, d'après les mêmes motifs, moins prononcés, qui rejettent les fluides. A cet égard, il suffit d'instituer les méthodes générales de la mécanique envers la constitution quelconque du système variable, et de caractériser les propriétés générales qu'elles dévoilent dans le mouvement et l'équilibre. Bien appréciées, les applications spéciales n'ont historiquement servi qu'à titre d'exercices logiques pour élaborer les doctrines purement abstraites de la statique et de la dynamique. Elles peuvent normalement remplir un office analogue, mais moins important, dans l'initiation individuelle, afin de faire mieux sentir la nature, les conditions, et la destination des méthodes et propriétés directement établies avec toute la généralité convenable. Réduites à quelques exemples bien choisis, ces études accessoires augmentent l'intérêt et la clarté des explications principales, sans obtenir l'extension exagérée que leur accorda le coordinateur algébrique de la mécanique.

Telles sont les diverses conditions dont la combinaison détermine le plan normal de l'enseignement propre à la transition fondamentale entre la Logique et la Physique. Elle doit d'abord accorder quatre leçons à l'appréciation philosophique que j'achève, en caractérisant successivement la position encyclopédique de la mécanique, sa double institution logique d'après sa

définition systématique, sa tendance au matérialisme, et sa constitution didactique. Mais, en réservant, comme dans les autres degrés mathématiques, une leçon pour le résumé normal, il faut consacrer trois leçons au préambule général, tant abstrait que concret, avant d'instituer la coordination spéciale des douze leçons directement propres à la doctrine statique et dynamique. Par cette succession d'études, les jeunes disciples de l'Humanité pourront suffisamment apprécier le complément de la Logique, en concentrant leur attention sur les conceptions qui le caractérisent. Les dix dernières semaines de l'initiation mathématique leur feront spécialement sentir la terminaison normale de l'apprentissage nécessaire à la positivité rationnelle, qui dès lors n'est plus séparée que par la Physique de sa destination finale, toujours présente à l'esprit comme au cœur. Après avoir systématiquement développé la soumission envers l'ensemble des lois réelles, le septième degré de la Logique fait déjà pressentir la coordination de l'activité, d'après la qualification spontanément pratique du complément mathématique. Rapporté spécialement à l'Humanité, comme source et but, ce nom fait involontairement allusion au principal problème de la sociabilité moderne, en rappelant l'obligation et la difficulté de concilier le progrès matériel et le perfectionnement moral par l'essor intellectuel.

Préambule général.

Après avoir synthétiquement apprécié le complément mathématique, il faut analytiquement instituer l'enseignement normal de la mécanique générale, suivant le plan que je viens d'établir. Le préambule scientifique, qui succède à l'appréciation philosophique et prépare la coordination spéciale, exige trois leçons, dont les deux premières caractérisent les bases physiques, et la dernière le supplément algébrique, propres à la théorie du mouvement et de l'équilibre. La nature, essentiellement concrète, de la principale partie d'un tel préambule y

conduit à faire directement sentir le véritable esprit qui convient à l'étude de la transition fondamentale entre la Logique et la Physique.

Considérant l'existence universelle dans sa moindre complication, la première phase encyclopédique y doit d'abord apprécier les propriétés purement numériques, qui sont les plus générales et les plus simples, comme concernant, non-seulement tous les êtres, mais encore tous les phénomènes. Une telle étude est entièrement abstraite, puisque les attributs correspondants supposent un siège qu'elle écarte : en sorte qu'elle ne peut assez ébaucher la positivité rationnelle, quoiqu'elle en institue le germe nécessaire. La science de l'Espace doit surtout consister dans l'appréciation des lois de l'étendue, qui concernent la condition fondamentale de l'existence matérielle. Toutefois, la Logique resterait nécessairement incomplète si l'étude rationnelle de l'étendue, absorbant celle du nombre, n'aboutissait point à celle du mouvement, sans lequel l'existence universelle ne saurait jamais être réellement conçue. Ébauchée d'après ce triple domaine, la positivité rationnelle apprécie une existence sur laquelle tout autre repose, et qui reste seule jugeable envers les corps célestes.

On peut alors regarder le berceau nécessaire du véritable esprit théorique comme ayant enfin acquis une suffisante extension, qui le lie à l'ensemble des spéculations réelles. La combinaison de l'étendue avec le nombre permet l'élaboration élémentaire de la méthode positive, mais en la représentant comme restreinte aux plus simples phénomènes, faute d'un champ scientifique assez vaste pour généraliser la base logique. D'après le complément relatif au mouvement, le domaine initial de la positivité rationnelle se rattache au domaine intermédiaire, et cesse ainsi d'être naturellement isolé du domaine final.

Ralliant tous les aspects mathématiques, la mécanique les lie

à l'ensemble des attributs physiques, de manière à faire directement sentir l'essor décisif de la hiérarchie encyclopédique, d'après une progression partielle qui représente l'échelle générale. Alors les jeunes disciples de l'Humanité peuvent spécialement commencer à reconnaître la subordination mutuelle, à la fois objective et subjective, des études positives. La mécanique étant normalement placée entre la géométrie et la physique, leurs caractères respectifs, tant scientifiques que logiques, s'y font simultanément sentir. La théorie du mouvement dépend de la science de l'étendue, sans être jamais dominée par celle-ci, dont celle-là doit toujours régler l'usage, y compris l'emploi du calcul correspondant. Il suffit de bien apprécier ce régime pour y trouver un type décisif des relations normales de chaque phase encyclopédique avec la précédente et la suivante. Élaborée ainsi, la mécanique fait directement sentir l'irrationalité des usurpations qu'elle même développait envers la physique avant que l'esprit mathématique fut irrévocablement discipliné. Rationnellement instituées, les théories mécaniques assistent les études physiques sans les dominer, comme elles-mêmes sont normalement liées aux doctrines géométriques.

D'après sa plénitude spéciale, l'esprit mathématique devient le premier degré de la positivité rationnelle, dont il pouvait seulement fournir le germe nécessaire, mais isolé, tant qu'il n'avait pas poussé l'examen de l'existence universelle jusqu'à considérer l'état actif. On a ci-dessus jugé les aberrations que dut empiriquement susciter l'éveil spontané d'une telle aptitude, sous une confuse appréciation de l'universalité nécessaire des lois mécaniques. Nous ne sommes normalement garantis contre la reproduction collective de ces déviations que depuis l'avénement de la synthèse subjective qui caractérise la religion de l'Humanité. Nous pouvons dès lors prévenir aussi leur retour individuel dans le noviciat théorique, en y rappelant, avec

opportunité, l'institution et la coordination de la philosophie seconde par la philosophie première. Après avoir convenablement descendu l'échelle encyclopédique, on ne saurait jamais oublier que si partout les lois mathématiques exercent une influence fondamentale, on trouve partout, et de plus en plus, d'autres phénomènes que ceux de l'étendue et du mouvement.

Examinées d'après l'ensemble de la préparation normale, les tendances matérialistes naturellement liées aux études mécaniques seront aisément surmontées par le sacerdoce initiateur. Rapportées aux habitudes déjà résultées de l'essor affectif et de la culture esthétique, les illusions et séductions mathématiques deviennent facilement appréciables. A des âmes journellement disposées, par le culte, surtout intime, à sentir la prépondérance du cœur sur l'esprit, on peut sans danger proposer des études qui, sous l'anarchie moderne, suscitèrent de graves perturbations intellectuelles et morales.

Si l'on examine avec plus de précision le développement historique de ces aberrations, on voit qu'elles ne sont pas émanées directement de la mécanique, mais de l'esprit algébrique, qui, toujours agent, veut partout diriger. Pendant le grand siècle scientifique où les travaux de détail se subordonnaient aux pensées d'ensemble, la théorie naissante du mouvement et de l'équilibre resta toujours pure des déviations qu'elle fit ensuite surgir, d'après la révolte des géomètres contre les philosophes. Elle fut pourtant disposée, dès le début, à faire partout pénétrer un matérialisme hardi, mais progressif et même organique, toujours fondé sur une irrationnelle appréciation de l'universalité nécessaire des lois mathématiques. Mieux jugé par l'instinct féminin que d'après la raison masculine, ce mouvement excita d'actives et profondes adhésions chez les âmes les plus sympathiques, quoique son caractère synthétique fût seulement provisoire en tant que purement objectif. Elles accueillirent

avec enthousiasme une synthèse qui faisait partout prévaloir la géométrie et la mécanique, parce qu'elles sentirent sa liaison aux besoins contemporains, sans redouter la réaction morale d'une impulsion directement vouée à la régénération occidentale.

Bien apprécié, le matérialisme mathématique ne devint essentiellement nuisible que quand l'algèbre y prévalut, d'après l'insuffisance de la discipline provisoirement instituée par le double législateur de la science fondamentale. Examinée philosophiquement, la mécanique céleste accrédita ces déviations, quoiqu'elle eût d'abord dissipé la synthèse objective qui les systématisait mais en les réglant. Le fondateur de la théorie de la gravitation, qui fit dignement prévaloir les lois sur les causes en astronomie, fut lui-même conduit, en physique, à chercher la prétendue cause de la réfraction, dont la loi réelle était pleinement connue. Toutefois, le principal essor des aberrations théoriques résulta du crédit que l'élaboration de la mécanique céleste procurait à l'algèbre, et des irrationnelles espérances ainsi surgies envers l'extension universelle de l'esprit mathématique. Alors le matérialisme géométrique et mécanique, qui fut, au dix-septième siècle, organique et progressif, devint irrévocablement anarchique et rétrograde, même dans la théorie générale du mouvement et de l'équilibre, radicalement viciée par l'invasion algébrique.

On peut maintenant reconnaître que l'éducation encyclopédique, après avoir normalement subordonné l'algèbre à la géométrie, saura facilement prévenir ou promptement surmonter le retour individuel des aberrations collectivement résultées du complément mathématique. Réduite aux théories générales, et renvoyant les applications spéciales aux études, astronomiques, ou physiques, qu'elles concernent, la mécanique vraiment rationnelle saura toujours borner le calcul à son office logique,

sans lui permettre aucune usurpation scientifique. Nous pouvons ainsi procurer à l'étude du mouvement et de l'équilibre une assistance déductive, et même inductive, dont elle a plus besoin que la science de l'étendue. Alors on peut finalement reconnaître que l'imperfection radicale du calcul intégral n'a pas autant d'inconvénients en mécanique qu'en géométrie, quoique son usage y soit plus nécessaire et plus fréquent. Renonçant aux solutions spéciales, la mécanique peut habituellement développer sa principale destination en se bornant à des formules ou relations générales, que la géométrie a souvent besoin de spécifier, pour que ses spéculations ne deviennent pas illusoires.

Sous l'aspect le plus philosophique, le complément mathématique peut normalement fournir aux jeunes disciples de l'Humanité le meilleur type de construction que comporte la première phase encyclopédique. On y doit simultanément apprécier les conditions de la synthèse théorique et l'impossibilité d'instituer un ensemble purement partiel. Faute d'une philosophie générale, le coordinateur algébrique de la mécanique entreprit une systématisation isolée, et pourtant complète, de la théorie mathématique du mouvement et de l'équilibre. Il y mérita d'être finalement classé comme le plus philosophe des grands géomètres; mais il ne put y réaliser la construction partielle qu'il avait projetée: l'avortement de cette incomparable tentative suffirait pour vérifier l'indivisibilité nécessaire de la vraie synthèse. Apprécié dans son ensemble, ce chef-d'œuvre constitue un admirable monument historique, sans instituer un type dogmatique, qui devait toujours rester essentiellement impossible jusqu'à l'avénement final de la systématisation universelle.

Quand la saine philosophie examine cet effort scientifique avec toute l'attention qu'il mérite, elle rend directement explicable le peu d'influence qu'il exerça sur l'enseignement qu'il

était pourtant destiné surtout à régénérer dans son ensemble. Une vaine aspiration à l'unité de principe y fait vicieusement prévaloir la déduction, et dissimule la base inductive que les fondateurs de la dynamique avaient spontanément manifestée. Elle accorde une extension exagérée aux distinctions secondaires envers la variabilité du mobile, et fait irrationnellement disparaître les notions principales sur le mouvement fondamental. Rapprochant de cette tentative la partie correspondante de l'incomparable composition où le même penseur entreprit de coordonner l'ensemble du domaine mathématique, on sent combien ses efforts devenaient plus synthétiques à mesure que leur champ s'étendait. Il faut finalement regarder la troisième partie de sa production principale comme ayant mieux conçu la mécanique générale que le traité qu'il y consacra, malgré l'immense mérite des explications scientifiques, et même des aperçus philosophiques, spécialement propres à celui-ci. Dans la manière de concevoir et d'instituer le principe mécanique de sa coordination algébrique, la supériorité de la tentative philosophique sur l'effort scientifique devient directement irrécusable. Aprés une telle épreuve, qui fit irrévocablement apprécier la domination de l'algèbre chez le plus éminent des penseurs spéciaux, on dut spontanément renoncer à coordonner la mécanique, jusqu'à ce que le positivisme eût normalement rattaché cette construction à la synthèse subjective.

Une saine appréciation des conditions fondamentales de la véritable unité fait directement reconnaître qu'elle n'est jamais possible qu'envers l'ensemble de notre existence, morale, intellectuelle, et pratique, où tout peut et doit se rapporter à l'Humanité, comme source et but nécessaires. Nous ne saurions, hors de nous, expliquer aucune classe de phénomènes avec un seul principe objectif, même après avoir beaucoup restreint le domaine partiel : l'universalité d'explication doit toujours être

purement subjective; mais elle devient alors complète. Il faut donc renoncer à coordonner la théorie générale du mouvement et de l'équilibre suivant une loi vraiment unique: sa base objective est nécessairement triple. Toutefois, la multiplicité des fondements inductifs n'empêche pas la mécanique rationnelle de fournir le meilleur type mathématique de coordination déductive. Il développe les diverses doctrines statiques et dynamiques comme les différentes parties successives de la solution générale d'un même problème, d'après la combinaison nécessaire entre la base logique ci-dessus expliquée et la base physique que je dois maintenant apprécier.

Étudié normalement, le complément mathématique peut simultanément intéresser les trois éléments de la nature humaine, tant le sentiment et l'activité que l'intelligence, à laquelle son ensemble offre une construction décisive quoique partielle. Réagissant sur le cœur, elle pousse au perfectionnement moral, en commençant à systématiser la soumission sur laquelle il doit toujours reposer. Il faut, pour cela, que la base objective et le caractère inductif y restent directement appréciables, sans quoi le développement d'une telle étude tendrait à stimuler l'orgueil déductif. Généralement considérée, elle peut autant consolider l'humilité que la soumission, en faisant habituellement sentir l'impossibilité des solutions spéciales, plus interdites à la mécanique qu'à la géométrie. Elaboré sous l'anarchie moderne, le complément mathématique doit spécialement confirmer, d'après sa propre histoire, le besoin d'une discipline dont la source est nécessairement morale: car la subordination de l'esprit de détail au génie d'ensemble y fut, au dix-septième siècle, un reste des mœurs du moyen âge.

Tendant, mieux que la géométrie, à faire directement sentir l'ordre extérieur, la mécanique développe l'appréciation spontanée des lois intellectuelles, déjà surgie en arithmétique, et de

plus en plus liée à tous les degrés de la Logique. On y voit spécialement commencer l'essor décisif de la continuité théorique, qui rend le plus simple domaine graduellement inséparable du plus éminent. Mais, en inspirant la soumission et l'humilité, l'étude encyclopédique du complément mathématique pousse à systématiser les aspirations pratiques qui doivent normalement perfectionner l'activité qu'elle examine dans l'existence universelle. Bien instituée, la mécanique générale doit toujours représenter la résignation humaine comme autant active que passive, en manifestant notre tendance à modifier l'ordre que nous subissons. Appréciée dans l'ensemble de ses réactions pratiques, la théorie du mouvement et de l'équilibre peut directement lier la Logique à la Morale, en signalant la connexité normale entre le progrès matériel et le perfectionnement moral, d'après les difficultés sociales graduellement suscitées par l'institution des machines.

Ces diverses indications suffisent pour caractériser les dispositions suivant lesquelles les jeunes disciples de l'Humanité doivent naturellement aborder et poursuivre l'étude spéciale du complément mathématique. Ils s'y sentent normalement dégagés des liens provisoires que la première phase encyclopédique avait nécessairement imposés à leurs aspirations synthétiques et sympathiques, dont ils peuvent désormais apercevoir la destination finale. Voilà comment s'explique la satisfaction que doit habituellement inspirer une étude qui, terminant l'initiation mathématique, la lie à l'ensemble de la préparation théorique. Il devient alors possible de reconnaître que la positivité rationnelle, ainsi sortie de son berceau nécessaire, pourra finalement atteindre son meilleur domaine, dont elle n'est plus séparée que par la Physique. Ces dispositions, qu'il importe de cultiver au début du complément mathématique, en développent l'étude avec le calme et la dignité qu'elle exige.

Examiné dans sa principale partie, le préambule général de la mécanique rationnelle consacre deux leçons concrètes à la triple base physique de la théorie du mouvement et de l'équilibre. Pour que l'exposition des lois fondamentales soit normalement conforme à la double nature du problème dont la solution repose sur elles, il faut spécialement attribuer à la première de ces leçons l'ensemble des notions objectives qu'exige la composition directe des divers mouvements d'un même corps ou point. On doit ensuite réunir, dans la seconde leçon, tous les principes qui concernent la communication du mouvement entre les différentes parties d'un système quelconque. Contractée autant que possible, cette distinction consiste à poser successivement les bases inductives de la théorie des translations et de la théorie des rotations. Après cette double appréciation concrète, l'appendice algébrique auquel est spécialement consacrée la troisième leçon fournit le supplément abstrait qui convient à l'institution normale de la mécanique générale, dont le développement propre doit alors devenir essentiellement déductif.

Ne devant jamais aspirer, en mécanique, à l'unité de principe, il ne faut point hésiter à rendre sa base objective aussi multiple que l'exige la positivité rationnelle dans un tel domaine. Une appréciation synthétique fait directement reconnaître que le mouvement peut-être suffisamment étudié d'après trois lois fondamentales, nécessairement irréductibles, dont chacune est normalement accompagnée de ses appendices naturels, qui ne doivent pas s'en détacher. Méditant sur l'ensemble du problème mécanique, on voit qu'il exige d'abord une loi générale quant au mouvement isolé, puis une seconde envers la composition des mouvements simultanés, enfin une troisième pour la communication du mouvement entre des corps distincts mais liés. Elles doivent normalement suffire à la construction

des doctrines statiques et dynamiques, puisque toutes les notions vraiment élémentaires s'y trouvent directement embrassées, sans que le complément mathématique ait jamais besoin d'élargir sa base physique. Nous devons pourtant regarder comme plus irrationnelles les tentatives destinées à la restreindre, sous l'impulsion métaphysique longtemps résultée de l'indiscipline algébrique.

Tardivement instituée, en vertu des motifs ci-dessus expliqués, la première loi du mouvement spécialement due au législateur astronomique, consiste en ce que tout mouvement est naturellement uniforme et rectiligne. Elle fut empiriquement confondue avec l'institution de l'inertie quand l'ontologie algébrique tenta d'expliquer ce qui ne peut jamais être qu'observé. Mêler l'objectif au subjectif, au point de prendre l'un pour l'autre, tel est le principal symptôme de la maladie métaphysique sous toutes les formes qu'elle comporte, depuis que l'étude des lois a directement éliminé la recherche des causes chez tous les vrais théoriciens. Pendant la révolte des géomètres contre les philosophes, on fut graduellement conduit à regarder l'inertie comme l'état réel de la matière, tandis que la première loi du mouvement devenait purement déductive. Le siècle précédent avait spontanément offert, sous ce double aspect, une meilleure attitude, même chez le fondateur de la mécanique céleste, malgré ses tendances métaphysiques, involontairement rectifiées par la rationalité contemporaine. Une aspiration croissante à la déductivité complète vicia la constitution didactique du complément mathématique jusqu'à l'avénement du positivisme. Mais, depuis mon traité fondamental, tous les bons esprits ont irrévocablement senti l'absurdité vraiment ridicule des prétendues démonstrations sur la constance spontanée des directions et des vitesses, uniquement appréciable d'après une suffisante induction.

Réellement composée de deux parties, la première loi du mouvement doit être séparément constatée sous les deux aspects qui lui sont propres, parce qu'ils ne peuvent aucunement rentrer l'un dans l'autre, quoiqu'ils constituent les éléments connexes d'une même règle. A leur suite, il faut normalement placer un complément mal apprécié, qui concerne la direction des forces purement passives, souvent combinées avec les puissances spécialement actives. Dans ce cas, la première loi du mouvement exige un appendice général, où la direction se juge sans contempler un acte qui ne peut alors s'accomplir. Il faut normalement regarder toute résistance comme dirigée suivant la perpendiculaire à la surface correspondante, en rendant purement inductive une notion vicieusement supposée déductive. On la voit spécialement résulter de l'observation émanée d'un judicieux théoricien envers le choc, où, quelles que soient les masses et les vitesses, deux impulsions ne peuvent jamais se neutraliser que quand elles sont simultanément perpendiculaires à la surface de contact.

Avec un tel supplément, la première loi du mouvement peut toujours caractériser chaque force, active ou passive, abstraction faite du moteur correspondant, conformément à la base logique ci-dessus établie pour la mécanique générale. Mais, après avoir directement institué cette loi de philosophie seconde, il importe de la comparer à la loi de philosophie première dont elle dut normalement fournir le germe mathématique. On doit finalement ériger la constance mécanique des directions et des vitesses en cas particulier de la persistance spontanée généralement appréciable envers une activité quelconque, cérébrale ou corporelle, tant collective qu'individuelle. Relativement au caractère théorique de la première loi du mouvement, il n'est aucunement altéré par un tel rapprochement; car la dixième loi de la philosophie première ne repose que

sur des inductions assez variées, parmi lesquelles figurent celles qui concernent la loi keplérienne. Établie ainsi, celle-ci se trouve indirectement fortifiée d'après la connexité normale entre les différentes branches scientifiques de son tronc philosophique, suivant l'esprit des notions inductives, toujours fondées sur la comparaison sans identité.

La seconde loi du mouvement, nécessairement due au fondateur direct de la dynamique, consiste dans la coexistence spontanée des translations quelconques, qui se combinent sans se troubler, chacune s'accomplissant comme si l'autre cessait. Une appréciation plus philosophique y doit finalement prévaloir, en y voyant l'indépendance du mouvement commun envers le mouvement propre, quand toutes les parties d'un système sont simultanément animées d'une même vitesse suivant la même direction. Mais, en vertu de cette condition, la loi galiléenne ne peut jamais convenir aux rotations, dont chacune imprime des mouvements nécessairement inégaux aux divers points du corps correspondant, même quand une ligne circulaire tournerait uniformément sur son axe géométrique. Examinée dans ses effets mécaniques, la rotation tend à séparer les parties d'un système quelconque, en sorte qu'elle y surmonterait toute cohésion en acquérant une suffisante rapidité. Nous devons toujours restreindre la seconde loi du mouvement aux cas où l'impulsion commune maintient les distances et directions mutuelles ; alors tous les points se meuvent entre eux comme si leur ensemble était immobile.

D'après l'application générale de la loi galiléenne à la composition des mouvements, la position directement atteinte par le mobile en un temps donné coïncide avec celle qu'il aurait finalement occupée s'il avait successivement parcouru, parallèlement à chaque force, le chemin qu'elle aurait séparément produit. Examinée envers deux forces, cette règle établit, sous

le véritable aspect philosophique, le théorème fondamental sur le parallélogramme des translations. Son usage, plus ou moins redoublé, suffit pour composer en une seule toutes les forces appliquées en un même point dans des plans quelconques. Elles peuvent être ainsi remplacées par une puissance unique, qui, réciproquement, serait pareillement décomposable en une infinité de groupes, dont l'équivalence consisterait à comporter une résultante identique. On doit normalement rapporter l'équivalence mécanique au mouvement et non à l'équilibre : car l'immobilité d'un point soumis à deux forces égales et contraires n'est réellement fondée que sur la loi galiléenne, quoiqu'on l'ait métaphysiquement érigée en axiome statique.

Unanimement considérée sous son vrai point de vue au dix-septième siècle, la seconde loi du mouvement dut naturellement susciter le principal essor de l'ontologie algébrique, même chez d'éminents théoriciens, pendant la révolte des géomètres contre les philosophes. Mais, dans l'état normal, on n'a besoin d'aucun effort pour faire directement sentir qu'elle ne peut jamais résulter que d'une judicieuse induction, dont tous les phénomènes fournissent la base spontanée, comme l'indiqua mon traité fondamental. Il est toujours facile de dissiper les difficultés que présente sa vérification, en reconnaissant que les anomalies apparentes sont uniquement dues aux rotations dont la translation se trouve ordinairement accompagnée. Lorsque tous les points d'un système mécanique décrivent à la fois des droites égales et parallèles, avec une vitesse et dans une direction quelconques, sans aucun mélange de rotation, on voit les mouvements partiels pleinement indépendants du mouvement commun. Étendue aux corps vivants, surtout animaux, cette conciliation y devient tellement nécessaire que l'induction galiléenne aurait pu principalement reposer sur les cas ultérieure-

ment représentés comme soustraits aux lois dynamiques et statiques.

Rationnellement appliquée, la seconde loi du mouvement peut seule établir la proportionnalité qu'exige l'ensemble de la mécanique entre les forces et les vitesses. Examinée convenablement, la question consiste à constater l'équivalence des deux modes, statique et dynamique, propres à la comparaison des forces, d'après leur neutralisation mutuelle ou leurs résultats respectifs. Appliquée à deux forces dirigées suivant la même droite, la seconde loi du mouvement fait aussitôt reconnaître que, quand elles produisent des vitesses égales, leur résultante équivaut à leur somme ; on peut graduellement étendre cette règle aux rapports quelconques. La comparaison des forces est tellement subordonnée à la loi galiléenne que, lorsqu'on a d'abord cru l'en affranchir en statique, on se trouve ensuite obligé de l'y rattacher en dynamique. Établie normalement dans le préambule général de la mécanique, elle devient directement applicable à toutes les spéculations suffisamment précises sur l'équilibre et le mouvement.

Après avoir scientifiquement conçu la loi galiléenne, il y faut philosophiquement apprécier le germe mathématique de la onzième des lois universelles qui constituent la philosophie première. Nous pouvons partout reconnaître que les phénomènes propres sont toujours indépendants des phénomènes communs, comme envers les événements purement mécaniques. Cette conciliation de l'activité de l'ensemble avec la corrélation des parties reste pareillement soumise à la condition fondamentale d'une suffisante conformité dans les effets spéciaux de l'impulsion générale. Il faut ainsi reconnaître que la législation des divers phénomènes comporte une certaine similitude, qui dut d'abord émaner du plus simple domaine. En l'étendant aux plus éminents, on éclaircit et consolide les différentes parties

de la philosophie seconde, uniformément subordonnée à la philosophie première, tant scientifiquement que logiquement. Nous devons donc terminer la leçon initiale sur le préambule général de la mécanique en indiquant aux jeunes disciples de l'Humanité la conformité normale entre la loi galiléenne et la conciliation sociale du progrès avec l'ordre. Si l'activité vraiment commune pouvait jamais altérer les relations mutuelles, l'existence morale et mentale deviendrait aussi contradictoire que l'économie matérielle : ce qui fait dignement apprécier la profondeur philosophique des aperçus mathématiques sur la loi de compatibilité.

Bien appliquées et rationnellement combinées, les deux premières lois du mouvement suffisent à tous les problèmes qu'avait essentiellement en vue l'élaboration initiale de la dynamique. On peut ainsi concevoir le long intervalle historique qui les sépare de la troisième, principalement due au fondateur de la mécanique céleste, quoique implicitement ébauchée par plusieurs de ses prédecesseurs. Nous devons, au contraire, regarder les deux premières lois du mouvement comme naturellement inséparables, puisque chacune d'elles reste confuse ou devient stérile sans l'autre : en sorte que, malgré la diversité réelle de leurs auteurs respectifs, leur découverte fut presque simultanée. Tant que les spéculations dynamiques se bornent aux translations, où les corps sont toujours réductibles à des points, ces deux lois suffisent à constituer la base inductive des élaborations déductives, sans avoir aucun besoin de la troisième. A son tour, celle-ci prévaut, mais avec un recours permanent à celles-là, quand le problème général de la mécanique est directement abordé dans toute son étendue et sa difficulté, pour combiner les mouvements d'après une liaison quelconque entre les mobiles.

La loi neutonienne, premier objet de la seconde leçon du

préambule que j'institue, proclame l'égalité constante de la réaction à l'action, pourvu que chacune d'elles soit convenablement mesurée. A l'égard des deux autres lois du mouvement, l'aspect secondaire succède au point de vue principal, à titre de complément spécial ou d'application générale. Bien instituée, la troisième loi suppose, au contraire, que la notion auxiliaire est préalablement élaborée, sous peine d'une inextricable confusion. On doit même regarder la plupart des objections propres à la loi neutonienne comme essentiellement suscitées par une insuffisante appréciation des principes relatifs à la mesure des forces actives ou passives. Relativement à cette comparaison, il ne nous reste maintenant qu'à déterminer l'influence de la masse, celle de la vitesse étant déja réglée d'après la loi précédente.

Examiné directement, le principe complémentaire représente les forces comme autant proportionnelles aux masses qu'aux vitesses : en sorte que, suivant l'ensemble des lois du mouvement, la mesure de chacune résulte du produit de la masse par la vitesse. Sous l'impulsion philosophique qui prévalut au dix-septième siècle, cette notion fut essentiellement jugée inductive, et d'intéressantes expériences furent même accomplies pour l'établir. Tous les sophismes ultérieurs de l'ontologie algébrique n'ont pu profondément altérer le caractère primitif, et la troisième loi du mouvement est toujours restée plus nette que les deux autres. Attribuée au fondateur de la mécanique céleste, elle ne lui devint réellement propre que d'après la généralisation qu'il lui procura, comme envers le théorème binomial. Rattachée à l'étude mathématique du choc, elle y puisa ses principales inductions, qu'il suffit ensuite d'étendre à tous les autres modes d'action mutuelle.

Fondée sur cette base, la leçon que j'institue doit simultanément établir la notion préliminaire et la règle essentielle qui se combinent dans la troisième loi du mouvement; quoique cha-

cune d'elles pût être séparément rapportée aux phénomènes correspondants. Il faut successivement considérer, envers le choc, les deux hypothèses extrêmes sur l'élasticité des mobiles, d'abord supposés entièrement dépourvus de ressort, puis parfaitement élastiques : les degrés intermédiaires ne peuvent théoriquement offrir d'intérêt ni de difficulté. Nous pouvons directement déterminer, dans le premier cas, d'après la troisième loi du mouvement, la vitesse finalement commune aux deux masses respectivement animées, avant le choc, de vitesses données. A ce cas on peut normalement lier le suivant, en concevant le choc des corps élastiques comme offrant deux périodes distinctes, l'une de compression mutuelle, l'autre de réaction propre. L'élasticité devant, dans la seconde, restituer, en sens contraire, une vitesse égale à celle que la première fit perdre, la formule primitive doit ainsi fournir les deux qu'exige la question finale.

Outre son utilité concrète, une telle appréciation peut toujours conserver l'importance abstraite qu'elle offrit aux théoriciens qui l'accomplirent, parce qu'elle fournit le meilleur mode propre à la vérification simultanée des deux parties de la troisième loi du mouvement. Nous devons accessoirement lier aux expériences qu'elle suscita les saines notions sur l'instantanéité des impulsions proprement dites, ultérieurement dissimulée sous l'ontologie algébrique. Convenablement étudié, le choc des corps élastiques présente un cas remarquable, où deux masses égales échangent leurs vitesses respectives; ce qui devient surtout frappant quand l'une d'elles est d'abord immobile. L'échange devant s'étendre à tous les corps bien juxtaposés, le dernier s'élance et tous les autres s'arrêtent aussitôt que le premier est atteint, même quand leur nombre devient très-considérable. Examinée philosophiquement, cette expérience, heureusement vulgarisée, acquiert beaucoup de prix, en prouvant

à la fois l'instantanéité du choc et l'exactitude fort approchée de l'hypothèse relative à la parfaite élasticité, sans laquelle une telle suite d'échanges n'aurait pas lieu.

Nous devons finalement lier la troisième loi du mouvement à la douzième loi de la philosophie première, qui dut y trouver son germe mathématique, mieux appréciable qu'envers les deux précédentes. On voit partout une égalité continue entre la réaction et l'action, pourvu que chacune d'elles soit, comme en mécanique, mesurée suivant les règles propres aux phénomènes correspondants. Beaucoup d'influences semblent d'abord dépourvues de réciprocité dans le domaine moral ; mais il en fut souvent de même, en Logique, avant que la positivité rationnelle y pût assez prévaloir : la mutualité se fait toujours sentir quand elle est bien appréciée. Le rapprochement normal des deux phases extrêmes de l'encyclopédie abstraite doit ici consolider, comme envers les deux cas précédents, la dignité de l'une et la consistance de l'autre, d'après l'universelle solidarité propre aux divers modes inductifs. Examinée ainsi, la loi neutonienne acquiert, après la loi galiléenne et la loi keplérienne, une importance philosophique que sa destination scientifique ne pouvait d'abord indiquer.

Telles sont les principales notions que les deux premières leçons sur le préambule général de la mécanique rationnelle doivent successivement établir envers les trois lois fondamentales du mouvement. Après les avoir séparément appréciées, il faut normalement juger leur ensemble sous les deux aspects, philosophique et scientifique, qui lui sont égalemént propres. Le septième et dernier degré de la Logique y devient objectivement connexe avec la philosophie première, comme le début l'est subjectivement par la vraie théorie des nombres. Examinées scientifiquement, ces lois constituent le contact direct entre la science fondamentale et la science préparatoire, dont les carac-

tères respectifs s'y trouvent tellement combinés qu'ils y sont difficilement séparables. Nous devons aussi reconnaître que leur application collective à l'ensemble des spéculations statiques et dynamiques constitue, envers chacune d'elles, une confirmation décisive de l'appréciation spéciale. Toutes les doctrines directement vérifiables dont elles fournissent la base physique envers le mouvement ou l'équilibre leur procurent, réciproquement, une autorité logique, dont le poids ne peut être bien senti qu'après avoir dignement complété l'initiation mathématique. Il pourrait normalement suffire à leur établissement didactique, si l'instruction dogmatique ne devait pas toujours faire spécialement ressortir l'enchaînement historique.

Nous devons maintenant consacrer cette leçon au double complément concret, à la fois inductif et déductif, qu'exige la troisième loi du mouvement pour satisfaire à sa destination générale. Une telle loi ne peut immédiatement régler la mutualité mécanique que dans le cas le plus simple, où deux corps, envisagés comme des points, agissent directement l'un sur l'autre suivant la droite qui les joint. Elle ne pourrait suffire envers les autres cas que si la réciprocité générale y devenait spontanément décomposable en de telles corrélations. Voilà pourquoi la théorie de la communication des mouvements ne fut assez instituée que lorsque sa loi fondamentale eut été suffisamment généralisée, en y remplaçant la notion primitive d'égalité par la conception définitive d'équilibre entre les forces perdues ou gagnées dans le conflit. On doit surtout attribuer ce pas décisif à l'éminent géomètre suisse qui concourut avec l'incomparable géomètre batave pour compléter la fondation de la dynamique: le grand géomètre français dont ce principe porte le nom en systématisa la notion et l'usage.

Étudiée philosophiquement la loi générale de la mutualité mécanique doit d'abord être spécialement appréciée envers le

cas qui la fit irrévocablemant surgir; il restera toujours propre à bien caractériser sa nature et sa destination. Le pendule seulement composé de deux molécules invariablement liées, tournant, dans un même plan vertical, autour d'un axe horizontal, fournit le type le plus simple de l'altération que la liaison de deux mobiles apporte à leurs mouvements respectifs. On doit alors regarder les quantités de mouvement que l'un des corps acquiert et l'autre perd comme assujetties à la loi d'équilibre du levier; ce qui suffit pour ramener ce cas au pendule simple, auquel on put graduellement rapporter, de la même manière, les pendules les plus composés. Généralisant ce type, on peut y substituer le mouvement simultané de plusieurs projectiles dont les distances mutuelles sont invariables, ce qui doit ordinairement empêcher chacun d'eux de décrire la trajectoire qu'il aurait isolément suivie. Examinées, dans ce cas, les forces respectivement acquises ou perdues doivent aussi se faire continuellement équilibre, en ayant convenablement égard aux conditions du système.

La loi de corrélation fut dogmatiquement présentée, par le plus fécond des grands géomètres, sous une forme ordinairement préférable à celle de son avénement historique. Uniformément conçue, elle consiste en ce que l'équilibre doit toujours exister entre les forces primitives dont tous les corps du système sont isolément animés et les forces propres aux mouvements effectifs, quand celles-ci sont toutes prises en sens contraire. Ce dernier état de la loi de mutualité mécanique se trouve mieux rapproché du germe spontanément résulté de la troisième loi du mouvement: il se réduit à remplacer l'égalité par l'équivalence. Il fait directement contraster les données et les inconnues du problème dynamique, en écartant les réactions mesurées d'après leurs combinaisons mutuelles. Dans les cas où ces réactions doivent être spécialement appréciées, on peut

finalement composer chacune d'elles à l'aide de ses deux éléments naturels.

Grâce à ce complément général de la troisième loi du mouvement, toutes les questions relatives à la seconde et principale partie de la dynamique peuvent normalement rentrer dans les problèmes correspondants de statique. La portée de ce principe est pourtant moindre que ne l'indiqua l'appréciation exagérée qui résulta de l'entraînement scientifique. On doit toujours éviter de le représenter comme ramenant l'étude du mouvement à la théorie de l'équilibre : car il ne peut jamais accomplir cette réduction qu'envers la mécanique d'un système, qui suppose celle d'un point, où son usage devient illusoire. Bien que, d'après cet enchaînement, le cas le plus simple se trouve spontanément absorbé par le plus compliqué, son appréciation directe doit d'abord prévaloir, quoique l'importance, l'extension, et la difficulté du second cas expliquent les préoccupations qu'il suscita longtemps. Examinés normalement, les deux cas se séparent dès le préambule général, dont la première leçon institue le mouvement d'un point d'après les lois keplérienne et galiléenne, tandis que la seconde règle celui d'un système par la loi neutonienne et ses annexes nécessaires.

Une appréciation pleinement philosophique du principe de concentration propre à la mécanique le fait finalement rentrer dans la treizième loi de la philosophie première, qui partout subordonne l'étude dynamique à l'examen statique. Non-seulement le mouvement suppose toujours l'existence, en sorte que les conditions fondamentales de l'une doivent constamment régir l'autre. Il faut, en outre, reconnaître que partout les mutations continuellement résultées de l'action mutuelle sont nécessairement réglées, comme en mécanique, par les lois propres à l'ordre correspondant. On voit ainsi surgir de la première phase encyclopédique, tant dogmatiquement qu'historiquement,

un principe dont la pleine appréciation et l'application essentielle doivent naturellement appartenir au domaine humain. Normalement assimilée à la loi sociologique où le progrès devient le développement de l'ordre, la loi de réduction propre au complément mathématique acquiert à la fois plus de consistance scientifique et de dignité philosophique.

Tel est le principe d'après lequel le mouvement d'un système serait toujours jugeable si la théorie de l'équilibre correspondant était assez généralisée. Il faut donc consacrer le dernier tiers de la seconde leçon concrète sur le préambule de la mécanique, à l'examen systématique de cette généralisation. Préparée par le principal fondateur de la dynamique, elle fut essentiellement accomplie avant la fin du grand siècle mathématique, quoique son essor décisif dût naturellement appartenir au siècle suivant. On ne pouvait assez sentir l'importance d'une telle généralisation que lorsqu'elle serait universellement destinée à faciliter l'étude du mouvement, au lieu de rester immédiatement bornée à perfectionner la théorie de l'équilibre. Subordonnée aux besoins dynamiques, la statique d'un système ne dut pleinement surgir que sous leur impulsion ; comme le montre la découverte des équations propres à l'équilibre de rotation par le géomètre dont le nom rappelle le principe de la conversion mécanique.

Toutes les notions relatives à l'équilibre d'un point peuvent directement émaner de la combinaison spontanée des deux premières lois du mouvement. Relativement à la statique d'un système, on ne saurait immédiatement obtenir une suffisante assistance de la troisième loi, même complétée par son annexe normale. On voit, en effet, que, d'après leur nature et leur destination, elles ramènent le mouvement à l'équilibre, sans pouvoir directement concerner celui-ci. Voilà comment la constitution normale de la mécanique abstraite exige un dernier

complément concret, où la théorie de l'équilibre devienne immédiatement généralisable. Alors on apprécie l'importance de l'induction galiléenne qui fournit le germe décisif d'une telle généralisation, en introduisant la considération des vitesses virtuelles envers l'équilibre des poids. Rapidement étendue à tous les systèmes de forces, elle resta longtemps négligée avant que la destination dynamique de la statique générale en eut irrévocablement dévoilé l'importance. Examiné dès lors avec le soin qu'il méritait, le principe des vitesses virtuelles fut aussi soumis aux divagations déductives partout émanées de l'ontologie algébrique.

Écartant une critique désormais devenue heureusement inutile, il faut normalement regarder la loi générale de l'équilibre comme étant à la fois inductive et déductive, en tant que résultée d'une combinaison nécessaire entre les trois lois fondamentales du mouvement. Convenablement établi, le principe des vitesses virtuelles doit d'abord concerner un point, quoique ce cas reste purement préliminaire, puisqu'il n'exige aucune élaboration qui lui soit réellement propre. Relativement au point libre, ce principe devient une conséquence de la loi galiléenne, où l'on peut toujours considérer la projection de la résultante sur un axe quelconque comme équivalente à la somme des projections de toutes les composantes. Il suffit d'appliquer cette transformation en estimant chaque projection d'après le produit ordinaire, où le cosinus doit alors être convenablement remplacé par la vitesse virtuelle : on est ainsi conduit à caractériser l'équilibre en annulant la somme des moments virtuels. Transportée du point libre au point retenu sur une surface ou ligne, cette condition y convient également à l'équilibre sans que la résultante y soit nulle, puisque sa direction y devient perpendiculaire au siége : mais le déplacement, primitivement quelconque, est finalement infinitésimal.

Maintenant, pour passer du cas préliminaire au cas général, il suffit de combiner la troisième loi du mouvement avec l'ensemble des deux premières, en ramenant l'équilibre d'un système à celui de ses divers éléments, pourvu que, aux forces propres à chacun, on joigne les réactions mutuelles. On peut ainsi reconnaître que, si l'on ajoute toutes ces équations partielles, les termes qui s'y trouvent naturellement dus aux puissances intérieures, ou passives, seront réciproquement détruits en vertu de la loi neutonnienne. Relatif aux forces extérieures, ou directement actives, le principe des vitesses virtuelles consiste à formuler leur équilibre en annulant la somme de leurs moments, sans considérer la constitution du système autrement que pour y conformer la mesure des vitesses fictives. Telles sont à la fois l'importance historique et l'efficacité dogmatique essentiellement propres à ce principe, qui fait immédiatement apprécier l'équilibre en écartant des réactions ordinairement indifférentes ou secondaires. Il doit pourtant être normalement accompagné de la loi générale que découvrit le coordinateur algébrique de la mécanique envers l'estimation directe des forces intérieures d'après les liaisons qui les suscitent.

Bien que ce complément doive ci-dessous obtenir l'examen qu'il mérite, il peut déjà trouver, dans le préambule de la mécanique, la base qui doit finalement prévaloir à son égard. On le voit directement émaner de l'appendice général ci-dessus introduit envers la première loi du mouvement, si d'abord on considère une condition qui ne concerne qu'un seul point, dont la pression est toujours perpendiculaire à la surface correspondante. Rapportée à plusieurs points, toute équation de liaison suscite, envers chacun d'eux, une force pareillement normale à la surface qu'il décrivait si tous les autres devenaient fixes. Nous devons ici laisser la forme purement géométrique à la loi lagrangienne sur l'estimation générale des forces intérieures,

dont l'intensité reste seule indéterminée. Examinée ci-dessous en appréciant la théorie spéciale de l'équilibre ou du mouvement, cette loi devient, pour l'initiation individuelle, comme dans l'évolution collective, la conséquence ou l'équivalent algébrique du principe des vitesses virtuelles ; elle en fournit le sens le plus précis.

Historiquement consideré, le développement du calcul fut toujours suscité par la géométrie, sans jamais devoir à la mécanique que des progrès secondaires, même envers les branches dont le principal usage concerne le mouvement et non l'étendue. Une telle marche confirme l'appréciation philosophique de la Logique comme essentiellement composée de la géométrie combinée avec le calcul, en destinant la mécanique à former la transition nécessaire entre la science fondamentale et la science préparatoire. Même il faut rapporter à la géométrie l'appendice algébrique auquel doit être entièrement consacrée la leçon finale du préambule normal de la mécanique générale : car le calcul des variations fut d'abord institué pour une destination purement géométrique. Après avoir pleinement systématisé la solution des plus difficiles problèmes de la géométrie objective, il dut finalement perfectionner l'élaboration des théories statiques et dynamiques. Néanmoins, quand le plus philosophe des grands géomètres illustra sa jeunesse par cette création abstraite, il était déjà préoccupé, même à son insu, de la grande coordination concrète qui devait surtout caractériser sa maturité théorique. Avant que le calcul des variations eut surgi, le plus fécond des grands géomètres avait assez généralisé l'élaboration qui le suscita, pour que ce but apparent ait plutôt fourni, dans un tel essor, le stimulant et le guide que la destination rélle. Rien ne peut mieux montrer combien la mécanique est impropre, d'après sa trop grande complication, à diriger l'évolution du calcul, dont les branches les plus adaptées à l'étude

du mouvement ont toujours émané de la science de l'étendue.

Une telle filiation doit normalement conserver assez de poids, surtout envers le calcul des variations, pour que la destination mécanique reste dogmatiquement subordonnée à la source géométrique. Nous pouvons ainsi vérifier, dans l'enceinte mathématique, l'aptitude du domaine le plus simple à préparer les méthodes principalement destinées au plus éminent; comme le fait l'ensemble de la Logique pour la phase finale de l'encyclopédie abstraite. Il sera toujours préférable d'établir les notions propres au calcul des variations en y subordonnant l'abstrait au concret d'après ses applications géométriques, avant d'apprécier sa destination mécanique, quoiqu'elle y doive finalement prévaloir. Tel doit donc être l'objet de la majeure partie de la leçon finale sur le préambule général de la mécanique rationnelle. Établie convenablement, cette explication rendra facile l'appréciaton propre au dernier tiers de cette leçon, car, la mécanique, en ouvrant, au calcul des variations, un champ plus vaste et plus important, n'a point agrandi sa constition abstraite, entièrement due à la géométrie.

Mais, d'un autre côté, les spéculations géométriques auxquelles ce calcul se rapporte ont un caractère trop isolé pour devoir être normalement incorporées à la science de l'étendue : c'est pourquoi je les ai systématiquement écartées du chapitre précédent. On les voit pourtant surgir dans les antiques recherches de la géométrie plane sur le maximum des aires isopérimètres elles sont même liées aux plus vulgaires appréciations par la détermination du chemin minimum, qu'il suffit de rendre relative pour l'ériger en question transcendante. Rationnellement conçues, ces spéculations consistent à trouver la formation propre à l'état maximum ou minimum d'une intégrale définie qui s'y rapporte; afin que la courbe correspondante offre un pareil caractère envers la mesure convenable. La comparaison

des courbes consécutives y remplace celle des divers points de la même ligne, et suscite, sous le nom de *variation*, une différentielle plus éminente, mais assujettie aux règles ordinaires du calcul infinitésimal, et spontanément préparée par les différentiations relatives aux paramètres.

Il faut géométriquement destiner le calcul des variations à développer la condition de maximun émanée du caractère fondamental sur l'état stationnaire, toujours propre à de tels problêmes, ici résolus en annulant la variation de l'intégrale considérée. Nous devons normalement diriger ce développement vers l'établissement, constamment réalisable, de l'équation différentielle de la courbe cherchée, dont la détermination sera dès lors livrée au domaine ordinaire de la géométrie intégrale, qui permettra rarement d'achever la solution. Toutes les règles propres au calcul des variations sont spontanément émanées de l'ancien calcul infinitésimal, soit quand à la double transposition de la variation envers la différentiation ou l'intégration, soit pour la loi d'intégration mutuelle, qui fournit la principale ressource du nouveau calcul. Élaborée de manière à faire graduellement disparaître la combinaison de la variation avec la différentiation, la condition ainsi formulée pour le maximum peut toujours aboutir à l'équation différentielle de la courbe cherchée, en y joignant les caractères accessoirement propres aux limites, quand elles sont variables. Guidé par le cas fondamental, essentiellement relatif aux lignes planes, on peut normalement étendre la méthode aux courbes quelconques, soit indifféremment comparées dans l'espace, soit choisies sur une surface donnée, à laquelle doivent alors convenir les variations primitivement libres. Rapportée aux problèmes d'ou résulta le nom historique de cet ordre de recherches, la méthode exige un supplément général, préalablement émané du plus fécond des grands géomètres, envers les cas où la constance d'une intégrale

secondaire doit toujours accompagner le maximun de la principale. Il suffit alors d'augmenter celle-ci d'un multiple convenable de celle-là, pour traiter la somme indépendamment de cette condition, qui se trouve implicitement considérée d'après la similitude spontanée entre la formulation de la constance et celle du maximun.

La destination primitivement géométrique du calcul des variations ne pourrait assez caractériser sa constitution logique si ces explications générales n'étaient convenablement suivies de types spéciaux dans le second tiers de cette leçon. Ils doivent surtout concerner les problèmes dont la solution est spontanément connue pour les cas vraiment usuels, afin que l'attention des jeunes disciples de l'Humanité soit mieux dirigée vers l'appréciation abstraite de la méthode algébrique, sans se préoccuper du but concret. Examinées convenablement, ces applications, plus logiques que scientifiques, doivent même susciter la confirmation philosophique, souvent émanée du domaine mathématique, sur la faible portée effective de nos moyens théoriques, malgré les plus puissants artifices. Telle est surtout la détermination du chemin minimum entre deux points, où la science n'a réellement ajouté que des énigmes algébriques aux notions spontanément obtenues de tout temps envers les cas plan, sphérique, et cylindrique. Il faut finalement reconnaître que le calcul des variations, en systématisant ces recherches, n'a pas surpassé les méthodes particulières pour les solutions géométriquement importantes, dont la refonte fit logiquement surgir une institution essentiellement destinée à la mécanique.

Étudiée, sous un aspect général, dans le dernier tiers de la leçon finale sur le préambule normal de la mécanique rationnelle, cette destination sera spécialement développée par l'élaboration directe des théories statiques et dynamiques. Pour sentir, même envers l'équilibre, l'harmonie naturelle du calcul

des variations avec le complément mathématique, il suffit de noter que le principe des vitesses virtuelles introduit des considérations infinitésimales spontanément distinctes de celles que suscite l'examen direct. Un déplacement fictif devenant ainsi nécessaire à la formulation statique, il importe que les accroissements correspondants ne soient jamais confondus avec les différentielles géométriques, qui s'y trouvent souvent mêlées. Relativement au mouvement, la différentiation mécanique, toujours rapportée au temps, doit être normalement distinguée de celle qui concerne la comparaison des divers points dans chaque position du système. Étendue des groupes discontinus aux corps continus, la méthode générale de formulation statique ou dynamique rend naturellement nécessaire, envers ses variations et les différentielles, des transformations essentiellement analogues à celles que suscitent les problèmes géométriques.

Sous cet aspect, on ne doit pas être surpris que le créateur du calcul des variations soit aussi le coordinateur algébrique de la mécanique rationnelle. Il existe, entre ces deux élaborations, une connexité philosophique essentiellement analogue à celle de la découverte relative au signe concret avec la fondation de la géométrie générale. L'un et l'autre cas exigent la même coïncidence entre l'auteur du préambule nécessaire et l'organe de la construction directe, quoique l'homogénéité des deux couples d'efforts soit naturellement inégale. Entre la carrière scientifique du philosophe français et celle du géomètre italien, il devait spontanément exister une différence toujours conforme à celle de leurs génies et de leurs vocations. Néamoins, les deux types deviennent normalement comparables quant à la marche générale de leurs travaux respectifs, en ayant suffisamment égard à la situation historique, et surtout à l'essor de la spécialité théorique dans l'intervalle qui les sépare. C'est à son

insu que le second tira de la géométrie l'institution qu'il dut finalement destiner à la mécanique; tandis que le premier avait sciemment élaboré, d'après la géométrie objective, le préambule nécessaire de la géométrie subjective. Examinés quant à leur réaction encyclopédique, les deux couples d'efforts ont pareillement tendu vers l'émancipation normale de la positivité rationnelle, en la poussant, l'un volontairement, l'autre involontairement, au domaine final, par la suffisante systématisation du domaine initial.

Coordination spéciale.

Afin de mieux caractériser la coordination spéciale de la mécanique générale, il faut d'abord indiquer le nombre des leçons propres à chacune des parties du plan précédemment expliqué. Partagées entre la statique et la dynamique, ces douze leçons seront respectivement consacrées, cinq à la théorie de l'équilibre, et sept à l'étude du mouvement. Toutes les autres distributions devenant mieux appréciables au moment de les introduire, il faut ici se borner à la décomposition générale des cinq leçons statiques en trois spécialement relatives à la composition des forces et deux directement propres à l'équilibre.

Convenablement appliquée, la seconde loi fondamentale du mouvement fait aussitôt surgir, sous une forme d'abord géométrique, puis algébrique, la règle élémentaire pour la composition de deux forces agissant sur un même point. Alors le carré de la résultante équivaut à la somme de ceux des composantes plus le double de leur produit par le cosinus de leur inclinaison: les obliquités de la résultante vers les composantes ont des sinus réciproquement proportionnels à celles-ci. Nous pouvons ainsi regarder la résultante comme dirigée suivant une droite dont les distances de chaque point aux deux composantes leur sont réciproquement proportionnelles: ce qui rend sa détermination, algébrique ou geométrique, indépendante du

point de concours. A l'égard d'un nombre quelconque de forces convergentes, la composition est algébriquement facilitée d'après la décomposition préalable de chacune d'elles selon trois axes rectangulaires, en la multipliant par les cosinus des inclinaisons correspondantes. Les composantes ainsi triplées s'ajoutent suivant chaque axe ; les carrés de ces trois sommes se réunissent dans celui de la résultante ; ses obliquités vers les axes ont des cosinus proportionnels aux sommes respectives.

Relativement aux forces parallèles, la règle élémentaire se déduit de celle qui concerne les forces convergentes en annulant leur inclinaison, si, comme on doit d'abord le supposer, leur sens est le même. Une telle modification rend la résultante parallèle aux composantes, et toujours équivalente à leur somme : ses distances aux deux composantes leur sont réciproquement proportionnelles. Nous pouvons ensuite rattacher à ce cas celui de l'opposition des composantes, en décomposant, d'après cette règle, la plus grande en deux de même sens qu'elle, dont l'une détruise la moindre, en sorte que l'autre devient la résultante, qui pourrait d'ailleurs être directement trouvée.

On est ainsi conduit à terminer la première leçon statique en instituant la composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, respectivement appliquées en des points arbitrairement donnés. Bien appréciée, la difficulté concerne le point d'application de la résultante, puisque sa direction et son intensité sont immédiatement connues d'après la règle élémentaire. Examinée géométriquement, la détermination de ce point n'exige qu'une suite de constructions respectivement suscitées par les compositions graduelles, en divisant chaque droite d'application en deux parties réciproquement proportionnelles aux composantes correspondantes. De là résulte le centre des forces parallèles, où doit toujours passer la résul-

tante, quand les composantes tournent autour de leurs points d'application sans altérer leur parallélisme, et même lorsque leurs intensités varient proportionnellement. Il faut alors réserver la détermination algébrique de ce centre à la seconde leçon, où toutes les lois élémentaires sur la composition des forces reçoivent un complément dont la principale destination consiste à faciliter leur formulation d'après la théorie des *moments*. Résultés de la multiplication de chaque force par la distance du pôle à sa direction ou du plan à son point d'application, les deux genres de moments doivent respectivement concerner les forces convergentes et les forces parallèles. Examinés géométriquement, les premiers peuvent être successivement représentés par les projections des forces sur la droite qui joint leur origine au centre des moments, ou par les aires des triangles qui joignent ce centre aux longueurs des forces.

Sous quelque aspect qu'on les considère, la loi du parallélogramme fait aussitôt reconnaître que le moment de la résultante, envers un point quelconque du plan des forces, est la somme de ceux des deux composantes, pourvu qu'ils soient toujours affectés du signe convenable. Toutes les difficultés propres à ce signe d'un produit, dont les deux facteurs en sont concrètement dépourvus, se dissipent d'après le sens suivant lequel chaque force tendrait à mouvoir son bras de levier autour du centre des moments supposé fixe. Après avoir ainsi rendu le théorème des moments pleinement uniforme envers deux composantes, il peut immédiatement concerner un nombre quelconque de forces comprises dans un même plan, sans aucune condition de concours. Rapportées successivement à trois points du plan, les composantes feraient ainsi connaître les moments correspondants de la résultante, dont la direction, la position, et par suite l'intensité, deviendraient alors appréciables, à l'aide de cette unique règle. Examinée convenable-

ment, cette solution se simplifie en considérant que la direction et l'intensité de la résultante sont nécessairement les mêmes que si toutes les composantes convergeaient : ce qui n'oblige à prendre les moments qu'envers un seul point.

Tous les embarras propres à la composition algébrique des forces parallèles se trouvent aussitôt surmontés en transformant la règle correspondante d'après les moments du second genre, dont les signes ne présentent aucune difficulté, puisque leurs facteurs en sont naturellement pourvus. Il est ainsi facile de reconnaître, d'abord pour deux composantes, puis envers un nombre quelconque, que le moment de leur résultante devient toujours équivalent à la somme des leurs. Examinée sous cet aspect, la détermination du centre se trouve aussitôt formulée d'après l'expression de ses coordonnées par rapport aux trois plans auxquels sont déjà rapportés les points du système.

Il faut alors compléter la seconde leçon statique en appréciant l'ingénieuse théorie où les deux genres de moments se rapprochent et se perfectionnent, à l'aide des couples dus au digne adjoint que le calendrier occidental assigne au principal constructeur de la mécanique céleste. D'après les transformations, de direction et d'intensité, propres aux couples, leur composition est aisément réglée, d'abord quand leurs plans sont parallèles, puis lorsqu'ils convergent. Elle permet de résumer, autour d'un point quelconque, tout système de forces dans la combinaison d'une résultante unique avec un seul couple, en transportant chaque composante à ce point, à l'aide d'un couple auxiliaire. Appliquée convenablement, la théorie des couples améliore la doctrine des moments en leur attribuant un sens directement mécanique, pourvu qu'on n'abuse pas des facilités d'exposition, et même de conception, qu'elle procure, en dissimulant la vraie filiation. Retardée jusqu'au temps où toutes les notions sur la translation et la rotation étaient suffisamment

établies, la pensée normalement destinée à lier les deux éléments dynamiques a seulement simplifié les explications principales, sans développer un domaine essentiellement épuisé.

Bien appréciée, la troisième leçon statique, spécialement relative aux centres de gravité, constitue à la fois l'application naturelle des deux précédentes et la préparation nécessaire aux deux suivantes. Abstraitement conçue, cette notion deviendrait entièrement indépendante de la pesanteur, en réduisant le centre de masse à son attribution purement géométrique, d'après la considération des moyennes distances. Toutefois, sans exclure une telle appréciation, souvent adaptée à la généralisation des théories mécaniques, il faut toujours préférer la consécration dogmatique de la filiation historique, où le complément mathématique reçut cette conception de la physique et non de la géométrie. Il est normalement conforme à la position encyclopédique de la mécanique d'y faire habituellement prévaloir le point de vue physique sur le point de vue purement géométrique, soit envers le mouvement, soit même pour l'équilibre ou la composition, contrairement à l'empirisme académique. Relatif à l'activité, le complément mathématique doit en puiser les notions dans la science qui les développe, sans qu'il cesse de reposer sur l'étude uniquement vouée à l'existence : le grand géomètre, en ébauchant la statique, n'y considéra que des poids.

Établie systématiquement, la notion du centre de gravité se subordonne à celle du centre des forces parallèles, en vertu du parallélisme qu'on peut normalement attribuer aux actions moléculaires de la pesanteur terrestre. Convenablement appliqué, le principe de la symétrie peut directement surmonter, envers les figures polygonales ou polyédriques, les difficultés naturellement propres à la composition générale des formules correspondantes, où les deux termes de chaque fraction sont

simultanément infinis. On peut ensuite ramener aux cas élémentaires les divers problèmes sur les formes curvilignes en décomposant chacune conformément à la méthode infinitésimale, et mesurant les poids d'après l'étendue. Les coordonnées du centre de gravité sont ainsi représentées par des rapports d'intégrales, dont le dénominateur commun est purement géométrique, tandis que les numérateurs respectifs expriment les sommes correspondantes des moments rudimentaires. Elles suscitent des difficultés algébriques essentiellement analogues à celles des questions sur la mesure rationnelle de l'étendue, et comportent plus rarement des succès complets, quand on écarte les cas que le grand géomètre avait spécialement traités.

Rapprochées des équations subjectives de la géométrie intégrale, les diverses formules générales sur les centres de gravité font aussitôt surgir d'importantes relations entre cette recherche et celles de quadrature ou cubature. Alors on saisit la connexité, déjà pressentie dans les derniers temps de la science grecque, de la double mesure des corps ronds avec le centre de gravité de l'aire ou ligne directrice. Nous pouvons ainsi faciliter les deux genres de détermination, de manière à faire alternativement croître les acquisitions spéciales, comme on le voit pendant le mémorable demi-siècle qui sépare et réunit les deux législateurs de la science fondamentale. Grâce à ces rapprochements, plusieurs corps peuvent être immédiatement carrés ou cubés, parce que les centres de gravité des figures correspondantes sont spontanément connus. On doit surtout reconnaître que ces relations rendent les mesures de corps ronds essentiellement indépendantes de la situation des directrices quant à l'axe de rotation, tandis que cette position pourrait souvent aggraver les embarras algébriques.

Complément naturel de la troisième leçon statique, la composition des gravitations mutuelles doit normalement ébaucher,

d'après le seul cas vraiment usuel, une doctrine essentiellement analogue, envers la convergence, à celle des centres de gravité pour le parallélisme. On peut d'abord formuler, à cet égard, la question la plus générale, mais en y faisant convenablement sentir l'impossibilité de surmonter les difficultés algébriques, et même de décider si l'ensemble des actions moléculaires des deux masses comporte une résultante. Nous devons ensuite borner la solution spéciale au cas séparément traité par le fondateur de la mécanique céleste, en calculant la gravitation totale d'une couche sphérique homogène vers un point quelconque. Tant qu'il reste intérieur, la résultante est nécessairement nulle; quand il devient extérieur, elle coïncide avec l'action du centre, où la couche serait hypothétiquement condensée. Il faut alors généraliser la conclusion, en l'étendant spontanément à la gravitation mutuelle de deux sphères, dont chacune se compose de couches concentriques homogènes, la densité pouvant arbitrairement varier d'une couche à la suivante. Nous ne devons pas considérer seulement ce type à raison de son utilité scientifique, pour laquelle son examen devrait normalement appartenir à la Physique. Une appréciation plus philosophique y doit directement prévaloir, et peut seule motiver sa place en Logique, où ce cas, convenablement traité, permet de juger les difficultés naturellement propres à la composition générale des actions moléculaires.

Après avoir assez institué la composition des forces comprises dans un même plan et celles des forces parallèles, on peut directement construire la théorie de l'équilibre, en consacrant la quatrième leçon statique au cas fondamental de l'invariabilité, puis la cinquième aux systèmes variables. Mais, avant de procéder à la recherche des équations générales de l'équilibre d'un corps solide, il convient d'apprécier leur nombre nécessaire, et même leur principale division. Examinée géomé-

triquement, l'invariabilité doit assez fournir de conditions distinctes pour déterminer les distances de chacun des points du corps à trois d'entre eux et les distances mutuelles de ceux-ci. Nous sommes ainsi conduits à reconnaître que l'équilibre d'un système invariable exige nécessairement six équations, qui, jointes aux conditions d'invariabilité, puissent toujours fixer la position de tous les points. On doit alors compléter la prévision géométrique en considérant que la moitié des équations d'équilibre est naturellement indépendante des coordonnées et seulement relative aux forces, afin que l'un des points conserve une situation arbitraire.

Il faut directement confirmer cette double appréciation d'après la signification mécanique des équations d'équilibre, dont chacune doit séparément empêcher l'un des mouvements vraiment élémentaires que le corps prendrait d'après les forces qui l'animent. Mélange de translation et de rotation, le mouvement général d'un solide entièrement libre suscite deux sortes d'équations d'équilibre, les unes seulement relatives aux forces, les autres entre les forces et les coordonneés. Par chacune des trois premières, la translation du corps est séparément empêchée suivant l'axe correspondant, tandis que chacune des trois dernières empêche la rotation respective. A l'aide de ce principe, on peut toujours prévoir les réductions que subira le nombre général des équations d'équilibre de chaque espèce quand les restrictions propres aux forces rendront naturellement impossibles les mouvements annulés dans les équations superflues. Relativement aux gênes qui concerneraient le corps indépendamment des forces, on pourra pareillement prévoir les modifications correspondantes, en considérant quels mouvements sont ainsi supprimés.

Le principe des vitesses virtuelles, convenablement appliqué d'après cette analyse préliminaire, pourrait directement fournir

les six équations propres à l'équilibre d'un système invariable, si sa nature ne devait pas le faire exclusivement réserver pour les systèmes variables. On doit dogmatiquement préférer la marche historique, où ce problème se subordonne aux règles de composition, primitivement déduites des deux premières lois du mouvement, sans aucun recours à la troisième, dont le concours n'est jamais nécessaire qu'envers la variabilité. Voilà comment on se trouve normalement conduit à formuler l'équilibre fondamental en combinant celui des forces comprises dans un même plan avec celui des forces parallèles, pour exprimer, en chaque cas, que l'une des forces est égale et contraire à la résultante de toutes les autres. Examinée directement, cette combinaison doit toujours suffire, puisque tout système de forces est immédiatement décomposable en deux groupes, l'un suivant un plan, l'autre perpendiculaire à ce plan; leur équilibre partiel devient indispensable à l'équlibre total. Dans une telle réduction du cas général aux deux cas particuliers spontanément accessibles aux règles élémentaires de composition, il faut noter le privilège du dualisme; car, si l'on décomposait le système en trois groupes respectivement parallèles aux axes, on introduirait trop de conditions.

Convenablement suivie, cette marche fait aisément trouver les six équations propres à l'équilibre d'un système invariable où la translation exige que la somme des composantes s'annule selon chaque axe, tandis que la rotation suscite l'annulation de la somme des moments correspondants. Renversant la relation ordinaire entre la composition et l'équilibre, on peut alors appliquer ces équations à déterminer la résultante d'un groupe quelconque, en la considérant comme une force qui, prise en sens contraire, produit l'équilibre total. Immédiatement déterminées par les équations de translation, sa direction et son intensité réduisent la question à trouver son point d'application,

d'après les équations de rotation. A leur inspection, on voit que leur constitution abstraite s'accorde avec leur interprétation concrète pour ne pas déterminer les trois coordonnées de ce point, entre lesquelles elles fournissent seulement deux relations, qui constituent les équations de la résultante. Rendue indépendante des coordonnées, la troisième relation exprime la condition nécessaire pour qu'un système quelconque de forces se résume en une force unique : la théorie des couples éclaircit et complète cette condition, en manifestant son interprétation mécanique.

On doit philosophiquement apprécier une telle notion, comme indiquant que, même dans l'ordre purement matériel, l'unité n'est jamais possible sans une certaine harmonie entre les éléments naturels. Cette activité dépourvue d'unité, qui constitue le cas le plus général, se trouverait ordinairement réalisée d'après la gravitation mutuelle de deux masses quelconques, où la forme et la constitution seraient rarement compatibles avec l'existence d'une résultante. Étudiée envers la réalité, cette notion doit partout indiquer une tendance spontanée à l'harmonie habituelle ; les cas d'agitation sans résumé, quoique rationnellement possibles et même naturels, restent toujours étrangers aux économies que nous pouvons effectivement connaître. Appréciée philosophiquement, la quatrième leçon statique fait directement sentir que l'équilibre est plus exceptionnel que l'unité, puisqu'il exige six relations au lieu d'une seule. Nous pouvons ainsi confirmer que l'état naturel de la matière consiste dans le mouvement, quoique sa conciliation avec l'ordre suppose un effort continu : mais ces notions objectives n'ont aucun caractère absolu : car elles résultent des lois, essentiellement relatives, sur lesquelles repose la mécanique générale.

La cinquième et dernière leçon statique est entièrement consacrée à l'équilibre d'un système variable, qui constitue la desti-

nation normale du principe des vitesses virtuelles. Il faut soigneusement apprécier ce complément général, mais en réduisant l'importance exagérée que lui supposa le coordinateur algébrique de la mécanique, entraîné par les préoccupations propres à ce cas. Même il convient d'y considérer, en premier lieu, le plus simple des deux modes qu'y comporte l'application du principe des vitesses virtuelles, en écartant les réactions correspondantes aux conditions qu'on y doit toujours envisager. Il faut normalement regarder l'aptitude à formuler l'équilibre indépendamment des forces intérieures comme le privilège spontané de ce principe. Toutefois, on doit finalement préférer le mode admirablement institué par le plus philosophe des grands géomètres pour appliquer ce principe de manière à mesurer les efforts réactifs qu'il fait d'abord écarter.

On peut toujours ramener les forces extérieures à des composantes parallèles aux axes, afin que les vitesses virtuelles coïncident avec les variations propres aux coordonnées des points correspondants. Rapportées les unes aux autres, d'après les relations obtenues en différentiant les équations de condition, ces variations se trouveront finalement réduites à celles qui doivent toujours rester indépendantes d'après la constitution du système. Il suffit alors d'annuler l'ensemble des termes séparément relatifs à chacune de celles-ci pour décomposer l'équation totale de l'équilibre en autant d'équations partielles qu'en exige le cas proposé. Généralement, ces équations, combinées avec celles qui définissent le système, pourront assez déterminer, outre les conditions extérieures de l'équilibre, la disposition mutuelle qu'il demande entre les points d'application des forces. Il faut normalement lier ce mode primitif au mode final d'après le procédé d'élimination introduit, pour cette transition, par le coordinateur algébrique de la mécanique. Nous pouvons toujours éliminer les variations dépendantes en

ajoutant chaque relation différentielle à l'équation totale de l'équilibre, après avoir affecté la première d'un multiplicateur auxiliaire. Également annulés en vertu de la disponibilité de ces facteurs ou d'après l'indépendance, les divers ensembles de termes propres aux différentes variations font toujours surgir autant d'équations partielles qu'en exige la solution, en éliminant les multiplicateurs à l'aide des conditions qui définissent le système.

Mais, en instituant ainsi l'élaboration statique, il faut la compléter en établissant l'interprétation concrète des multiplicateurs, spontanément suscitée par l'analogie des termes qu'ils affectent avec ceux qui proviennent des forces extérieures. Alors on reconnaît que le système peut toujours devenir hypothétiquement libre, si les termes dus aux liaisons sont convenablement attribués à de nouvelles forces. Guidé par la forme de ces termes, on voit que la force intérieure ainsi résultée de chaque liaison a, suivant les trois axes, des composantes constamment proportionnelles aux dérivées de l'équation correspondante envers les coordonnées respectives. Nous pouvons géométriquement résumer cette loi générale en regardant chaque force intérieure comme perpendiculaire à la surface que décrirait le point correspondant si tous ceux qui coexistent avec lui dans l'équation de condition devenaient simultanément fixes. On doit alors destiner l'évaluation des multiplicateurs à mesurer l'intensité de ces efforts réactifs, dont les directions sont ainsi connues d'après la définition du système.

Bien que la loi lagrangienne ait été finalement présentée, par son auteur lui-même, sous une forme directement indépendante du principe qu'elle complète et précise, il faut dogmatiquement préférer la filiation historique, seule assez naturelle. On doit davantage écarter l'explication géométrique ultérieurement due à l'inventeur des couples ; elle emploie des

considérations tellement détournées que l'origine de cette loi s'y trouve plus dissimulée que dans sa reconstruction algébrique, quoique celle-ci soit trop subtile. Grâces à l'appendice ci-dessus introduit envers la première loi du mouvement, la règle lagrangienne pourrait directement résulter de l'induction, si sa filiation historique ne devait normalement prévaloir. A quelques motifs qu'on la rattache, il faut toujours l'étendre aux systèmes définis par des relations entre les distances de chaque point à divers centres; car les perpendiculaires aux surfaces ainsi constituées se déterminent de la même manière qu'avec les coordonnées ordinaires. Réellement susceptible de faire directement surgir les équations graduellement émanées du principe des vitesses virtuelles, la loi lagrangienne ne saurait pourtant dispenser d'une doctrine où résident sa source historique et sa constitution dogmatique.

On doit normalement terminer la leçon finale sur la théorie de l'équilibre en indiquant, d'après le meilleur type, l'extension de la méthode générale aux systèmes continus, où la question consiste surtout à déterminer la figure convenable. Relativement à la chaînette, seul cas vraiment satisfaisant, les conditions de liaison se trouvent naturellement remplacées par l'immuabilité de longueur d'un élément quelconque de la courbe cherchée. Bien apprécié, ce cas suffit pour caractériser l'application générale du calcul des variations aux plus difficiles questions d'équilibre, où les transformations qui lui sont propres peuvent toujours aboutir aux équations différentielles de chaque problème. Il faut normalement réduire à cet office l'usage statique, et par suite dynamique, d'un tel calcul; car, envers les systèmes discontinus, ses notations sont seules employées, sans aucun recours à ses règles. Sous cet aspect, on doit philosophiquement compléter le rapprochement indiqué ci-dessus, en reconnaissant que la création de ce calcul fournit à la coor-

dination de la mécanique un préambule moins nécessaire que la découverte de la loi du signe à la systématisation de la géométrie.

Dans la première des sept leçons dynamiques, il faut normalement instituer la théorie générale du mouvement rectiligne, sur laquelle reposent toutes les doctrines ultérieures. Étudiée philosophiquement, elle consiste en une double comparaison essentiellement analogue à celle qui constitue la géométrie différentielle. Voilà comment on doit finalement juger les deux degrés d'appréciation successivement propres à tout mouvement, d'après les types naturellement résultés, d'abord de l'uniformité, puis d'une constante accélération. Ils remplissent, en dynamique, un office normalement équivalent à celui que comportent, en géométrie, la ligne droite et le cercle pour instituer l'étude des courbes quelconques. Établie convenablement, l'analogie concrète est pleinement confirmée par la similitude abstraite ; car la mesure des vitesses acquises et des forces accélératrices exige des dérivées qui correspondent à celles d'où dépend la détermination des tangentes et des cercles osculateurs.

Il est d'abord facile de comparer tout mouvement au type d'uniformité naturellement résulté de l'impulsion, en reconnaissant, d'après la méthode infinitésimale, que la vitesse équivaut à la dérivée de l'espace envers le temps. Nous devons davantage insister sur la seconde comparaison fondamentale ; le type de constante accélération spontanément émané de la pesanteur exige une étude préalable, où la Logique se trouve spécialement liée à la Physique. Non seulement cette liaison fit historiquement surgir la théorie générale des forces accélératrices, mais elle doit dogmatiquement diriger son exposition normale, afin de mieux caractériser l'influence nécessairement propre à la position encyclopédique du complément mathéma-

tique. Étudiée philosophiquement, la théorie dynamique de la gravité doit toujours offrir un profond attrait, comme premier pas vraiment décisif où la positivité rationnelle, enfin dégagée de son berceau géométrique, aspire à diriger graduellement toutes les spéculations réelles. Sous l'hypothèse spontanée d'une pesanteur constante, la vitesse devient aussitôt proportionnelle au temps; d'où sa loi générale conduit, par une intégration facile, surtout géométriquement, à reconnaître que l'espace est toujours proportionnel au carré du temps.

D'après sa systématisation de la théorie des contacts, le plus philosophe des grands géomètres dut normalement fonder une doctrine analogue envers l'assimilation des mouvements, de manière à rendre finalement relatives la conception et la mesure des forces accélératrices. Une distinction générale entre les forces instantanées et les forces continues était naturellement résultée de l'étude dynamique de la pesanteur; elle ne fut jamais altérée par les sophismes académiques qui tentèrent de l'effacer d'après d'irrationnelles discussions sur le mode d'action des moteurs. Dans tout conflit mécanique, la force instantanée est d'abord prépondérante, quoique de moins en moins, quelle que soit l'intensité de la force continue; mais celle-ci doit finalement prévaloir, même avec une faible énergie : ce qui suffit pour rendre un tel contraste pleinement irrécusable. A la première classe de forces, l'impulsion proprement dite fournit un type spontané; la pesanteur terrestre, en vertu de sa constance, doit normalement devenir le modèle de la seconde, et peut aussi caractériser leur combinaison. Rapportée à cette unité, toute force accélératrice est, à chaque instant, mesurée par la dérivée de la vitesse envers le temps, ou la seconde dérivée de l'espace : alors le mouvement varié se trouve autant connu que le permettent les assimilations vraiment efficaces.

Élaborées convenablement, les deux équations fondamen-

tales, entre l'espace, le temps, la vitesse, et la force, ramènent à des problèmes purement algébriques toutes les questions propres à la théorie générale du mouvement rectiligne, où chaque relation de ces variables fournit une base suffisante. Mais, dès ce début de la dynamique, les jeunes disciples de l'Humanité peuvent directement sentir combien les solutions spéciales sont naturellement interdites à la mécanique rationnelle par l'imperfection nécessaire du calcul intégral. Il faut pourtant caractériser la véritable efficacité de ces formules générales en les appliquant à l'appréciation de quelques hypothèses qui, sans ce critérium, susciteraient des discussions interminables. Nous devons d'abord considérer celle que le prince des philosophes osa prématurément former sur la chute des poids, en y supposant la vitesse toujours proportionnelle à l'espace. Examinée d'après la théorie précédente, cette hypothèse est directement exclue, sans exiger aucune expérience, comme aboutissant à faire aussi croître la force accélératrice proportionnellement à l'espace ; en contradiction, non-seulement avec la pesanteur, mais avec tous les mouvements imaginables. Nous devons ensuite appliquer le même mode à la discussion rationnelle de la supposition plus plausible qui longtemps entrava l'admission des lois dynamiques de la gravité, par la substitution de la suite des nombres entiers à celle des nombres impairs pour les espaces propres aux différentes secondes de la chute. Traitée d'après les formules générales, cette hypothèse correspond, comme la véritable, à la constance de la pesanteur, mais en y joignant une secousse initiale ; ce qui suffit pour la faire aussitôt rejeter, indépendamment des expériences qu'elle suscita dans un temps où la dynamique était difficilement comprise.

Rattachée à la théorie précédente, la doctrine du mouvement curviligne, objet de la seconde leçon, n'exigea d'autre

effort vraiment capital que la découverte de la loi galiléenne, dont elle dut naturellement fournir la source. Étudiée d'abord à l'égard des projectiles, elle y doit toujours trouver son meilleur type, où, d'après les lois sur la chute des poids, la seconde loi fondamentale du mouvement suffit pour instituer l'ensemble de la solution. Généralisée convenablement, la théorie du mouvement rectiligne fait ainsi surgir une équivalente généralité dans celle du mouvement curviligne, surtout envers un point libre, dont la force accélératrice s'estime, suivant les trois axes, par les secondes dérivées des coordonnées respectives. Il devient alors facile de ramener à des questions purement algébriques tous les problèmes où, les forces étant données sous un mode quelconque, on cherche la vitesse et la position du mobile à chaque instant avec sa trajectoire, en déterminant les constantes d'après l'état initial. Réciproquement, si l'on connaît la trajectoire et la manière dont elle est parcourue, les mêmes équations dévoilent la loi des forces : plus susceptible d'issue algébrique, la recherche inverse se trouve spécialement simplifiée envers les forces centrales, seul cas vraiment important.

On doit ensuite étendre cette théorie au mouvement sur une courbe donnée, à l'aide de sa résistance perpendiculaire; deux des coordonnées étant alors rapportées à la troisième, la question se ramène à l'intégration d'une seule équation, trop compliquée, d'ordinaire, pour permettre la solution. Bien appréciée, cette étude fit suffisamment surgir, chez l'incomparable géomètre batave, la doctrine propre à la force centrifuge, quoiqu'il n'eut spécialement examiné que le mouvement uniforme et circulaire, afin que l'intensité devint constante. Joint à ses conceptions géométriques, ce préambule dynamique aurait aussitôt généralisé la mesure de l'effort centrifuge par le rapport du carré à la vitesse au rayon de courbure ; mais l'inob

portunité concrète réserva cette conclusion au fondateur de la mécanique céleste. Examinée convenablement, cette loi permettrait d'instituer le mouvement libre d'après le mouvement forcé ; car elle fait directement connaître, suivant le rayon de courbure, la composante de la force accélératrice, dont la composante tangentielle équivaut à la seconde dérivée de l'arc. Toutefois, il faut naturellement préférer la marche inverse, où la force centrifuge est immédiatement rattachée au mouvement libre, en instituant, à l'aide des équations fondamentales, la décomposition générale de la force accélératrice suivant ces deux directions.

Toujours placée après les deux extrêmes, suivant la quinzième loi de la philosophie première, l'appréciation intermédiaire doit rationnellement terminer la seconde leçon dynamique en considérant le mouvement sur une surface donnée. Examinée dans son ensemble, cette question est la plus compliquée de celles qui concernent le mouvement d'un point; car elle cumule les difficultés du trajet libre, puisqu'il y faut trouver la courbe décrite, avec celles du trajet forcé, vu l'influence de la surface proposée. Même envers la pesanteur, le problème devient algébriquement inaccessible, à l'égard d'un point retenu sur une sphère : la solution n'est pleinement possible que dans le cas, purement hypothétique, où l'impulsion initiale ne se complique d'aucune force continue. Pourtant, il faut toujours instituer la doctrine générale en joignant, aux équations fondamentales du mouvement libre, les termes dus à la résistance de la surface, ainsi qu'on l'a d'abord vu pour une courbe. On doit alors noter, comme supplément commun aux trois cas du mouvement d'un point, la combinaison de ces équations qui fait directement trouver la vitesse propre à chaque position du mobile, si la force remplit la condition nécessaire.

Fondée sur l'ensemble des notions précédentes, la théorie

générale du mouvement d'un système invariable, objet de la troisième leçon dynamique, rend normalement sensible la réalité des études qui, ne devant immédiatement concerner qu'un point, peuvent d'abord sembler illusoires ou vagues. Examinée d'après le principe qui ramène le mouvement à l'équilibre, la dynamique doit toujours fournir, envers la translation et la rotation, des équations correspondantes à celles de la statique : communes à toutes les constitutions du mobile, elles suffisent s'il est solide. Relativement à la translation, ces équations font aussitôt reconnaître que le centre de gravité se meut comme si toutes les forces, instantanées ou continues, s'y trouvaient directement appliquées. Mais, d'après la troisième loi du mouvement, ce déplacement est dès lors indépendant des actions mutuelles entre les molécules du corps, et ne peut jamais être réellement affecté que par des influences purement extérieures. Elles meuvent le corps comme elles auraient agi sur un seul point, dont l'étude générale, jusque-là préliminaire, devient ainsi définitive ; ce qui doit pleinement justifier les sollicitudes qu'elle inspirait avant que sa destination fût assez appréciable.

Relativement à la rotation, les équations générales du mouvement d'un solide libre font aussi surgir une importante propriété du centre de gravité, quand on y décompose les coordonnées de chaque point en deux parties, l'une propre au centre, l'autre particulière à la molécule. Il devient aussitôt évident que le premier segment peut entièrement disparaître ; en sorte que les équations sont les mêmes que si les axes eussent d'abord été directement placés au centre de masse. Alors on voit que la rotation d'un corps autour de son centre de gravité reste toujours indépendante de la translation de ce point ; de manière à n'être jamais affectée par des forces, telles que la pesanteur, dont la résultante y passerait. Nous pouvons ainsi

systématiser la décomposition générale du mouvement en translation et rotation; car elles deviennent pleinement séparables envers le centre de gravité. Tant que le point auquel on les rapporte demeure quelconque, leur distinction ne peut réellement fournir qu'une image géométrique, sans faciliter l'étude dynamique, parce qu'elles y restent naturellement dépendantes l'une de l'autre.

Une telle décomposition réduit la théorie du mouvement d'un système invariable à la seule appréciation de sa rotation, puisque sa translation se trouve d'avance examinée d'après la doctrine qui concerne un point. Sous l'aspect purement logique, le problème de la rotation serait spontanément formulé dans les trois équations, ci-dessus établies, envers les coordonnées de chaque point du corps par rapport au centre de masse. Une telle institution deviendrait scientifiquement illusoire d'après la complication naturelle de ces équations, même pour les cas les plus favorables. A la place des coordonnées propres à chacun des points, il y faut convenablement introduire la vitesse angulaire qui leur est commune, en réduisant la diversité de leurs mouvements à des différences purement géométriques. La considération de ce lien, et de l'axe mobile auquel il se rapporte, constitue le principal caractère de la théorie spéciale de la rotation, appréciée à la fin de ce chapitre.

Grâces à la conception, surgie dans le cinquième chapitre, sur la courbure de torsion, on peut géométriquement perfectionner la notion générale du mouvement d'un solide libre en y simplifiant la combinaison entre la translation et la rotation. Remplaçant trois éléments consécutifs de la trajectoire propre à chaque point par l'arc correspondant de l'hélice osculatrice, on conçoit cette molécule mue en hélice; en sorte que tous les points invariablement liés décrivent des hélices semblables autour d'un même axe. Alors tout mouvement d'un solide libre

devient géométriquement assimilable à celui de l'écrou parcourant la vis sans frottement: l'axe de la rotation est ainsi parallèle à la direction de la translation. Due à l'inventeur des couples, cette image se trouve confusément incorporée à sa tentative, ci-dessous jugée, pour reconstruire la théorie mathématiqne de la rotation. Une inspiration purement géométrique fait directement surgir le seul résultat vraiment durable d'une telle élaboration, en le dégageant des espérances, nécessairement illusoires, sur le perfectionnement d'une doctrine essentiellement épuisée. Examinée philosophiquement, cette conception n'exige pas que l'hélice osculatrice soit effectivement déterminée, puisqu'elle n'est ici destinée qu'à constituer une image générale, où suffit sa seule notion, qui, stérile en géométrie, s'utilise en mécanique. Relativement à la dynamique, un tel mode demande un appendice à la théorie des rotations, pour déterminer, comme je l'indiquerai ci-dessous, le pôle autour duquel le corps tourne perpendiculairement à sa translation.

Aprés avoir assez institué le principal problème de la dynamique, je dois normalement apprécier le complément général qu'il exige, en consacrant la quatrième leçon au mouvement d'un système variable. Nous pouvons immédiatement déduire de la théorie statique, suivant le principe de conversion, le type d'équations que le coordinateur algébrique de la mécanique a justement qualifié de formule générale de la dynamique. Il suffit d'exprimer l'équilibre entre les efforts résultés des réactions mutuelles, ou l'équivalence des forces effectives aux forces primitives. Mais, avant d'appliquer ce type à sa vraie destination, on doit normalement apprécier son aptitude à résumer l'ensemble de la théorie du mouvement curviligne, en y réduisant le mobile à l'état d'un simple point, dont la masse se trouve spontanément éliminée. Alors, en ayant convenablement égard aux relations entre les variations des coordon-

nées, la formule fournit trois équations, deux, ou bien une seule, suivant que le corps est libre, posé sur une surface, ou retenu sur une courbe : les résistances sont toujours déterminées par les multiplicateurs.

Les explications ci-dessus indiquées envers l'équilibre doivent ici dispenser de développer une méthode dont le principal mérite consiste dans son uniformité nécessaire. Il suffit d'y caractériser la complication propre à l'étude du mouvement, où l'on doit, outre les forces primitives essentiellement données, considérer les forces effectives toujours inconnues. Bornées aux systèmes discontinus, les questions statiques ne peuvent jamais exiger que des différentiations ; tandis que, même alors, les problèmes dynamiques sont constamment subordonnées à l'intégration, de manière à devoir rarement obtenir des solutions complètes. Rien ne semble plus simple que le mouvement de deux ou trois projectiles invariablement liés, quand chacun d'eux est traité comme un point : pourtant l'élaboration algébrique y reste essentiellement insuffisante. Examinés envers les systèmes continus, les problèmes dynamiques deviennent tellement insolubles que l'hypothèse d'une chaîne uniformément pesante mue verticalement sur une poulie sans frottement fournit le seul excercice vraiment terminable : les oscillations d'un pendule flexible sont toujours inabordables.

Étudié philosophiquement, le mouvement d'un système variable ne doit normalement intéresser l'éducation encyclopédique que sous l'aspect purement logique ; car son examen scientifique altère le véritable esprit de la mécanique générale, essentiellement bornée aux solides. Guidés par cette considération, nous pouvons directement apprécier la variabilité dans le cas le plus décisif, en consacrant la seconde moitié de la quatrième leçon dynamique à la constitution fluide, éminemment propre à caractériser la nature, la complication, et l'in-

suffisance d'une telle étude. Alors il faut d'abord établir les équations générales de l'équilibre correspondant, auquel le principe de conversion doit ensuite rattacher le mouvement : les fluides sont mathématiquement définis par l'inadhérence de leurs molécules ; ce qui d'ailleurs suffit pour infirmer l'usage scientifique de cette théorie. Le principal constructeur de la mécanique céleste s'y trouva naturellement conduit à fonder les équations générales de l'hydrostatique d'après la meilleure loi spéciale. Elles doivent finalement résulter du principe des vitesses virtuelles, auquel le coordinateur algébrique de la mécanique abstraite les a directement rattachées.

Guidé par l'une ou l'autre méthode, on voit, en chaque point du fluide, les dérivées de la pression envers les coordonnées équivaloir au produit de la densité par les comqosantes respectives de la force continue. Alors la pression devient l'intégrale de la somme des trois produits, et les conditions de l'équilibre se trouvent algébriquement ramenées à celle de l'intégrabilité d'une différentielle totale à trois variables. Généralisée autant que possible, la question propre à la surface libre est aussitôt formulée en annulant cette différentielle ; ce qui fait toujours coïncider la normale avec la résultante des forces appliquées à chaque molécule. Examinées envers le cas, seul spécialement convenable, où cette différentielle est intégrable indépendamment de la densité, les conditions de l'équilibre consistent en ce que la pression et la densité soient constantes dans tous les points de chaque couche de niveau, définie comme la surface extérieure. Sous cet aspect, les deux modes propres à la constitution fluide se distinguent en ce que, pour les liquides, mathématiquement incompressibles, la densité peut arbitrairement varier d'une couche à l'autre ; tandis que les gaz y supposent une loi qui la rende proportionnelle à la pression.

Relativement au mouvement, le grand géomètre dont le nom

se lie au principe de conversion en fit l'application la plus décisive, sous l'aspect logique, en déduisant les équations générales de l'hydrodynamique de celles de l'hydrostatique. Il faut alors diminuer, dans celles-ci, chaque composante de la force primitive d'une composante analogue de la force effective; ce qui fournit trois équations entre les cinq inconnues rapportées aux coordonnées ainsi qu'au temps : les trois vitesses, la pression, et la densité. Convenablement appréciée, la principale difficulté logique d'une telle formulation consiste à bien distinguer les deux sortes de variations simultanément propres à ces trois composantes de la vitesse, dont chacune varie à la fois d'après le temps et la place. On fait ensuite surgir une quatrième équation générale en formulant la continuité permanente de la masse fluide pendant le mouvement : ce qui complète l'institution envers les gaz, où la pression est directement liée à la densité. Si la masse est liquide, cette équation se trouve spontanément décomposée en deux, dont l'une exprime l'incompressiblité, tandis que l'autre devient seulement relative aux trois vitesses, en annulant la somme de leurs dérivées envers les coordonnées correspondantes.

A l'aspect de ces équations, toujours subordonnées à l'intégration des corrélations partielles, on sent que leur efficacité scientifique restera constamment illusoire, même dans les cas les plus favorables, sans qu'un tel jugement doive jamais altérer leur appréciation logique. Mais, en les contemplant du vrai point de vue philosophique, on est involontairement conduit à remarquer que leur fondateur fut le principal adjoint de l'éminent penseur qui dirigea la tentative encyclopédique du dix-huitième siècle. Alors on reconnaît que cette fondation se trouva spontanément inspirée, comme l'élaboration connexe du principe de conversion, par la tendance, spécialement conforme aux impulsions contemporaines, à dégager la positivité ration-

nelle de ses dernières sollicitudes mathématiques. Radicalement préoccupé du domaine moral, ce théoricien sut toujours renfermer l'esprit mathématique dans ses limites normales, surtout en repoussant le prétendu calcul des chances; quoique l'insuffisance de son caractère l'ait quelquefois soumis aux préjugés académiques sur l'ontologie algébrique. Examinée dans son meilleur prolongement, cette disposition philosophique devient spécialement appréciable chez le coordinateur algébrique de la mécanique générale : l'ensemble de ses travaux compléta l'impulsion due à la systématisation de la géométrie pour faire théoriquement prévaloir l'ordre humain.

Normalement consacrée à l'appréciation des propriétés générales du mouvement, la cinquième leçon dynamique doit d'abord considérer les plus étendues, qui correspondent aux deux genres d'équations nécessairement communs à tous les systèmes, en tant que propres à la constitution invariable. A l'aspect du groupe de translation, on voit directement surgir le théorème relatif au centre de masse, en procédant comme envers un solide libre, sauf que les conclusions deviennent plus larges. Son mouvement est toujours le même que si toutes les forces extérieures s'y trouvaient immédiatement appliquées, ainsi que les impulsions : en sorte que, lorsqu'on ne considère que des actions mutuelles, suivant le cas planétaire, elle ne peuvent jamais l'affecter. Cette conclusion s'étend aux changements brusques, quelle que soit leur source : le centre de gravité reste constamment immobile, ou se meut uniformément en ligne droite, selon l'absence ou l'existence d'impulsion extérieure. Il faut spécialement remarquer l'extension nécessaire de ce théorème aux appareils animaux, où son application générale peut seule surmonter les préjugés longtemps suscités par un spiritualisme rétrograde vainement dirigé contre un matérialisme anarchique. Tout organisme animé, comme toute ma-

chine inorganique, est directement incapable de déplacer son centre de gravité d'après des efforts purement intérieurs : quelque intenses qu'ils devinssent, ils se borneraient à changer la figure du système, si le dehors n'intervenait passivement. Alors on conçoit comment les résistances extérieures transforment en locomotion, chez les animaux inférieurs, des mouvements qui, dans des êtres plus élevés, restent seulement partiels.

D'après les équations générales de la rotation, surtout rapportée au centre de masse, un système quelconque comporte une propriété que l'auteur de la première loi du mouvement fit d'abord surgir envers un point animé d'une force centrale. On voit, dans ce cas, le rayon de la molécule tracer, autour du foyer, des aires toujours proportionnelles aux temps, quelles que soient la loi de la force et la nature de la trajectoire. Tel est aussi le sens du théorème des aires ou des moments envers tout système pareillement sollicité par une force centrale, outre que le résultat devient alors indépendant des actions purement mutuelles, tant brusques que graduelles. Examiné dans les cas dépourvus d'influence extérieure, ce théorème y suscite l'invariabilité de la somme algébrique des aires simultanément projetées sur un plan quelconque en un temps donné, malgré le changement que chacune doit continuellement subir d'après les réactions intérieures. Si l'on évalue cette somme à l'égard de trois plans rectangulaires, on en peut toujours déduire un plan qui reste nécessairement invariable au milieu des pertubations quelconques du système total ; il correspond au maximum des aires : sa théorie fut judicieusement perfectionnée par l'invention des couples.

Examiné comparativement, le théorème des forces vives constitue la moins étendue, mais la plus usuelle, des trois propriétés générales du mouvement. D'abord émané de l'incompa-

rable géomètre batave, dont le génie mathématique fut autant inductif que déductif, il dut sa systématisation normale au coordinateur algébrique de la mécanique. Une constitution indépendante du temps suffit pour le déduire de la formule générale de la dynamique, en y substituant les différentielles aux variations, ce qui permet de ramener l'équation au premier ordre, afin de déterminer la somme des produits des masses par les carrés des vitesses. Cette somme peut directement résulter des forces sans connaître les trajectoires, sous la condition d'intégrabilité du trinome formé des composantes combinées avec les différentielles des coordonnées correspondantes. Elle est d'abord réalisée envers les forces dirigées vers des centres fixes, puis à l'égard des actions mutuelles, si les unes et les autres sont seulement subordonnées aux distances : la relation devient illusoire si les forces dépendent de la direction ou de la vitesse des mobiles, comme pour toutes les résistances.

Sous l'aspect théorique, la loi des forces vives doit normalement recevoir un appendice essentiel afin de caractériser les situations d'équilibre des systèmes auxquels elle convient. Alors la somme des forces vives atteint l'état maximum ou minimum, parce que sa différentielle devient nulle en vertu de l'équation générale de la statique. Généralement soumise à la distinction entre ces deux extrêmes, une telle relation suffit pour systématiser les notions spontanées sur les deux modes également propres à l'équilibre, instable ou stable, selon que la force vive totale est maximum ou minimum. Examinée dans le second cas, par le principal élaborateur de la théorie mathématique des marées, cette conséquence lui fournit une remarque capitale envers la coexistence nécessaire des oscillations infinitésimales séparément résultées des diverses perturbations de la stabilité. Sous le point de vue algébrique, cette coexistence correspond au théorème sur l'addition des intégrales partielles quand toutes

les dérivées n'entrent qu'au premier degré; ce qui doit toujours arriver aux équations propres à de telles oscillations.

Historiquement considérée, la théorie des rotations, objet des deux dernières leçons dynamiques, est essentiellement due au plus fécond des grands géomètres: l'ensemble de ce travail constitue son meilleur titre, surtout d'après une admirable harmonie entre l'abstrait et le concret. Après lui, le coordinateur algébrique de la mécanique dut normalement refondre cette doctrine en la rattachant à son élaboration synthétique, mais sans y joindre d'autre notion vraiment importante que la composition directe des rotations élémentaires. Bien instituée, cette étude doit d'abord concerner la rotation autour d'un axe fixe, objet de la sixième leçon dynamique: outre son propre prix, ce cas est surtout nécessaire comme préambule envers la rotation autour d'un point, à laquelle il prépare des secours essentiels. Il faut dogmatiquement conserver la subordination historique de ces notions à la rotation uniforme qui résulte d'une simple impulsion: quoique ce problème soit purement préliminaire, elles y doivent mieux ressortir, en tant que relatives au corps indépendamment des forces. Telle est la source du moment d'inertie, dénominateur nécessaire de la formule propre à la vitesse angulaire, dont le numérateur naturel consiste dans le moment de l'impulsion par rapport à l'axe de rotation. Étendue à l'ensemble du corps, cette intégrale, où chaque molécule multiplie le carré de sa distance à l'axe, remplit, envers la rotation, un office équivalent à celui que la translation retire de l'intégrale qui détermine la masse, mais sans comporter, comme celle-ci, des mesures empiriques. Relativement à l'axe, elle suscite des théorèmes généraux sur les relations entre les moments d'inertie d'un même corps quelconque envers différents axes, d'abord parallèles, puis divergents.

Élaborée dans le premier cas, cette comparaison montre que

le centre de gravité comporte les plus petits moments d'inertie : à mesure que l'axe s'en éloigne, le moment augmente du produit de la masse totale par le carré de la distance. La comparaison accomplie autour d'un même point quelconque suscite l'importante notion du système d'axes justement qualifiés de principaux, envers lesquels il suffit de connaître les moments d'inertie pour en conclure celui qui concerne toute autre direction rapportée à ces trois droites rectangulaires. Examinée directement, la définition des axes principaux est purement algébrique, d'après leur propriété d'annuler les trois intégrales qui résultent, dans l'ensemble du corps, du produit de chaque molécule par deux des coordonnées relatives à ces lignes. Vue géométriquement, cette définition conduit à reconnaître que ces axes comportent le maximum et le minimum du moment d'inertie ; ce qui fournit un second moyen de les trouver. Elle fait aussi surgir leur propriété dynamique, en manifestant la permanence spontanée des rotations commencées autour de chacun d'eux, d'après l'équilibre naturel des forces centrifuges qu'elles suscitent : le centre de gravité rend cette aptitude indépendante de toute fixité.

L'ensemble de ces propriétés simplifie autant que possible la mesure des moments d'inertie, qui doit algébriquement constituer une recherche de même espèce, mais plus compliquée, que celle des cubatures, envers les corps homogènes, seul cas vraiment accessible, quoique souvent insuffisant. Il faut normalement compléter cette étude par quelques exemples tellement choisis que les jeunes disciples de l'Humanité puissent spontanément accomplir les déterminations correspondantes. Nous devons ensuite terminer la sixième leçon dynamique en formulant la rotation autour d'un axe dans le cas général, où le corps est continuellement animé d'une force accélératrice, avec ou sans impulsion initiale. D'après la méthode infinitésimale, la for-

mule du mouvement uniforme peut directement fournir celle du mouvement varié, pourvu que le rappport de la somme des moments des forces au moment d'inertie du corps soit alors regardé comme exprimant la dérivée de la vitesse angulaire envers le temps. Afin que cette théorie soit assez caractérisée, il faut dogmatiquement l'appliquer au pendule composé, qui suscita son essor historique, mais en s'y bornant à la réduction au pendule simple, et réservant à la Physique l'appréciation concrète de la solution abstraite.

On doit normalement cousacrer la septième et dernière leçon dynamique à la rotation autour d'un point, qui constitue le problème le plus difficile de la mécanique vraiment générale. Pour en caractériser l'ensemble, il faut d'abord établir la notion fondamentale qui concerne l'axe, continuellement variable, autour duquel la rotation doit, à chaque instant, s'accomplir comme s'il était immobile. Il suffit de concevoir les points du corps simultanément rapportés, envers la même origine, à deux systèmes d'axes rectangulaires, dont l'un adhère au mobile, de manière à déterminer chaque molécule par des coordonnées immuables, tandis que l'autre reste fixe. Nous sommes naturellement conduits, d'après les notions précédentes, à faire habituellement coïncider le premier système avec celui des axes principaux qui correspondent au pôle considéré, surtout quand il réside au centre de gravité, comme dans le seul cas vraiment important. Il faut alors différentier les formules qui rapportent les secondes coordonnées aux premières, pour reconnaître que, à chaque instant, une suite de points en ligne droite reste spontanément fixe, de manière à constituer l'axe mobile de la rotation effective. On doit philosophiquement regarder cette notion comme une conséquence dynamique de la nature algébrique des formules de transposition, qui sont nécessairement du premier degré relativement aux diverses coordonnées : c'est ainsi

que le calcul lie la géométrie à la mécanique. Nous pouvons dès lors réduire la théorie mécanique de la rotation à déterminer la direction variable de l'axe naturel et la vitesse angulaire qui lui correspond, à l'aide des trois équations immédiatement émanées du principe dynamique : les diversités des points deviennent purement géométriques.

Il faut finalement lier la notion de l'axe à la conception due au plus philosophe des grands géomètres envers la composition des rotations infinitésimales, assujettie aux mêmes lois que celle des translations convergentes. Différentiant l'expression polaire des coordonnées rectilignes d'un point quelconque sucessivement projeté sur chacun des trois plans fixes, il suffit d'ajouter les variations analogues pour formuler le déplacement simultané du système autour des trois axes. Étudiée ainsi, la rotation résultante se présente comme accomplie envers une droite dont la direction est spontanément déterminée par l'annulation des trois différentielles totales. Alors on voit directement surgir les lois qui concernent la composition et la décomposition des rotations infinitésimales ; en même temps, la notion de l'axe instantané se trouve dogmatiquement reconstruite, mais d'après un mode qui ne pouvait historiquement l'inspirer. La tentative ultérieurement développée pour rattacher cette double doctrine aux couples de rotation était complétement superflue, et n'a nullement perfectionné ces notions.

Simplifiée autant que possible, par le plus fécond des grands géomètres, la formulation de la rotation doit finalement résulter de la combinaison de deux groupes d'inconnues, les unes dynamiques, les autres géométriques, dont l'ensemble exige six équations, mais toutes du premier ordre. Alors le problème consiste à déterminer les trois composantes de la vitesse angulaire envers les trois axes principaux, et les trois angles qui caractérisent la situation variable de ceux-ci relativement au

système fixe. Bien que les six équations ainsi construites ne puissent jamais permettre la solution algébrique, elles sont normalement préférables aux trois du second ordre que la question devait directement fournir: les deux modes feraient finalement surgir une équation du sixième ordre. Examiné logiquement, l'ensemble de cette théorie doit toujours inspirer un profond attrait aux esprits vraiment philosophiques, comme fournissant le meilleur exemple de la subordination mathématique de l'abstrait au concret. Regardée scientifiquement, l'élaboration avorte, même dans le cas d'une simple impulsion, à moins que la forme du corps ne soit extrêmement: simple mais cet échec, normalement prévu, ne fait que confirmer la renonciation nécessaire aux solutions spéciales en mécanique rationnelle.

Élaborée par le dernier représentant de l'évolution mathématique, la théorie de la rotation produisit une conception mal instituée, que mon traité fondamental approuva, faute d'un examen assez profond d'un travail aspirant à remplacer la meilleure application de l'algèbre à la mécaniqne. Tandis que les couples statiques avaient utilement lié la rotation à la translation, leur imitation dynamique fut irrationnellement dirigée vers la subordination inverse, de manière à reproduire les mêmes théorèmes, mais sans résultats importants, et sous la confusion due aux restrictions infinitésimales. Explorée ainsi, la rotation suscite des énigmes géométriques essentiellement équivalentes aux énigmes algébriques, mais sans comporter la marche directe et rationnelle des constructions vraiment originales: la doctrine n'y gagne rien, et la méthode y perd beaucoup. Relativement au seul résultat que puisse normalement laisser un tel effort, je l'en ai ci-dessus dégagé, sous l'impulsion géométrique, par l'assimilation immédiate du mouvement total d'un solide libre à celui de l'écrou sur la vis, d'après l'hélice osculatrice. Nous devons seulement compléter, à cet égard, la

théorie algébrique de la rotation, en formulant la déter mination du pôle autour duquel l'axe devient parallèle à la translation. Examinée dans ses résultats extrêmes, la solution eulérienne ferait nécessairement connaître l'influence de la position du pôle sur la direction de l'axe; de manière à permettre de trouver réciproquement, le pôle capable de procurer à l'axe les deux coeficients alors donnés. Le septième et dernier degré logique est ainsi terminé par une question spécialement apte à représenter l'élaboration méditative comme devant normalement aboutir à la construction d'une image, qui, spontanée dans l'ordre concret, devient toujours systématique pour la raison abstraite.

CONCLUSION.

L'ensemble de ce volume a successivement institué chacun des sept degrés normalement propres à la première phase de l'éducation encyclopédique. On peut ainsi juger, sous tous les aspects essentiels, le caractère final de la science fondamentale, et déterminer les principaux résultats de sa régénération synthétique. Il faut d'abord résumer chacun des sept degrés mathématiques, pour faire mieux apprécier la progression générale qui constitue la Logique. Résumé.

Examinée dans son ensemble, l'étude systématique de l'existence universelle doit successivement embrasser un préambule fondamental uniquement relatif au calcul, un domaine principal qui concerne la géométrie, un complément nécessaire envers la mécanique. Mais le préambule est nécessairement composé de deux parties : l'une arithmétique, qui le caractérise directement, l'autre algébrique, par laquelle il se lie aux deux éléments concrets. Une division principale décompose le domaine central en géométrie élémentaire et géométrie transcendante, respectivement connexes avec l'algèbre directe et l'algèbre indirecte. La première est normalement subdivisée en

géométrie spéciale ou préliminaire et géométrie générale; la seconde en géométrie différentielle et géométrie intégrale. On voit ainsi surgir les sept degrés nécessairement propres à l'évolution mathématique, depuis l'arithmétique jusqu'à la mécanique, pour apprécier l'existence universelle, successivement caractérisée par le nombre, l'étendue, et le mouvement.

Il faut toujours regarder les conceptions numériques comme constituant le point de vue le plus général de la positivité rationnelle, puisqu'elles concernent autant les phénomènes que les êtres quelconques. Rappportées à la destination finale de toutes les théories réelles, elles y comportent une efficacité directe, en vertu de leur aptitude spontanée à perfectionner la discipline humaine. Elles doivent donc développer leur principale influence dans l'état normal, qui règle les diverses forces graduellement surgies pendant l'évolution préliminaire.

Bien appréciées, les notions numériques sont autant destinées, par leur nature, à classer qu'à mesurer, et même leur office envers la mesure dérive de leur aptitude au classement. On voit l'arithmétique pure successivement offrir trois parties: la théorie subjective des nombres, qui la lie, d'une part, à la philosophie première, de l'autre à la morale; la numération, où réside son caractère essentiel; et l'évaluation, d'où résulte sa liaison à la Physique. Nous devons toujours regarder la seconde partie comme émanée de la précédente et présidant à la suivante, qui constitue le calcul proprement dit. Il faut normalement reconnaître que la numération contient à la fois le germe de tous les éléments algébriques et la base de toutes les opérations arithmétiques. Toujours subordonnées aux formules numérales, celles-ci consistent à faire ainsi rentrer les cas les plus compliqués de chaque évaluation dans les plus simples, immédiatement soumis au mode spontané qui serait impraticable envers des nombres quelconques. Après avoir successivement in-

stitué, de cette manière, les trois parties du calcul fétichique, on systématise la division, où commence le calcul théocratique. Sa théorie constitue la transition nécessaire entre l'étude des nombres entiers et celle des nombres fractionnaires, sans lesquels le préambule abstrait de la Logique resterait toujours isolé de son domaine concret.

Normalement destinée à porter, dans les conceptions numériques, une continuité qui leur est naturellement étrangère, la considération des fractions fournit un élément indispensable de la constitution mathématique. Une telle aptitude motive les trois leçons que l'éducation encyclopédique y consacre à la suite des deux qui concernent le calcul, d'abord fétichique, puis théocratique, des nombres entiers. Elles font successivement apprécier les transformations propres à l'état fractionnaire, l'évaluation générale des combinaisons correspondantes, et les simplifications spéciales qui concernent les fractions septimales, Vu philosophiquement, le double domaine de l'arithmétique isolée peut déjà fournir de précieux modèles de logique abstraite, où les signes ne suscitent aucune préoccupation vicieuse. A son étude systématique se rattache la manifestation initiale de plusieurs notions ultérieurement destinées à s'incorporer à l'ensemble des conceptions mathématiques, surtout quant à l'idée de limite, ainsi rendue autant abstraite que concrète.

Une suffisante institution du calcul arithmétique pleinement dégagé des doctrines algébriques doit normalement embrasser l'extraction des racines carrées. Nous avons ensuite ébauché le domaine des progressions en y traitant le cas le plus simple et le plus usuel, qui peut philosophiquement indiquer la nature et l'extension d'un tel champ. Il nous a directement conduits à considérer le complément spontané qui s'y rattache envers les différents nombres figurés, auxquels les puissances sont indirectement liées.

Sans sortir du domaine purement arithmétique, les jeunes disciples de l'Humanité peuvent déjà sentir l'insuffisance de nos moyens théoriques et le besoin d'en régler l'usage conformément à la destination générale de nos forces quelconques. Après avoir spécialement évalué les sommes composées de parties égales, on ne sait aucunement simplifier l'évaluation d'un produit formé de facteurs égaux; en sorte que l'un des principaux éléments algégriques manque de l'opération arithmétique qui lui correspond. Bien que la progression où chaque terme est la somme des deux précédents semble constituée plus simplement qu'aucune autre, sa théorie reste complètement inaccessible. Immédiatement propre à développer l'humilité, l'étude philosophique de l'arithmétique peut aussi commencer à systématiser la soumission, en faisant déjà sentir l'ordre universel. On l'y trouve à la fois ébauché dans ses deux sortes de lois, objectives et subjectives, dont toute évaluation fait spontanément ressortir l'harmonie.

Mais la principale réaction encyclopédique de l'arithmétique consiste à fournir la source nécessaire de l'algèbre, par laquelle le calcul se lie d'abord à la géométrie, puis à la mécanique, et dès lors à l'ensemble de la philosophie naturelle. A mesure que les questions de nombres se compliquent, l'évaluation finale y cesse d'absorber l'attention, qui se concentre de plus en plus sur l'élaboration préliminaire des relations. Graduellement devenue prépondérante, cette étude institue un calcul dont la destination propre reste purement logique : il ne contient de notions vraiment scientifiques qu'en vertu des transformations numériques qui s'y trouvent incidemment traitées. Nous devons aussi reconnaître à l'algèbre une souche géométrique, autant nécessaire à la continuité des grandeurs indéterminées que sa souche arithmétique l'est à leur abstraction. On voit ainsi naître la tendance métaphysique de l'algèbre à devenir vicieusement

indépendante des deux études qu'elle doit lier, et d'où sont également résultés ses fondements et ses services.

Appréciée philosophiquement, la notion abstraite d'*équation* coïncide avec l'idée concrète de *loi*, qui ne peut jamais devenir assez précise qu'en prenant un caractère hypothétiquement numérique. Généralement impossible à réaliser au delà du domaine purement mathématique, ce principe suscita les prétentions de l'algèbre à la présidence encyclopédique, et par suite le matérialisme théorique, jusqu'à l'avénement de la religion universelle. Elle seule put irrévocablement surmonter les sophismes et les usurpations algébriques, en faisant normalement apprécier les conditions qui concernent l'institution et l'élaboration des équations. Ramenée à sa destination géométrique et mécanique, l'algèbre y devient pleinement nécessaire, en y fournissant des moyens généraux pour perfectionner la déduction, et même l'induction, de manière à permettre des constructions autrement impossibles. Elle y développe la subordination de l'abstrait au concret en réduisant toutes les lois mathématiques aux relations que comportent les cinq couples d'éléments également émanés de ses deux sources spontanées.

Historiquement considérés, ils forment deux groupes : l'un, pleinement naturel, et connu de tout temps, se compose des trois premiers ; l'autre, essentiellement artificiel, et propre à l'évolution moderne, comprend les deux derniers. Émané de l'arithmétique, où la numération contient tous ses germes, le groupe fondamental est pareillement dérivé de la géométrie, d'après les spéculations initiales sur la mesure de l'étendue. Relativement au groupe complémentaire, il faut aussi reconnaître l'origine numérique du premier couple et la source concrète du second, outre leur commune liaison algébrique avec les autres formations. On est ainsi conduit à juger la pleine légitimité mathématique du couple artificiel, et même celle du couple excep-

tionnel, qui ne saurait en être finalement séparé. Son examen fait dogmatiquement apprécier les conditions propres aux éléments algébriques, dont l'extension reste irrévocablement impossible, malgré les espérances et les tentatives empiriquement résultées de l'anarchie académique.

On peut rarement formuler les lois géométriques, et surtout mécaniques, avec ces dix types élémentaires de relations précises, tant qu'on persiste à faire directement intervenir les grandeurs naturellement considérées. Ramener partout les cas les plus compliqués aux plus simples, en remplaçant ces grandeurs par leurs rudiments infinitésimaux, tel est l'unique mode qui puisse ordinairement surmonter les difficultés propres à la subordination mathématique de l'abstrait au concret. Dès lors l'algèbre se trouve normalement décomposée en deux domaines, l'un direct, l'autre indirect, dont le second doit finalement prévaloir, quoique toujours fondé sur le premier, seul susceptible d'être d'abord séparé de la géométrie, en formant le deuxième degré logique. Examinée dans son ensemble, cette partie de l'algèbre, qui précède et prépare la géométrie, se borne à la résolution normale des équations, en y traitant successivement le petit nombre de cas où les inconnues sont convenablement rapportées aux données. Nous ne pouvons regarder une telle élaboration comme pleinement satisfaisante qu'envers le premier degré, pour lequel même la pluralité des inconnues exige des formules habituellement impraticables. A ce type initial de la résolution algébrique, se lie l'étude des transformations qu'il suscite à l'égard des trois premiers couples d'éléments mathématiques, et surtout quant aux puissances. Rattachée à cette base, la résolution en nombres entiers des équations indéterminées y constitue un complément où l'arithmétique est intimement liée à l'algèbre, et qui devient autant inaccessible qu'oiseux au delà du premier degré.



Mais, en se bornant au cas d'une seule inconnue, la résolution algébrique des équations comporte un succès pleinement usuel à l'égard du second degré, suivant deux modes distincts quoique équivalents. On y voit spontanément surgir la notion fondamentale sur la pluralité des racines, et leurs relations générales avec les coefficients, ainsi que le principal type d'anomalie numérique, dont le contraste avec l'état normal suscite l'intermédiaire propre au maximum. Rattachée à cette seconde phase de l'algèbre directe, la dernière accomplit la résolution des équations du troisième degré, qui permet d'instituer celle du quatrième, dont la formule est inextricable. Alors cesse le domaine fondamental de l'algèbre directe, à jamais restreint aux quatre premiers degrés, où la complication croissante des formules fait aisément accepter l'impossibilité des succès ultérieurs, qui seraient nécessairement illusoires. Les autres degrés ne comportent, ordinairement, que des recherches bâtardes dans lesquelles l'arithmétique se mêle à l'algèbre sans s'y confondre, afin de déterminer les valeurs spéciales des racines, quoiqu'on ignore leur subordination générale aux coefficients.

Étendue au couple artificiel, et par suite au couple exceptionnel, la résolution algébrique des équations y doit davantage trouver des difficultés pleinement insurmontables au delà des plus simples cas exponentiels, qui se ramènent aux types antérieurs à l'aide des logarithmes. Telle est la position normale de la partie logarithmique de l'arithmétique, comme l'extraction des racines quelconques accompagne le théorème binomial. Alors on reconnaît que, même à cet égard, la numération contient le germe de toutes les institutions successivement relatives à l'évaluation. Telles sont les notions essentielles qui concernent la résolution normale des équations, à peine ébauchée envers les relations exponentielles, insuffisante dans la plupart des degrés accessibles, et seulement satisfaisante pour

le premier. Son imperfection fait déjà sentir la nécessité du calcul des relations indirectes, qui permet d'utiliser les ressources élémentaires en coordonnaut la géométrie et la mécanique, quoique l'impuissance abstraite y doive spécialement interdire les solutions concrètes.

Traitée à la fin de l'algèbre directe, la théorie des séries y suscite un nouvel ordre de transformations, algébriques et numériques, où l'infinité des parties surmonte l'hétérogénéité des touts, pour rendre les deux derniers couples normalement comparables aux précédents. En s'y bornant aux cas exponentiel et logarithmique, ce complément peut assez caractériser la doctrine correspondante et la méthode qui lui convient. Mais il faut aussi terminer le second degré logique en appliquant le même principe à la sommation des progressions les mieux accessibles et les plus usuelles. Par l'institution des séries, on peut normalement simplifier l'évaluation et perfectionner la comparaison des formations qui permettent des développements convenablement appréciables. Son usage arithmétique, assez indiqué d'après les logarithmes, exige, envers la convergence, des conditions spéciales, que l'empirisme académique fit vicieusement transporter à sa destination algébrique.

Pour que la géométrie devienne systématiquement appréciable, toutes ses parties doivent être, indirectement ou directement, rapportées à la mesure rationnelle de l'étendue. Une telle destination doit normalement décomposer le domaine géométrique en deux ordres d'études : les unes finales, immédiatement relatives aux rectifications, quadratures, et cubatures ; les autres préparatoires, où l'on apprécie les diverses propriétés ou générations de chaque figure. Rapportées au but commun, celle-ci, qui semblent s'en écarter, s'y trouvent doublement liées, d'abord en vertu de leur aptitude théorique à varier les définitions de manière à les mieux adapter aux me-

sures, puis d'après leur efficacité pratique pour faire objectivement reconnaître les types subjectifs. Une seconde condition achève de caractériser la systématisation géométrique, en obligeant les deux ordres de spéculations à concerner toutes les formes exactement conçues. Sous ces divers aspects, la constitution rationnelle de la science de l'étendue repose sur l'institution fondamentale de l'espace, qui seule permet de considérer les figures indépendamment des corps.

Afin que la géométrie soit normalement instituée, il faut que la généralité systématique des méthodes y corresponde à la nature spontanément générale des diverses questions, préparatoires ou finales, toujours communes à tous les types. Mais l'uniformité de solution ne peut pleinement résulter que de la transformation des problèmes géométriques en recherches algébriques, d'après la corrélation entre les figures et les équations. On est ainsi conduit à reconnaître que la géométrie générale, tant élémentaire que transcendante, doit toujours être convenablement précédée d'un développement direct de la géométrie spéciale. Réduite à sa destination normale, la géométrie préliminaire étudie, sous les divers aspects essentiels, les deux lignes immédiatement émanées du spectacle extérieur, et les plus simples surfaces qu'elles engendrent. Elle doit accessoirement ébaucher la théorie de quelques courbes artificielles, afin de mieux caractériser le point de vue objecif, de manière à faire davantage apprécier la constitution subjective.

Une institution pleinement normale du troisième degré logique y place un préambule fondamental, où sont successivement établies les trois théories, de la ligne droite, du plan, et de la mesure des angles, nécessairement communes à toutes les parties de la géométrie. Nous y bornons la première doctrine aux notions qui concernent la solution graphique du problème relatif à la détermination indirecte des longueurs recti-

lignes, mais en poussant cette étude jusqu'aux lois précises d'où doit ensuite émaner la résolution algébrique de la même question. Il faut aussi lier à ce but la théorie du plan, en la faisant normalement aboutir aux conditions de similitude des assemblages polyédriques auxquels la mesure indirecte d'une ligne droite se trouve naturellement subordonnée dans le cas le plus général. Telle est également la destination de la théorie des angles, successivement relative à la comparaison des inclinaisons rectilignes et dièdres, qui concourent à constituer de pareils groupes. Étudié dans cet esprit, le préambule général de la géométrie préliminaire devient directement connexe avec son complément spécial, où le même problème se trouve algébriquement résolu.

La première des quatre leçons caractéristiques qui suivent ce préambule institue la rectification du cercle, en tant qu'elle est normalement accessible, c'est-à-dire envers la longueur totale, uniquement subordonnée au rapport constant de la circonférence au diamètre. Une telle étude fait spontanément surgir le premier type de la méthode infinitésimale, sans laquelle la similitude des polygones n'aurait jamais dévoilé la proportionnalité des contours circulaires aux rayons correspondants. Mais la principale difficulté de cette recherche consiste à déterminer, avec une approximation donnée, la valeur effective du rapport constant, en substituant au cercle une double suite de polygones réguliers, dont les côtés sont algébriquement liés. Il faut normalement regarder une telle élaboration comme la première source de la trigonométrie, puisque la table des cordes s'y trouve naturellement ébauchée. Examinée dans son ensemble, la seconde leçon spéciale de géométrie préliminaire institue la mesure fondamentale des aires planes, d'abord rectilignes, puis circulaires. Relativement à celles-ci, la méthode nfin itésimale y trouve une seconde application spontanée, plus

caractéristique, quoique aussi naturelle, qu'envers la rectification correspondante. Explorée comparativement, les lois de quadrature suscitent d'importantes notions sur la corrélation et la transformation des diverses aires d'après leurs dimensions rectilignes.

Une troisième leçon constitue la cubature des polyèdres, en les ramenant d'abord aux pyramides, et finalement aux prismes, dont le plus régulier fournit l'unité de volume. Nous avons dogmatiquement substitué cet enchaînement unique à la double série qui fit historiquement surgir l'ensemble de cette doctrine. Il faut normalement conserver la trace de l'essor primitif, en caractérisant les deux modes inverses suivant lesquels le prisme et la pyramide deviennent spécialement comparables. On consacre la leçon suivante à la double mesure des trois corps ronds, qui ne présente aucune difficulté pour le cylindre et le cône, quand on y borne la quadrature au cas le plus simple et le plus usuel. Normalement concentrée sur la sphère, cette étude s'y réduit à la mesure de l'aire, où surgit le troisième et le principal type de la méthode infinitésimale dans la géométrie préliminaire, qui peut ainsi caractériser les difficultés propres à cette marche,

Sans dénaturer le troisième degré logique, on y complète l'indication de la culture objective en consacrant les cinquième et sixième leçons spéciales à l'ébauche des théories qui concernent les propriétés, et même la mesure, des sept principales courbes. Alors la géométrie préliminaire est assez développée pour motiver et préparer l'avénement de la géométrie générale, sauf le complément nécessaire où la trigonométrie achève de résoudre le problème fondamental sur la ligne droite. Bien instituées, les trois leçons trigonométriques font respectivement apprécier les relations mutuelles des diverses longueurs auxiliaires, leur détermination d'après les angles

qu'elles remplacent, et la résolution des triangles. Examinée dans son ensemble, la première théorie est finalement réductible à la liaison trigonométrique entre un arc et ses deux parties quelconques, naturellement résultée de la loi du quadrilatère inscriptible au cercle. Rattachée à cette relation, la construction des tables trigonométriques reçoit, dans la leçon suivante, une institution purement arithmétique, aussitôt suivie de la solution pleinement normale, d'après les séries algébriques qui lient un arc circulaire à ses principaux paramètres.

Sous cette double préparation, la dernière leçon directement relative au complément trigonométrique de la géométrie préliminaire établit les équations qu'exige la résolution des triangles rectilignes, et caractérise leur application aux divers cas généraux. A la même leçon appartient l'institution de la trigonométrie sphérique, qui doit normalement devenir un appendice essentiel de cette doctrine, où l'artifice de polarité simplifie une telle expansion. Nous avons ensuite consacré la leçon finale du troisième degré logique à la réaction naturelle de la trigonométrie sur l'algèbre, qui, de cette assistance envers la géométrie préliminaire, tire un triple perfectionnement spécial. Tel est d'abord le complément ainsi survenu pour la résolution des équations cubiques, où le cas principal, arithmétiquement soustrait à la formule générale, resterait inappréciable sans l'intervention trigonométrique, également appliquée aux équations binomes. On doit surtout rapporter à cette réaction la relation fondamentale entre les deux derniers couples d'éléments algébriques, d'après le rapprochement spontané des séries qui les font pareillement dépendre des couples antérieurs.

Réduit à son domaine propre, le quatrième degré logique diffère géométriquement du troisième, auquel il resemble algébriquement. Examiné comparativement au cinquième, il

présente un caractère inverse, en faisant naturellement contraster la conformité des spéculations géométriques et la diversité des modes algébriques. A ce double titre, le degré moyen institue, dans le développement total de la première phase encyclopédique, une transition normale entre les trois degrés préliminaires et les trois degrés définitifs. La spéculation concrète y devient générale comme dans ceux-ci, tandis que l'élaboration abstraite y reste, autant que pour ceux-là, bornée au calcul des relations directes, quoiqu'il y remplisse un office plus éminent, qui bientôt suscite l'algèbre indirecte. Il faut ainsi reconnaître que l'institution fondamentale de la subjectivité géométrique appartient à la géométrie algébrique proprement dite, quoique sa constitution et son développement doivent normalement dépendre de la géométrie infinitésimale.

Examinée philosophiquement, la systématisation de la géométrie consiste à coordonner subjectivement une étude d'abord conçue objectivement ; ce qui fournit le premier type et degré de la synthèse subjective, seule susceptible d'universalité. Toutes les doctrines et méthodes propres à constituer la généralité géométrique reposent sur la subordination de l'abstrait au concret, d'après la corrélation fondamentale entre les figures et les équations. Afin de permettre la transformation des questions géométriques en recherches algébriques, il faut que les notions de forme soient préalablement réduites aux considérations de grandeur, par l'entremise des idées de position. De là résulte l'institution préliminaire des systèmes de coordonnées. sur laquelle le fondateur de la philosophie mathématique fit nécessairement reposer l'ensemble de la géométrie générale. Il suffit de considérer la détermination précise d'un point invisible pour reconnaître que sa position dépend d'une, deux, ou trois grandeurs géométriques, suivant qu'il est placé sur une ligne, sur une surface, ou dans l'espace indéfini.

La difficulté préliminaire étant ainsi surmontée, la conception cartésienne fait aussitôt surgir la corrélation fondamentale, en considérant la liaison nécessaire des coordonnées quelconques d'un point dont le siège devient spécial. Elles sont toutes déterminées d'après une seule ou deux, selon que ce siège est linéaire ou superficiel ; en sorte que chaque courbe plane ou surface quelconque suscite une équation propre à la caractériser. Géométriquement subordonnées aux surfaces dont l'intersection les produit, les lignes non planes sont algébriquement dépourvues d'institution directe : leur formation ne peut jamais résulter que d'un des couples qui correspondent à chacune d'elles. Examinée dans son ensemble, la conception cartésienne est autant applicable aux équations qu'aux figures, en regardant celles-ci comme les peintures de celles-là. Sous cet aspect, la destination logique reste essentiellement bornée à la réaction générale de la géométrie plane sur l'algèbre à deux variables, qui suffit à l'appréciation philosophique des lois quelconques.

Après avoir ainsi fondé la systématisation géométrique, l'algèbre doit naturellement ranimer les vicieuses espérances de domination encyclopédique d'abord émanées de son essor isolé. De là résulte le premier mode ou degré de matérialisme concret, plus dangereux, quoique moins conséquent, que le matérialisme abstrait, parce qu'il lie les prétentions algébriques à l'irrécusable universalité des lois géométriques. Afin de prévenir ou réparer, chez les jeunes disciples de l'Humanité, des aberrations toujours imminentes jusqu'à ce qu'elles soient systématiquement surmontées, le préambule philosophique du quatrième degré logique leur consacre une leçon spéciale. Pour les rectifier, il faut philosophiquement apprécier le sophisme et l'illusion, invincibles métaphysiquement ou théologiquement, qui résultent de la transformation accomplie des notions de forme en considérations de quantité, dès lors jugées applicables

aux qualités quelconques. Trois leçons doivent ensuite composer le préambule scientifique de la géométrie algébrique, en instituant la formulation d'abord de la ligne droite, puis du plan, enfin de la transposition des axes dans les coordonnées usuelles. Elles font déjà sentir la liaison générale de la géométrie cartésienne avec l'induction qui suscite l'interprétation concrète des signes inhérents aux grandeurs abstraites : la connexité dogmatique explique, à cet égard, la coïncidence historique. Rapportée à la destination fondamentale des équations géométriques, la dernière leçon de ce préambule complète l'harmonie élémentaire en faisant toujours discerner les modifications algébriques directement dues à la forme parmi celles qui résultent de la situation.

Toutes les leçons spéciales du quatrième degré logique doivent seulement ébaucher la subordination géométrique de l'abstrait au concret, dont le développement exige l'algèbre transcendante. Elles peuvent néanmoins caractériser la géométrie subjective, en instituant respectivement les trois théories générales qui sont pleinement accessibles au calcul des relations directes. Nous devons surtout apprécier ce caractère dans la première de ces leçons, où les plus simples opérations algébriques, souvent réductibles à de purs dénombrements, peuvent toujours dévoiler le nombre de points déterminant d'une courbe ou surface quelconque. Il faut ensuite développer l'harmonie naissante entre l'abstrait et le concret, en consacrant la seconde leçon à l'étude des diamètres, d'abord curvilignes, puis rectilignes ou plans ; d'où résulte la théorie des centres, mieux traitée isolément. Rattachée à la similitude des polygones et polyèdres, la théorie générale des courbes ou surfaces semblables termine, dans la troisième leçon, l'ébauche décisive de la géométrie subjective, d'après une élaboration algébrique qui semblait exiger le calcul transcendant.

Il faut ensuite consacrer les deux dernières leçons concrètes du quatrième degré logique à l'appréciation fondamentale de la géométrie comparée, où la généralité se combine avec l'objectivité, pour le classement normal des surfaces. Dans la première, on doit philosophiquement apprécier la conception fondamentale des familles géométriques, et faire convenablement sentir l'impossibilité d'instituer entre elles une hiérarchie qui supposerait la coordination des lignes. Explorée par la leçon suivante envers les groupes les plus simples et les plus usuels, cette doctrine caractérise la géométrie objective, sauf le double complément qui dépend de l'algèbre indirecte. Alors les cinq leçons qui restent au quatrième degré logique doivent normalement développer la réaction nécessaire de la géométrie générale sur l'algèbre supérieure, où réside la transition naturelle entre le calcul élémentaire et le calcul transcendant. Rattachées à la résolution numérique des équations quelconques, les doctrines correspondantes forment deux classes, suivant qu'elles concernent la théorie ou l'évaluation, respectivement étudiées dans les trois premières et les deux dernières leçons abstraites de géométrie algébrique.

Fondée sur la décomposition des équations d'un degré quelconque en facteurs du premier degré, propre à l'unité de variable, la leçon initiale institue les relations des coefficients aux racines, les caractères des racines communes, et les réductions que comportent les racines exceptionnelles, surtout égales. Il faut, dans la leçon suivante, apprécier les deux classes de transformations qui conviennent aux équations dont les racines sont uniformément modifiées ou combinées, et l'application générale de cette doctrine à la théorie des formations symétriques. Nous consacrons la troisième leçon à l'examen successif des trois modes qui permettent d'éliminer sans résoudre entre des équations d'un degré quelconque, en indiquant la valeur lo-

gique d'une telle théorie à travers sa complication scientifique. Tout ce qui concerne l'évaluation des racines commensurables, et par suite des racines exactement assignables quoique incommensurables, constitue l'objet de la quatrième leçon abstraite de géométrie algébrique. On consacre la cinquième à l'ensemble des notions qui régissent la détermination approximative des racines incommensurables d'après leur séparation préalable ou graduelle, même envers les équations composées des deux derniers couples d'éléments algébriques.

Sans le complément leibnitzien, la géométrie cartésienne reste radicalement insuffisante, non-seulement pour les questions finales, mais quant aux spéculations préparatoires. On conçoit que les deux principales institutions scientifiques furent nécessairement dues aux deux philosophes modernes, seuls capables d'apprécier et de satisfaire les besoins généraux, à la fois abstraits et concrets, de l'évolution mathématique. La subjectivité géométrique généralisa l'esprit algébrique, qui fit ainsi surgir les notions essentielles sur la théorie des équations. Il fut, en même temps, pourvu d'une destination concrète éminemment propre à diriger et stimuler l'ensemble de son développement abstrait. Deux suites simultanées d'efforts décisifs convergèrent vers le calcul infinitésimal, en ébauchant la géométrie différentielle et la géométrie intégrale, pendant le mémorable demi-siècle qui sépare et réunit les deux législateurs de la science fondamentale.

Alors la logique transcendante dut irrévocablement surgir, dans son domaine initial, puisque la substitution concrète des éléments aux touts s'y trouva complétée par les procédés abstraits sur l'élimination finale des auxiliaires primitifs. Notre première leçon du cinquième degré logique est directement consacrée à l'appréciation philosophique de la conception leibnitzienne, essentiellement fondée sur la loi, nécessairement in-

ductive, qui règle les simplifications toujours propres aux grandeurs infinitésimales. Il faut normalement juger, dans la même leçon, les deux modes accessoires que comporte l'institution générale du calcul des relations indirectes, par la considération des fluxions ou limites et surtout les dérivées. Mais le préambule philosophique de la géométrie transcendante exige une seconde leçon, où l'on apprécie l'harmonie nécessaire entre la géométrie différentielle et la géométrie intégrale, respectivement instituées pour les théories préparatoires et les questions finales. A cette appréciation succède le préambule abstrait de la géométrie différentielle : il consacre trois leçons à l'institution générale des règles de la différentiation, et deux aux applications algébriques du calcul différentiel.

Nous destinons la première leçon abstraite du cinquième degré logique à l'établissement des lois spéciales sur la différentiation immédiate, toujonrs relative aux formules d'une seule variable ; elle doit séparément traiter chacun des dix éléments algébriques, sans considérer leurs combinaisons quelconques. On voit ainsi surgir, entre les différents couples, des liaisons qui consolident et développent l'unité mathématique, en faisant mieux ressortir la subordination des formations artificielles aux formations naturelles. Bien appréciée, la différentiation collective se réduit, dans la leçon suivante, à la loi générale qui ramène la différentielle totale aux différentielles partielles, sauf le complément résulté, pour les ordres supérieurs, de l'inversion facultative des dérivations successives. La troisième leçon rattache la différentiation implicite à la différentiation collective, en suscitant des opérations de plus en plus compliquées à mesure que l'implicité croît. Elle doit ensuite compléter l'ensemble des lois différentielles en réglant les transformations résultées du changement de variable indépendante, géométriquement prescrit par la mutation des coordonnées.

Consacrée aux séries, la quatrième leçon abstraite de géométrie différentielle apprécie le perfectionnement fondamental que la dérivation procure aux développements algébriques. On y voit d'abord surgir, sous deux modes équivalents, la règle générale sur l'expression d'une formation quelconque par une série de puissances, dont les coefficients sont uniformément émanés des dérivées correspondantes. Néanmoins, il faut normalement préférer la marche, moins régulière, mais plus large, selon laquelle la principale application algébrique du calcul différentiel fut finalement instituée par le plus philosophe des grands géomètres, qui l'étendit même à des cas implicites. Toute la leçon suivante est successivement consacrée aux deux autres applications, en généralisant d'abord la détermination de l'état maximum ou minimum, puis l'évaluation des symboles indéterminées. Il y faut, sous chaque aspect, apprécier les ressources propres à l'algèbre directe, afin de mieux juger l'extension résultée de l'algèbre indirecte, en faisant toujours sentir l'insuffisance nécessaire des procédés quelconques envers un perfectionnement absolu. Nous devons ensuite examiner la constitution concrète de la géométrie différentielle, où six leçons concernent la géométrie subjective, et deux la géométrie objective. Une distinction naturelle fait normalement décomposer la principale étude en deux groupes inégaux, respectivement consacrés, d'abord aux courbes planes, puis aux surfaces, et séparés ou réunis par la leçon relative aux courbes à double courbure.

Toujours bornée aux différentielles premières, la leçon initiale institue successivement la théorie générale des tangentes, celle des plans tangents, et celle des asymptotes, en appréciant, sans exagération, les perfectionnements vraiment dus à l'algèbre indirecte. Rattachée aux secondes dérivées, la leçon suivante explique leur application à la courbure des lignes

planes, d'abord mesurée d'après la flexion, et finalement rapportée à l'osculation, d'où résulte la conception des développées, dont la généralisation suscite les courbes enveloppes. A la troisième leçon appartient la théorie générale des contacts curvilignes, qui rend relative une conception jugée longtemps absolue, et ramène aux notions les plus philosophiques l'étude de la courbure plane, alors complétée envers les deux sortes de points exceptionnels. C'est à la quatrième leçon que convient l'institution des modifications propres à la première courbure des lignes quelconques toujours subordonnée à la considération du plan osculateur. Elle doit finalement régler la mesure générale de la courbure de torsion, d'abord suivant un rapport analogue à celui de la flexion, puis à l'aide de la sphère osculatrice, enfin d'après l'hélice osculatrice, qui permet de combiner les deux courbures, du moins idéalement.

Une extension normale de la théorie des contacts conduit la cinquième leçon concrète de géométrie différentielle à juger les difficultés et les moyens propres à la courbure des surfaces quelconques, comparée à celle des lignes planes. Mais la diversité des deux cas s'y fait surtout sentir par la discordance ainsi survenue entre l'accroissement du nombre des paramètres envers les types analogues et la multiplicité plus rapide des conditions d'osculation équivalente. Il faut donc renoncer à tirer de la sphère un office, à l'égard des surfaces, comparable à celui du cercle pour les courbes, qui ne pourrait alors être normalement remplacé que par le cône osculateur, dont l'usage est géométriquement inadmissible. La leçon suivante se trouve ainsi conduite à mesurer, d'une manière indirecte et compliquée, la courbure des surfaces, en appréciant celle des diverses lignes propres à chaque point, sans qu'une telle analyse comporte aucune synthèse. Elle peut seulement résumer les comparaisons relatives aux sections normales, à chacune desquelles

une loi fort simple rapporte toutes les sections obliques dont la tangente coïncide avec la sienne.

Mais la géométrie objective, essentiellement subordonnée aux premières dérivées, est peu troublée par l'imperfection nécessaire de la géométrie subjective envers le second ordre. On consacre la septième leçon concrète du cinquième degré logique au perfectionnement général de l'institution des familles géométriques par la substitution des équations différentielles aux équations finies, où la relation arbitraire se trouve alors éliminée. Rapportés à la propriété du plan tangent qu'ils doivent toujours exprimer, ces nouveaux types collectifs peuvent immédiatement résulter de la définition quelconque du groupe convenablement conçu. Toute la leçon suivante est directement consacrée à compléter la géométrie différentielle en rattachant la classification à la conception générale des surfaces enveloppes, qui condense autant que possible la taxonomie géométrique. Suivant une telle appréciation, le cinquième degré logique se trouve dignement terminé par une doctrine qui, d'abord surgie envers les courbes, prend son principal essor pour les surfaces, de manière à lier les deux domaines de la géométrie différentielle.

Toute la leçon initiale du sixième degré logique tend à compléter l'appréciation philosophique de l'institution infinitésimale en rapportant son meilleur développement à la dernière phase encyclopédique. Il faut seulement destiner la première à l'ébauche, plus spontanée que systématique, d'une méthode qui, propre à simplifier les recherches quelconques, devient plus nécessaire envers les domaines plus compliqués. Son office mathématique offre un contraste décisif entre la généralité des relations et leur réalité: jamais ces deux attributs n'y co-existent; l'un appartient à la différentiation, l'autre exige l'intégration. Sous l'aspect logique, qui doit toujours prévaloir

envers la science fondamentale, la géométrie est essentiellement différentielle, en sorte que l'imperfection nécessaire du calcul intégral devient peu regrettable pour la principale destination de l'étude de l'étendue. Une telle appréciation conduit cette leçon au plan exceptionnel qui convient à la géométrie intégrale, où l'abstrait domine le concret, même quant au domaine subjectif, et surtout dans le complément objectif, afin d'instituer une méthode essentiellement destinée à la mécanique.

Examinée spécialement, le domaine subjectif de la géométrie intégrale comprend dix leçons, qui forment deux groupes égaux, l'un abstrait pour l'intégration explicite, l'autre concret où la mesure rationnelle de l'étendue est directement systématisée. Sous le premier aspect, la leçon initiale institue les notions fondamentales sur l'intégration des formules et les procédés immédiatement résultés des différentiations propres aux divers éléments algébriques. Toute la leçon suivante est consacrée à l'intégration des formations seulement composées des trois couples naturels, qui suscitent la branche la moins imparfaite du calcul intégral, quoique son efficacité soit entravée par sa subordination à l'algèbre directe. A la troisième leçon appartient l'insuffisante ébauche qui concerne l'intégration des formules principalement rapportées aux deux couples artificiels. Restée essentiellement stagnante depuis son début, la majeure partie de l'intégration explicite doit spécialement confirmer, chez les jeunes disciples de l'Humanité, l'appréciation générale du positivisme sur la vraie destination de nos forces théoriques.

Mais cette imperfection n'empêche pas de ramener, dans la quatrième leçon, l'intégration de toutes les formules à plusieurs variables indépendantes au cas fondamental d'une variable unique, seul susceptible d'élaboration immédiate. Une telle étude conduit, pour instituer la réduction, à compléter l'en-

semble des règles de différentiation, en y joignant la loi suivant laquelle on différentie les intégrales envers de nouvelles variables, qui peuvent, outre la dérivée, affecter les limites spéciales. Radicalement imparfaite, l'intégration explicite exige un double supplément, d'abord algébrique, puis arithmétique, traité dans la cinquième et dernière leçon abstraite du domaine subjectif de la géométrie intégrale. Il faut, premièrement, étendre l'emploi des séries au développement d'une formation d'après sa dérivée, soit à l'aide des règles générales, soit surtout en instituant des procédés spéciaux, sans pouvoir ordinairement découvrir la loi des coefficients. Rattachée à l'ensemble des notions antérieures, l'intégration arithmétique, d'abord approximative et générale, puis exacte et particulière, vient ensuite terminer la première moitié du calcul intégral en caractérisant une appréciation logique qui combine tous les aspects abstraits.

Pour instituer la mesure rationnelle de l'étendue il faut premièrement considérer les aires planes, qui, surtout en coordonnées rectilignes, suscitent le plus simple et le plus direct des divers modes équivalents que comporte la systématisation de ces recherches. Une telle élaboration peut mieux réussir que les autres études finales de la géométrie, d'après la composition correspondante de l'équation subjective, dont la complication mesure leurs difficultés respectives. Rapportée à ce critérium l'étude des rectifications, objet de la seconde leçon concrète, suscite des recherches plus compliquées, même envers les courbes planes, où le succès est rarement possible, et surtout à l'égard des courbes quelconques. Il faut ainsi concevoir l'explication dogmatique de la préséance historique que la mesure des aires a toujours obtenue sur celle des lignes. Toute la troisième leçon concerne la quadrature et la cubature des diverses formes exceptionnelles, et surtout des corps ronds, dont la

mesure n'exige qu'une seule intégration. A la leçon suivante appartient l'institution générale des cubatures, où l'équation subjective doit nécessairement monter au second ordre, en suscitant deux intégrations successives, dont l'enchaînement est souvent compliqué par les limites curvilignes de la première. Sous cette impulsion, la cinquième leçon concrète termine l'étude du domaine subjectif de la géométrie intégrale en instituant la quadrature des surfaces quelconques, plus compliquée que toutes les autres mesures rationnelles de l'étendue.

On décompose l'élaboration abstraite du complément objectif en trois leçons sur l'intégration des équations affectées d'une variable unique et deux consacrées à la pluralité des variables libres. Notre leçon initiale concerne le cas le plus simple et le plus usuel de l'intégration implicite, où l'on considère une seule équation du premier ordre, que divers artifices, empiriquement qualifiés de méthodes, s'efforcent de ramener au cas explicite. On consacre la seconde leçon à l'intégration exceptionnelle par laquelle le plus philosophe des grands géomètres compléta l'appréciation générale de l'implicité. Relative aux équations d'un ordre quelconque, la leçon suivante fait normalement sentir l'extension logique d'une telle étude et la profonde insuffisance de nos moyens scientifiques, même assistés des séries. Elle doit finalement caractériser l'équivalence nécessaire entre l'ordre différentiel et le degré d'implicité, d'après le double échange que comportent les équations simultanées et les équations isolées, en prolongeant les dérivations ou prodiguant les inconnues.

Relative au premier ordre, la quatrième leçon abstraite du complément objectif de la géométrie intégrale caractérise le seul cas vraiment accessible de l'intégration implicite à plusieurs variables libres. Alors le succès consiste à faire convenablement rentrer la pluralité dans l'unité, par des transforma-

tions qui ne conviennent qu'aux corrélations partielles du premier degré. C'est à la leçon suivante qu'appartient l'intégration, plus imparfaite encore, des équations d'un ordre quelconque entre les dérivées partielles. Elle doit d'abord établir la loi fondamentale sur le nombre des formations arbitraires qu'exige la pleine généralisation de telles intégrales. Sa réaction philosophique achève de confirmer, dans l'extrême domaine de l'esprit algébrique, l'appréciation, toujours résultée de l'essor abstrait, sur notre vraie destination théorique.

Après avoir assez caractérisé l'intégration implicite, on consacre trois leçons concrètes à son application géuérale aux questions de géométrie objective qui firent naturellement surgir son essor abstrait, quoiqu'il dût essentiellement servir à la mécanique. Par sa nature trop compliquée l'étude du mouvement ne peut jamais susciter les doctrines algébriques dont elle a le plus besoin; en sorte qu'elles n'auraient aucunement surgi si la science de l'étendue ne les eût spontanément instituées. Pour caractériser cette influence ,la première des leçons directes sur le complément objectif de la géométrie intégrale apprécie les principaux types de la détermination d'une ligne d'après une propriété de ses tangentes ou de sa courbure. Une telle destination devient plus importante et plus difficile dans les deux autres leçons, où l'on considère l'institution finie des classes géométriques d'après leurs types infinitésimaux, d'abord du premier ordre, puis des suivants. Il faut alors reconnaître que l'imperfection du calcul intégral rend la géométrie objective essentiellement différentielle, comme l'est, au fond, la géométrie subjective.

Voilà par quel enchaînement de progrès le calcul, à peine ébauché tant qu'il fut isolé, prit, en un siècle, tout l'essor convenable à l'esprit humain, en se subordonnant à la géométrie pour constituer la philosophie mathématique. Il devint ainsi

capable de développer sa principale destination scientifique en coordonnant la théorie générale du mouvement et de l'équilibre, qui, sans pouvoir aucunement susciter son évolution, devait en fournir la meilleure application. Nous devons toujours regarder le septième et dernier degré logique comme instituant le complément nécessaire de la philosophie mathématique et sa transition normale à la philosophie naturelle proprement dite. Consacrant sa leçon initiale à l'appréciation philosophique de la position encyclopédique qui caractérise la mécanique générale, il y fait surtout sentir son aptitude à compléter l'étude de l'existence universelle par celle de l'activité correspondante, où la Logique confine à la Physique. Une telle appréciation conduit la seconde leçon à poser la double base subjective d'une telle étude, après avoir exactement établi sa définition systématique, qui condense son ensemble en un problème unique. La conception des forces peut seule permettre de considérer les mouvements indépendamment des moteurs, dont le mode d'action doit toujours être systématiquement écarté dans les spéculations statiques et dynamiques. On ne saurait normalement séparer cet artifice de l'institution de l'inertie, sur laquelle repose l'ensemble de la mécanique générale, et d'où résultent les difficultés propres au passage de l'abstrait au concret.

Élaborée empiriquement, la mécanique fit nécessairement surgir le troisième et principal mode du matérialisme mathématique, d'abord algébrique, puis géométrique, enfin dynamique. Tant que l'existence est étudiée sans activité, le matérialisme concret ne peut jamais devenir vraiment dangereux, parce qu'il reste confiné dans un domaine alors dépourvu de contact direct avec l'ensemble des spéculations humaines. Une irrésistible efficacité s'y développe quand la combinaison des deux attributs universels autorise l'esprit mathématique à réagir sur toutes les sciences supérieures, en suscitant des

usurpations que le théologisme et l'ontologisme sont également incapables de surmonter. D'après cela, la troisième leçon propre au préambule philosophique du septième degré logique est entièrement consacrée à caractériser et rectifier, dans son principal essor, une déviation que le positivisme peut seul juger et réparer. Expliquant le plan didactique du complément mathématique, la leçon suivante termine ce préambnle en faisant surtout apprécier la nécessité d'écarter les questions spéciales pour réduire la mécanique vraiment rationnelle aux doctrines pleinement générales.

Relative à la base objective des théories dynamiques et statiques, la première leçon du préambule scientifique établit les trois lois fondamentales du mouvement, qui règlent d'abord l'action propre à chaque force, puis le concours des impulsions, enfin le conflit des mobiles. Elles permettent à la leçon suivante de compléter cette base en instituant le principe d'après lequel la dynamique d'un système quelconque est normalement réductible à sa statique, et la conception qui peut seule généraliser la doctrine de l'équilibre. Graduellement assimilées aux lois universelles qui s'y rapportent, quatre espèces de notions objectives rattachent à la philosophie première le complément de la science fondamentale, dont le début s'y trouve spontanément lié par la théorie des nombres. La troisième et dernière leçon du préambule scientifique de la mécanique générale est uniquement consacrée à l'appendice algébrique qu'exige la pleine coordination d'une telle étude. Elle fait spécialement sentir l'impuissance du complément mathématique à susciter les institutions abstraites qui lui sont surtout destinées, puisque la mécanique a nécessairement tiré de la géométrie le calcul des variations.

Il faut normalement consacrer la première leçon de statique à l'ensemble des doctrines élémentaires sur la composition des

forces, d'abord convergentes, puis parallèles. Nous destinons la leçon suivante à compléter cette étude préliminaire par la double théorie des moments et des couples, où les lois de composition prennent leur meilleure forme abstraite et même concrète. Dans la troisième leçon, ces lois sont spécialement appliquées au principal cas du parallélisme, en instituant la doctrine générale des centres de gravité, transmise de la Physique à la Logique. Une indication analogue, mais moins développée, termine cette leçon en appréciant la composition des gravitations moléculaires, surtout envers deux sphères convenablement constituées. C'est à la leçon suivante qu'appartient la théorie fondamentale de l'équilibre d'un système invariable, en considérant d'abord les deux groupes auxquels peuvent immédiatement aboutir des forces quelconques, décomposées chacune suivant un plan et perpendiculairement. Il faut aussitôt appliquer les six équations d'équilibre à la détermination générale de la résultante, qui fait spontanément surgir la condition d'unité, directement appréciable d'après les couples. Relative aux systèmes variables, la cinquième et dernière lecon statique institue la théorie algébrique de leur équilibre, d'abord pour la discontinuité, puis envers la continuité, seule réllement subordonnée au calcul des variations : on doit peu développer une étude essentiellement épisodique.

Toute la première leçon dynamique est directement consacrée à la théorie fondamentale du mouvement rectiligne, où la Logique institue la comparaison générale aux seuls types spontanément émanés de la Physique. Rapprochées de leurs analogues géométriques, l'uniformité due à l'impulsion et la constante accélération résultée de la gravité remplissent, en mécanique, un office équivalent à celui que la géométrie obtient de la tangente et du cercle osculateur, avec la même appréciation algébrique. A la leçon suivante appartient la

théorie du mouvement curviligne, d'abord libre, puis sur une courbe donnée, enfin dans le cas intermédiaire où le mobile adhère à quelque surface. Mais ces deux leçons, directement restreintes à la considération d'un point, sembleraient concerner des notions purement idéales si la troisième ne les montrait spontanément relatives à la translation du centre de masse d'un solide quelconque. Elle prouve que ce centre se meut comme si toutes les forces s'y trouvaient immédiatement appliquées, et réduit le mouvement spécial du corps à tourner autour d'un tel point, dont le déplacement n'altère jamais cette rotation.

A la quatrième leçon appartient l'extension de la théorie dynamique aux systèmes variables, où le mouvement suscite une élaboration semblable à celle de l'équilibre, sauf l'accroissement nécessaire des difficultés algébriques, même envers la discontinuité. Rattachée d'abord à la statique, la loi lagrangienne, sur l'estimation des forces intérieures qui résultent des liaisons, développe alors son aptitude caractéristique à compléter et condenser le principe des vitesses virtuelles, sans y pouvoir normalement suppléer. Réduite à sa destination logique, la méthode générale de la dynamique est spécialement appréciée, dans la même leçon, en formulant le mouvement des fluides d'après leur équilibre, suivant leur définition mathématique. Essentiellement relative aux propriétés du mouvement qui sont nécessairement communes à tous les systèmes, la cinquième leçon fait respectivement résulter l'interprétation dynamique du centre de masse et le théorème des aires, des équilibres de translation et de rotation. Toutefois, elle y joint la loi des forces vives, qui, sans être aussi générale, est plus féconde et plus usuelle, surtout envers l'ensemble des applications que rappelle le nom propre au complément mathématique.

Suite normale de la construction dynamique, la double théorie de la rotation des solides termine le septième et dernier degré

logique en élaborant le problème le plus spécial et le plus difficile que comporte la mécanique vraiment générale. Il faut entièrement consacrer la sixième leçon à la rotation autour d'une droite fixe, en y considérant surtout le cas d'uniformité, qui quoique essentiellement idéal, peut seul susciter les théorèmes sur les moments d'inertie et les axes principaux. Nous pouvons ainsi juger dans la leçon suivante, l'étude, plus importante et plus difficile, de la rotation autour d'un point, où la théorie mathématique consiste à simplifier les équations spontanément émanées de la formule dynamique en introduisant deux notions connexes. Toutefois, cette leçon doit d'abord caractériser ces notions en expliquant la tendance continue de la rotation quelconque à s'accomplir sur un axe mobile, auquel se rapporte la vitesse angulaire qui réduit les vitesses linéaires aux diversités purement géométriques. Elle fait ensuite dériver cette double notion de la conception algébrique qui manifeste les compositions et décompositions propres aux rotations infinitésimales. Surgie de l'ensemble d'une telle préparation, la formulation finale du principal problème dynamique consiste à former six équations du premier ordre entre les trois composantes de la vitesse angulaire envers les axes principaux et les trois inclinaisons de ceux-ci sur le système fixe. Il faut alors terminer la leçon finale du dernier degré logique en faisant normalement apprécier l'efficacité subjective d'une telle solution et son impuissance objective, qui concourent à dégager la positivité rationnelle de son berceau mathématique.

Jugement. Le plan général de l'éducation encyclopédique accorde seize leçons à chacun des cinq premiers degrés logiques, qui remplissent son année initiale, et vingt à chacun des deux derniers, placés dans la seconde année. Il fallait d'abord résumer, comme je viens de le faire, la destination et l'enchaînement propres à chacune de ces cent-vingt leçons, successivement instituées par

ce volume. Etant ainsi devenu directement appréciable, l'ensemble de la science fondamentale permet au second tiers de cette conclusion d'accomplir son jugement systématique, d'abord historique, puis dogmatique, enfin religieux.

On ne peut normalement juger l'évolution générale de l'esprit mathématique sans la rattacher à la transition occidentale entre la théocratie et la sociocratie, successivement développée par l'antiquité gréco-romaine, l'âge catholico-féodal, et le double mouvement moderne. Bien que le début de l'essor abstrait ait nécessairement précédé cette progression et doive même remonter jusqu'au fétichisme, l'élaboration théorique n'a graduellement manifesté sa tendance philosophique et sa destination sociale qu'en s'incorporant à cette préparation. Je dois spécialement rappeler le caractère, de plus en plus révolutionnaire, de cet immense mouvement, où la dissolution du régime théocratique était spontanément sentie, sans que l'avénement de l'état sociocratique pût distinctement l'être, avant la fin d'une telle initiation. Elle dut surtout laisser entièrement indiscipliné le développement scientifique, que le défant d'affinité rendait naturellement inaccessible aux doctrines alors dominantes. Telle fut cette indépendance qu'elle devint même appréciable sous la théocratie, quoique l'essor théorique appartînt au sacerdoce : elle se manifesta de plus en plus, quand la culture abstraite se trouva pleinement dégagée du régime officiel.

Généralement envisagée, cette émancipation, garantie nécessaire d'une évolution décisive pour la positivité rationnelle, exigea trois degrés successifs, respectivement propres d'abord aux poëtes accompagnés des divers artistes, puis aux philosophes proprement dits, enfin aux purs savants. Il faut historiquement regarder ces trois classes transitoires comme ayant toujours tenté, chacune à sa manière, de fonder un nouveau sacerdoce, à mesure qu'elles se détachaient du tronc théocratique.

Une telle tendance dut finalement dépendre du mouvement scientifique, seul capable de poser, d'après l'étude des lois, la base nécessaire d'une doctrine naturellement destinée à remplacer la causalité théologique.

Immédiatement tentée par la poésie, qui s'affranchit la première du joug sacerdotal, la réorganisation spirituelle fit bientôt sentir le besoin d'un fondement dogmatique envers lequel l'art était radicalement incompétent. Mais la philosophie, à son tour, ne tarda point à manifester une impuissance équivalente, quand son principal organe n'aboutit qu'à construire, avec les entités, une doctrine moins complète et moins durable que le théologisme, qu'elle ne pouvait socialement remplacer. Avant la fin de l'évolution grecque, la science, pleinement caractérisée par d'éminentes constructions mathématiques, et même astronomiques, était irrévocablement devenue la seule source possible de la régénération qui devait partout substituer le relatif à l'absolu. Gênée par sa restriction nécessaire au premier couple encyclopédique, la positivité rationnelle, quoique implicitement prépondérante, ne pouvait aucunement dispenser de l'inspiration poétique et de l'impulsion philosophique. Il faut alors regarder la poésie et la philosophie comme ayant spontanément exercé sur la préparation mentale une influence toujours nécessaire, en y représentant les conditions, l'une de moralité, l'autre de généralité, que l'essor théorique ne pouvait directement remplir. Nous devons pourtant reconnaître que le mouvement scientifique, quoique longtemps restreint aux domaines inférieurs, ne fut jamais dépourvu de contacts spontanés avec les spéculations supérieures. Il se liait à l'étude directe de l'ordre humain par les conceptions biologiques naturellement inhérentes à la médecine, dont l'ensemble était artificiellement adhérent aux théories mathématiques d'après les doctrines astrologiques primitivement émanées de l'astrolâtrie.

Quelles que fussent les annexes propres à la science fondamentale, leur nature insuffisante et précaire rendait toujours nécessaires les influences indépendantes que la poésie, et même la philosophie, exerçaient sur la préparation occidentale. Un tel concours, quelque hétérogène qu'il ait naturellement été, resta spontanément indispensable jusqu'à ce que l'initiation théorique se trouvât entièrement accomplie. A la religion universelle devait seule appartenir l'irrévocable terminaison de la séparation provisoire de plus en plus développée, depuis la rupture occidentale du joug théocratique, entre la science, la philosophie, et la poésie. Réunies chez le sacerdoce positif, les trois aptitudes spéculatives y fondent une autorité spirituelle que leur dispersion rendait impossible, malgré l'influence continue de chacune d'elles. Elles ne sont devenues pleinement conciliables que d'après l'extension décisive de la positivité rationnelle au domaine social et moral, où l'esprit scientifique perd à la fois sa sécheresse et sa spécialité, naturellement connexes.

Une telle issue doit systématiquement transformer en concours le conflit spontané qui fut longtemps propre à l'essor simultané des trois attributs spéculatifs. Toujours réunis chez le sacerdoce universel, ils y concilient la moralité poétique avec la consistance théorique et la généralité philosophique avec la réalité scientifique. Il faut maintenant concevoir comment l'état spéculatif des occidentaux, d'abord si différent d'une telle fusion, l'a graduellement préparée, à mesure que s'est développé le besoin de la réorganisation spirituelle.

Étudié dans l'évolution grecque, ce besoin y fut autant senti, par tous les vrais penseurs, qu'il pouvait réellement l'être sous les impulsions purement intellectuelles. Convenablement apprécié, le mouvement philosophique manifestait aux bons esprits l'inanité mentale de la métaphysique, et l'impossibilité

de remplacer la théologie autrement que d'après la science, irrévocablement surgie envers le plus simple domaine théorique. Rien ne peut mieux expliquer le protond attrait que devaient alors inspirer les études mathématiques, où l'intelligence affranchie de la théocratie pouvait déjà pressentir l'unique base dogmatique de la sociocratie, quand un pareil génie prévaudrait partout. Il faut pourtant reconnaître que les exigences sociales durent bientôt suspendre les aspirations mentales, et même ralentir la culture scientifique, jusqu'à ce que les impulsions théoriques et pratiques pussent assez converger. Tel est le principal motif de l'ajournement nécessaire qui réservait aux modernes le développement de l'algèbre, l'avénement de la géométrie subjective, et la fondation de la mécanique générale, quoique les anciens eussent suffisamment préparé ce triple essor.

Mais cette réaction ne peut assez s'expliquer qu'en appréciant la subordination normale de l'évolution intellectuelle au mouvement social. On voit l'incorporation romaine faire irrévocablement prévaloir l'action sur la spéculation, après que celle-ci fut suffisamment développée par l'élaboration grecque. Réunissant tous les occidentaux sous une même domination, qui partout éteignait la vie militaire, elle tendit à la transformer en existence industrielle, et fit directement sentir le besoin d'une morale commune, naturellement incompatible avec les nationalités polythéiques. Alors durent de plus en plus prévaloir les aspirations spontanées à la religion universelle, qui ne pouvait d'abord émaner que du théologisme monothéiquement concentré, quoique sa décadence mentale, et même son insuffisance sociale, fussent déjà sensibles aux âmes d'élite. Le mouvement scientifiqne fut sinon suspendu, du moins ralenti, par les nécessités politiques qui devaient finalement le pousser vers sa principale destination, quand le monothéisme aurait

assez témoigné son impuissance à résoudre le problème occidental.

Il faut ainsi reconnaître que, pendant les treize siècles qui suivirent le principal accomplissement de l'incorporation romaine et de l'élaboration grecque, toutes les sollicitudes occidentales furent spontanément concentrées sur la préparation, l'organisation, et l'application du catholicisme. Dans cet intervalle, les études mathématiques, qui longtemps avaient naturellement absorbé les meilleurs efforts, se trouvaient graduellement livrées aux penseurs secondaires, d'après les justes préoccupations sociales de tous les grands esprits. Elles avaient précédemment reçu les perfectionnements essentiels qui restaient assez compatibles avec l'ascendant monothéique, et l'on y devait déjà redouter une tendance appréciable vers la pleine émancipation théologique. Alors leur progrès fut spontanément réduit à faire simultanément surgir la simplification générale du calcul arithmétique, l'essor décisif du calcul algébrique, et le complément trigométrique de la géométrie préliminaire, triple résultat des besoins astronomiques. La culture mathématique était si contraire aux tendances occidentales que ces progrés furent surtout accomplis sous l'islamisme, qui, naturellement préservé des sollicitudes propres à la division des deux pouvoirs, dut seul prolonger l'essor grec.

La dernière phase de la transition catholico-féodale devait irrévocablement transformer cette situation, quand le résultat général des croisades eut assez constaté l'impuissance du monothéisme à fonder la religion universelle, dont il avait partout développé le besoin. Elle fit graduellement prévaloir les sollicitudes intellectuelles, avec un meilleur caractère que pendant l'élaboration grecque, parce que leur ascendant se trouva désormais placé sous l'invocation, de plus en plus explicite, des besoins sociaux qui l'avaient auparavant restreint. Alors les études

mathématiques furent systématiquement liées au plan général d'éducation encyclopédique que tous les gouvernements occidentaux ébauchèrent, autant que possible, pour remplacer l'instruction catholique, dont l'insuffisauce et la désuétude étaient partout appréciables. La préparation théorique, auparavant concentrée chez quelques organes spéciaux, se trouva désormais commune à tous les esprits normalement cultivés et tendit à devenir pleinement universelle. Elle fut tellement incorporée au régime occidental que la philosophie et la poésie furent spontanément subordonnées à la science, où l'instinct public dut alors placer l'unique source de la régénération mentale, et par suite sociale.

Le caractère, plus théorique que pratique, de la révolution partout résultée de l'ensemble du moyen âge se trouva longtemps dissimulé par l'insuffisance immédiate de la positivité rationnelle, encore bornée au premier couple encyclopédique, sauf les aperçus chimiques et biologiques. Il était d'abord impossible de reconnaître l'aptitude régénératrice d'une évolution qui devait alors sembler à jamais bornée aux plus simples domaines, où, depuis l'essor grec, elle subissait une stagnation primitivement inexplicable. Bien que le monothéisme fût radicalement épuisé, la métaphysique, qui l'avait spontanément dissous, dissimulait son impuissance en aspirant à le remplacer, d'après une modification anarchique de ses dogmes fondamentaux. Elle devait naturellement obtenir l'ascendant officiel dans une partie de l'Occident, avant que l'instinct public fût assez détourné des illusions qu'elle avait partout suscitées, sur la perpétuité d'une religion systématiquement dépouillée de ses principaux appuis théoriques et pratiques. Ralentie, d'après un tel espoir, sous la première phase de la révolution occidentale, où la dissolution monothéique resta purement spontanée, l'évolution scientifique se borna, pendant deux siècles, à des pro-

grès secondaires, faute d'impulsion sociale. A la place des constructions mathématiques et de la rénovation astronomique qui pouvaient déjà surgir, elle s'y trouva naturellement restreinte aux développements et préparations accessoires, plutôt pratiques que théoriques. La présidence encyclopédique, d'abord placée chez les géomètres et les astronomes, fut alors transférée aux médecins, parmi lesquels les chimistes étaient spontanément confondus.

Telle resta la situation scientifique jusqu'à ce que l'explosion protestante eût assez manifesté le vrai caractère de la métaphysique moderne. Radicalement incapable de rien organiser, sauf le doute, le désordre, et la dégradation, l'ontologisme avait spontanément dissimulé sa nature tant que son action dissolvante s'exerça, dans l'antiquité, sur un excès de théologisme, qu'elle concourut à réduire au monothéisme. Il ne dut irrévocablement dévoiler sa tendance purement subversive que chez les modernes, où, s'appliquant à la concentration monothéique, il la priva de toute consistance, même mentale, et surtout sociale, quoiqu'il aspirât à la perpétuer en repoussant le positivisme. Après l'épreuve irrécusablement résultée du protestantisme, les grands esprits furent instinctivement poussés vers la culture scientifique, désormais devenue seule capable de garantir l'ordre occidental contre l'impuissance théologique et l'anarchie métaphysique. La seconde phase de la révolution moderne appliqua les principales forces intellectuelles à la triple construction mathématique, sans laquelle la science fondamentale ne pouvait assez réagir sur l'ensemble de la constitution encyclopédique.

On vit alors commencer la systématisation finale, d'après une combinaison décisive, quoique provisoire, entre le génie scientifique et le génie philosophique, graduellement séparés depuis l'issue de l'essor grec. Ne se bornant plus à modifier la philosophie

métaphysico-théologique, la science aspira, chez le plus éminent des penseurs modernes, à lui substituer une philosophie directement fondée sur la positivité rationnelle. On peut déjà juger la tendance finale de l'esprit occidental d'après l'accueil que les deux sexes firent à la synthèse provisoirement surgie du domaine mathématique. Réciproquement, la philosophie systématiquement positive réagit, à l'état naissant, sur le perfectionnement connexe du calcul, de la géométrie et de la mécanique. Elle y fonda les principales institutions qu'exigeait l'étude abstraite de l'existence universelle, en faisant successivement surgir la géométrie subjective, l'algèbre transcendante, et la mécanique générale, d'après l'ensemble des bases spontanément résultées de l'essor spécial.

Nous devons toujours regarder cette triple construction comme ayant été surtout destinée, par les deux philosophes modernes, à dégager l'esprit positif de son berceau mathématique, pour le pousser vers son domaine final, seule source théorique de la régénération occidentale. On vit bientôt développer une telle tendance, quand la science fondamentale eut spontanément cessé d'absorber les meilleurs efforts abstraits, c'est-à-dire lorsque le triple progrès aboutit à la mécanique céleste, où l'astromonie se lie à la physique. Bien que la troisième phase moderne ait encore fourni de grands géomètres, ils ne purent que développer et coordonner les conceptions irrévocablement émanées de la phase précédente, d'abord envers les trois éléments logiques, puis sur la principale application théorique de leur ensemble. Les plus éminents penseurs du dix-huitième siècle furent directement occupés de spéculations sociales et morales, ou livrés aux méditations vitales qu'exigeait l'élaboration systématique du domaine humain. Examinée dans sa marche générale, la positivité rationnelle dut alors s'élever de la science fondamentale à la science finale, sans s'arrêter à

la science préparatoire au delà des besoins propres au préambule physico-chimique de la biologie.

Pour que ce mouvement soit assez appréciable, il y faut toujours considérer la connexité nécessaire entre les trois parties du progrès mathématique d'où résulta l'ascension décisive de l'esprit positif. Ralliée à la géométrie subjective, l'algèbre fut bientôt poussée jusqu'au calcul infinitésimal, qui permit d'instituer la mécanique générale, dont les bases propres étaient déjà posées. Il devint alors possible à l'esprit mathématique de réagir sur l'ensemble des spéculations abstraites qu'il ne pouvait assez atteindre tant qu'il n'avait pas complété, l'étude de l'existenee universelle par celle de l'activité correspondante. Mais, en reprenant la présidence encyclopédique que les médecins avaient spontanément obtenue dans la phase précédente, les géomètres s'en montrèrent bientôt indignes en restreignant leurs vues, et même leurs sentiments, au moment de leur principale mission. Ils firent graduellement prévaloir la culture algébrique sur sa double destination concrète, et tendirent à perpétuer l'enfance de la positivité rationnelle en dénaturant le triple progrès qui devait la dégager de son berceau mathématique.

Afin de mieux comprendre la dégénération finale de la spécialité théorique, il faut d'abord apprécier l'insuffisance nécessaire de la discipline philosophique qui fut spontanément instituée par les deux législateurs connexes de la science fondamentale. Contraint d'ébaucher la systématisation finale d'après une synthèse purement objective, le fondateur de la philosophie mathématique ne put directement organiser un régime dont la source devait exclusivement émaner du suprême domaine encyclopédique. Une vraie discipline ne pouvait irrévocablement régler l'esprit positif que lorsqu'il aurait assez accompli son évolution spéciale pour aborder sa destination

générale. Telle est l'origine de la révolte des géomètres contre les philosophes, quand la construction de la mécanique céleste cessa d'absorber l'essor algébrique, dès lors poussé vers l'usurpation, anarchique et rétrograde, de la présidence théorique. Il devint graduellement hostile à la double source de ses propres progrès, en méconnaissant la fondation philosophique de la géométrie générale et du calcul infinitésimal, que les vues académiques ne pouvaient assez apprécier.

Réagissant sur l'ensemble des spéculations abstraites, l'évolution mathématique, malgré les déviations propres à sa dernière phase, suscita l'extension décisive de la positivité rationnelle au préambule vital du domaine directement humain. Alors un empressement irréfléchi d'atteindre le terme normal de l'élaboration objective poussa les principaux penseurs biologiques à franchir l'interposition nécessaire du point de vue social entre les théories vitales et les études morales. Ne pouvant ainsi fonder que des conceptions purement provisoires, ils durent pourtant concourir à diriger l'évolution scientifique vers sa destination finale. Guidées par des vues également insuffisantes, les impulsions émanées des deux extrémités de la philosophie naturelle restèrent nécessairement incapables d'aborder le domaine social, jusqu'à ce que les besoins pratiques eussent assez rectifié les tendances abstraites. Sans l'ébranlement politique du peuple central, la sociologie ne pouvait irrévocablement surgir pour fonder la hiérachie encyclopédique, en surmontant le double matérialisme théorique, d'abord mathématique, puis médical.

Ici commence l'évolution finale de la positivité rationnelle, ainsi parvenue à son principal domaine sous une impulsion pratique qui lui servit autant de guide que de stimulant. Néanmoins, il fallut naturellement attendre le développement essentiel de la grande crise, et même l'épuisement radical de la

rétrogradation qui dut la suivre, avant que la méthode positive fût irrévocablement étendue aux phénomènes sociaux. Cependant, telle était l'urgence de cette construction, que, au milieu de la tempête révolutionnaire, le dernier précurseur du positivisme osa directement tenter un noble effort pour fonder la politique sur l'histoire. Il était alors impossible de réaliser une aspiration philosophique dont les bases intellectuelles et les conditions sociales restaient encore insuffisantes. Toutefois, cet admirable avortement marqua le but que devait directement atteindre la seconde génération du siècle exceptionnel, d'après le concours spontané des impulsions pratiques avec les préparations théoriques. Après que la sociologie eut ainsi surgi, la période la plus dégradante, mais la plus courte, commença pour l'esprit mathématique, ou plutôt algébrique, académiquement hostile au résultat nécessaire de l'ensemble des travaux scientifiques, anciens et modernes. Réduit à de vaines protestations contre une ascension qu'il ne pouvait aucunement empêcher, il subit, sous l'impulsion sociale, la discipline philosophique que le double législateur de la science fondamentale n'avait jamais pu suffisamment instituer.

Si l'explosion protestante, essentiellement bornée au couple septentrional de l'occidentalité, fit pourtant prévaloir l'élaboration décisive de la positivité rationnelle, la grande crise, directement propre au centre de l'humanité, dut irrévocablement susciter son essor final. On ne put alors conserver aucun doute envers l'impuissance organique d'une théologie qui laissait ainsi surgir la dissolution sociale, ni quant à la nature purement subversive d'une métaphysique dont le triomphe politique constituait une sanglante anarchie. Cette double démonstration, devenue pleinement irrécusable à tous les yeux, ne permit de concevoir la terminaison normale de la révolution occidentale que d'après l'avénement direct de la religion universelle, né-

cessairement fondé sur l'extension totale du dogme positif. Immédiatement accomplie par la création de la sociologie, cette extension ne laissait d'autres besoins que ceux d'une suffisante subordination de l'intelligence au sentiment. Il dut bientôt prévaloir quand une angélique impulsion privée eut moralement régénéré le fondateur de la science finale, ainsi transformée en religion universelle, après avoir irrévocablement suscité la vraie philosophie.

Il devint alors possible de constater l'accomplissement essentiel de la transition occidentale entre la théocratie et la sociocratie, pendant les trente siècles écoulés depuis le début spontané de l'élaboration grecque jusqu'à l'avénement systématique du culte de l'Humanité. Malgré le prolongement nécessaire de l'anarchie mentale et morale, souvent poussée au désordre matériel, les âmes d'élite purent subjectivement devancer l'état normal, de manière à diriger la marche graduelle de son installation universelle. Alors les trois classes successivement émanées de la rupture occidentale de l'unité théocratique furent irrévocablement dissoutes en s'incorporant au sacerdoce de l'Humanité. Généralement éteintes dans l'ordre de leur naissance, la poésie, la philosophie, et la science avaient respectivement épuisé leur efficacité séparée, quand le positivisme les fit normalement concourir à l'installation de la religion universelle. Elles firent ainsi pressentir leur combinaison finale pour le développement continu de l'économie humaine, où leur essor propre représente l'évolution simultanée du culte, du dogme, et du régime.

Ici finit le jugement historique de la science fondamentale, dont l'existence distincte dut naturellement cesser quand elle eut spontanément rempli sa mission spéciale. Nécessairement indiscipliné jusqu'à ce que l'initiation théorique fût entièrement accomplie, l'esprit mathématique se trouva finalement conduit,

d'après la culture dispersive, à méconnaître sa principale destination. Naturellement investis de l'office régénérateur, successivement abandonné par la poésie et la philosophie, la science oublia sa mission au temps marqué pour la réaliser. Étroite et sèche, elle repoussa les vues générales autant que les inspirations morales, et devint aussi rétrograde qu'anarchique en aspirant à perpétuer ou rétablir, sous forme objective, le règne de l'absolu, quand elle eut assez préparé la relativité subjective. Sans l'impulsion sociale, la science, par suite de sa dégradation académique, aurait davantage entravé la régénération occidentale que la théologie et même la métaphysique.

Rattachée à le religion universelle, la science, comme la philosophie et la poésie, y trouve à la fois sa consécration finale et sa discipline normale. Étroitement liées à la synthèse subjective, les études mathématiques doivent indéfiniment remplir, dans l'éducation systématique, un office essentiellement équivalent à celui qu'elles exercèrent pour la préparation spontanée de l'esprit occidental. Généralement considéré, le jugement historique de la science fondamentale se trouve naturellement représenté par sa position encyclopédique qui caractérise à la fois son développement, son influence, et ses dangers. Il en est de même, à plus forte raison, pour le jugement dogmatique que j'y dois maintenant accomplir. Réduite à ses conditions essentielles, cette seconde appréciation finale de la science fondamentale doit successivement concerner la doctrine et la méthode.

On ne peut assez juger l'efficacité scientifique du domaine mathématique qu'en examinant séparément son aptitude naturelle envers les trois sortes de lois, physiques, intellectuelles, et morales, dont l'ensemble constitue l'ordre universel. Bien appréciée, la science fondamentale doit simultanément ébaucher

ces trois manifestations, sans pouvoir assez accomplir aucune d'elles, même celle que les préjugés théoriques lui rapportent spécialement, parce qu'elle y semble mieux caractérisée que les deux autres. Étudiée philosophiquement, chaque science est à la fois objective par son but et subjective d'après ses moyens : elle concerne un spectacle toujours extérieur au contemplateur d'où dépend sa connaissance. Il faut ensuite regarder la subjectivité comme autant affective que spéculative, puisque le cœur inspire, guide, et soutient l'application de l'esprit. Réunissant ces deux appréciations, on reconnaît que toute science est, à divers degrés, simultanément physique, intellectuelle, et morale, d'après la correspondance nécessaire de chaque office cérébral aux trois parties de la nature humaine.

Malgré les préjugés théoriques, le caractère physique des études mathématiques devient directement incontestable quand on les a convenablement instituées. A l'égard de leur domaine concret, cette appréciation n'a jamais comporté d'incertitude que depuis la dégradation académique de la science fondamentale. Tous les géomètres du dix-septième siècle avaient spontanément regardé l'observation extérieure comme la base nécessaire, non-seulement de l'étude du mouvement, mais aussi de la théorie de l'étendue. Elle ne fut essentiellement méconnue que dans le siècle suivant, d'après les usurpations algébriques, qui firent académiquement nier l'induction mathématique, même en mécanique. Régénérée par le positivisme, la science fondamentale est habituellement jugée, sous ses trois aspects, aussi physique que le comporte sa position encyclopédique.

A cet égard, il faut ici caractériser une illusion philosophique souvent résultée encore d'une insuffisante application de la vraie théorie cérébrale. Confondant la contemplation abstraite avec la méditation qui la suppose, on est ainsi conduit à juger purement déductives des opérations théoriques où l'induction a

nécessairement concouru. Toutefois, en rectifiant cette méprise, qui change l'observation en raisonnement, on voit le caractère physique inégalement appartenir aux trois éléments de la Logique. Il est assez prononcé dans le plus concret ponr n'y pouvoir jamais être normalement contesté, depuis que le positivisme dissipa les nuages académiquement accumulés autour des bases de la mécanique, où la séparation entre l'induction et la déduction fut irrévocablement accomplie. Vues convenablement, les notions géométriques sont primitivemement fondées sur l'observation, étant toujours relatives à des types directement émanés du dehors ou subordonnés à ceux-là, soit graphiquement, soit algébriquement: les principales propriétés de chacun d'eux ont une origine inductive. Une appréciation analogue, quoique moins tranchée, convient aux spéculations numériques, d'après la source toujours objective de leurs idées élémentaires, où le dedans ne peut aucunement suffire. Sans l'irrationnelle domination de l'algèbre, l'objectivité mathématique n'aurait jamais été gravement contestée sous un aspect quelconque; malgré l'attitude équivoque du calcul des relations, dont les doctrines n'ont d'autre réalité que celle de ses deux souches nécessaires.

Néamoins, les doutes longtemps développés, à cet égard, chez d'éminents théoriciens, suffiraient pour constater que le caractère physique est peu prononcé dans la science fondamentale. On la voit directement consacrée à l'étude abstraite de l'existence universelle, toujours réduite à ses trois attributs essentiels, le nombre, l'étendue, et le mouvement, dont l'ensemble ébauche l'appréciation normale de l'ordre réel. Mais, vu l'extrême généralité de ces lois partout permanentes, elles sont trop mêlées à toutes les constitutions physiques pour en caractériser aucune. Elles n'ont jamais semblé suffire à l'appréciation dogmatique de l'économie naturelle que sous l'ascen-

dant passager du matérialisme théorique, qui disposait à réduire tous les phénomènes aux conditions géométriques et mécaniques. Nous devons donc regarder les lois mathématiques comme ébauchant l'ordre physique, mais incapables de le constituer, et tendant à le faire mal juger.

Une équivalente appréciation leur convient davantage envers l'ordre intellectuel, quoiqu'il soit encore supposé leur appartenir essentiellement, par suite de la confusion académique entre la déduction et l'induction. Nous pouvons d'abord indiquer, à cet égard, une observation indirecte dont l'ensemble suffirait pour constater l'irrationalité des préjugés plus ou moins communs à tous les théoriciens. Inaugurée par la science la plus simple et la plus ancienne, la découverte des lois intellectuelles aurait depuis longtemps surgi, tandis qu'elle est réellement émanée du domaine le plus complexe et le plus récent. Toutes les notions essentielles sur la constitution et la marche de l'entendement humain sont nécessairement résultées de son développement le plus complet, d'après une appréciation rationnelle du spectacle social et moral. A cet égard, les sciences inférieures peuvent seulement fournir des vérifications, souvent équivoques même, des lois, statiques et dynamiques, qu'elles seraient naturellement incapables de dévoiler.

Si la marche réelle de l'intelligence était spontanément appréciable dans le domaine mathématique, les grands géomètres ne seraient pas restés habituellement placés au point de vue vicieusement abstrait qui les disposait à dédaigner ou méconnaître la vraie filiation de leurs doctrines. Une nature exceptionnelle poussa le plus philosophe d'entre eux à faire toujours précéder l'explication dogmatique par l'appréciation historique. Il fut noblement imité, sous cet aspect, dans les principaux écrits de son digne adjoint au calendrier occidental. Toutefois, cette double exception fit elle-même ressortir l'in-

suffisante influence du point de vue historique dans les spéculations mathématiques avant que le positivisme les eût systématiquement régénérées. Examinés philosophiquement, ces aperçus spéciaux ne pouvaient assez caractériser la vraie filiation des notions correspondantes, parce qu'ils traitaient comme isolée une évolution toujours liée à l'ensemble du mouvement humain.

Sans la discipline synthétique qui résulte de la religion universelle, les géomètres seraient encore dominés par leur prédilection spontanée pour les ingénieux artifices propres à simplifier la démonstration en dissimulant ou dénaturant l'enchaînement. A cet égard, on pourrait aisément multiplier des exemples vraiment déplorables, chez des géomètres distingués, même envers la mécanique, malgré sa tardive évolution. Voilà comment on peut directement constater l'impuissance de la science fondamentale à dévoiler les lois statiques, et surtout dynamiques, de l'entendement humain. Elles sont naturellement liées au principal domaine encyclopédique, quoique tous les autres soient plus ou moins capables de les vérifier, proportionnellement à la complication de chacun d'eux. Rattachées artificiellement à la première phase de l'initiation théorique, elles y remplissent, sous l'impulsion synthétique, un office, plus logique que scientifique, qui peut utilement préparer leur appréciation normale.

On voit que la science fondamentale, loin de pouvoir jamais susciter la découverte des lois intellectuelles, dut toujours attendre d'elles sa vraie coordination, impossible avant le positivisme. Rattachée à la constitution mathématique, la hiérarchie encyclopédique n'y saurait aucunement surgir, faute d'un champ assez vaste, où pourtant elle trouve une irrécusable confirmation, d'après la progression normale entre le calcul, la géométrie, et la mécanique. Dans un tel domaine, l'antiquité de la

culture concourt avec la simplicité des spéculations pour permettre une vérification incontestable de la loi des trois états, surtout envers l'élément le plus concret, où les influences ontologiques et théologiques altèrent encore la positivité. Rarement trouve-t-on cependant quelques aperçus confus, chez les meilleurs géomètres, sur l'évolution générale de l'entendement humain, que le spectacle social a seul manifestée. Examinée comparativement, la science fondamentale est moins propre que la science préparatoire à dévoiler, et même à vérifier, les lois intellectuelles, parce qu'elle reste plus éloignée de la science finale, unique source de leur appréciation historique et dogmatique.

Cependant, sans confondre le jugement scientifique avec l'examen logique, on doit directement reconnaître au domaine mathématique une aptitude spontanée envers les notions secondaires sur la constitution, et même la marche, de l'entendement humain. Il faut normalement attribuer une pareille compétence à toutes les spéculations vraiment positives, d'après la corrélation nécessaire entre les lois objectives et les lois subjectives. Vue philosophiquement, cette aptitude, toujours liée à la réalité des conceptions, se développe en proportion de leur complication respective, qui lui fournit un champ plus vaste et plus décisif. Elle est donc à son moindre degré dans le domaine mathématique, quoique l'élément le plus simple y puisse aussi permettre de sentir l'existence des lois mentales, et même d'apprécier les détails de leur application sans en saisir l'ensemble. Si l'on résume cette seconde partie de son appréciation scientifique, on le voit, contrairement aux préjugés théoriques, moins apte à caractériser l'ordre intellectuel que l'ordre physique, en vertu de la position encyclopédique qui le conduit à les ébaucher simultanément.

Il faut normalement pousser ce décroissement jusqu'à l'ordre

moral, afin d'avoir assez reconnu que l'efficacité scientifique d'un tel domaine est plus passive qu'active. Sous cet aspect, nous n'y pouvons réellement puiser qu'une première ébauche, indispensable quoique grossière, de la principale loi du monde affectif, où la soumission est la base du perfectionnement. Toujours cette conviction surgit des études mathématiques envers l'ensemble des lois réelles, tant subjectives qu'objectives, auquel les inspirations théoriques y sont continuellement subordonnées. On doit pourtant reconnaître que la réaction affective d'une telle soumission est rarement conforme à son efficacité spéculative, vu qu'on obéit par force et sans amour. Rattachée aux lois morales, l'habitude de l'obéissance, même involontaire, dispose les natures qui ne sont pas radicalement vicieuses à sentir combien elle importe au vrai bonheur, tant personnel que social. Immédiatement aptes à développer la subordination forcée du dedans au dehors, les études mathématiques sont peu propres à cultiver la vénération et surtout l'humilité, parce que l'orgueil déductif y suscite un sentiment exagéré de l'importance individuelle. A la vérité, sous la discipline religieuse, elles peuvent normalement indiquer, aux jeunes disciples de l'Humanité, la nécessité de ces deux dispositions, en faisant habituellement apprécier la dépendance historique et l'imperfection dogmatique.

Examinée quant à la doctrine, la première phase encyclopédique ne peut systématiquement dévoiler que les lois mathématiques, c'est-à-dire numériques, géométriques, ou mécaniques. Sous tout autre aspect, même physique, et surtout intellectuel ou moral, elle n'indique l'ordre universel que d'une manière vague et confuse, d'après le sentiment, purement empirique, spontanément résulté de la connexité nécessaire des diverses lois réelles. Son insuffisance philosophique est spécialement confirmée par sa tendance finale vers le prétendu calcul

des probabilités, qui suppose entièrement dépourvus de lois naturelles la plupart des phénomènes quelconques. On voit l'existence pratique mieux développer le sentiment empirique de l'ordre physique, tandis que le culte et l'art font mieux sentir l'ordre affectif et mental. Relativement à la doctrine, la science fondamentale ne peut donc constituer qu'une introduction, nécessaire mais insuffisante, à la science préparatoire, et, par suite, à la science finale.

Toute l'importance philosophique des études mathématiques résulte de leur aptitude logique, que je dois maintenant juger, d'après les bases directement posées au commencement de ce volume et graduellement développées dans tout son cours. Relativement à la méthode, comme envers la doctrine, et même davantage, la science fondamentale peut seulement ébaucher une appréciation nécessairement réservée à la science finale, et mieux élaborée par la science préparatoire. Il suffit de considérer la position encyclopédique du domaine mathématique pour reconnaître que, dans l'existence normale, il est autant inférieur à tous les autres en rationalité qu'en dignité, parce qu'il reste plus éloigné de la vraie source des deux attributs. Bien que sa systématisation religieuse puisse didactiquement compenser une telle infériorité, cette régénération exige une sollicitude plus active et plus assidue qu'envers les études plus rapprochées du centre synthétique et sympathique. Une exclusion continue du point de vue social, tant statique que dynamique, y dispose à négliger le but pour les moyens, et fait spontanément oublier ou méconnaître l'Humanité pendant qu'on élabore les principaux résultats théoriques de son évolution préliminaire.

Afin de mieux juger l'aptitude logique de la première phase encyclopédique, il y faut successivement considérer les éléments, la marche, et les caractères de la rationalité positive.

Gênée par son éloignement du siège nécessaire de la véritable unité, la science fondamentale est peu disposée à manifester, et même à reconnaître, l'efficacité théorique du sentiment. Elle peut cependant développer l'aptitude rationnelle des images comme celle des signes, et caractériser la puissance mentale de leur combinaison, mais sans dévoiler la source affective d'un tel concours. Régénérée par la religion universelle, elle comporte une constitution sympathique, qui ne sera bien appréciable que quand le culte de l'Espace deviendra suffisamment familier. Elle doit alors ébaucher l'harmonie abstraite des moyens logiques en faisant ouvertement présider les sentiments à la combinaison entre les signes et les images.

Toutefois, le domaine mathématique ne peut jamais faire suffisamment apprécier une telle combinaison, parce qu'elle s'y confond avec la corrélation de deux classes consécutives de phénomènes. Un examen philosophique de l'aptitude algébrique des considérations géométriques y fait toujours discerner deux influences hétérogènes, et pourtant inséparables, celle des images que les courbes fournissent aux équations, et celle du but concret ainsi surgi pour les spéculations abstraites. Tel est le mélange nécessaire qui ne peut jamais y permettre une suffisante analyse de l'efficacité rationnelle, autant due à la réaction spéciale d'une science sur la précédente qu'à la corrélation générale entre les images et les signes. Toutefois, la comparaison des divers modes ou degrés d'influence y permet de reconnaître la participation, simultanée mais distincte, des deux conditions, sans déterminer leur poids relatif. Il suffit de noter que la réaction algébrique de la géométrie est essentiellement propre aux lignes, quoique les surfaces fournissent au calcul un champ plus vaste et plus important; ce qui fait spécialement ressortir la puissance des images, trop compliquées dans le second domaine géométrique.

Il faut, réciproquement, envisager l'efficacité géométrique de l'algèbre, comme autant due à l'action normale d'une science sur la suivante qu'à l'aptitude directe des signes. Nous devons naturellement retrouver, en subdivisant l'échelle encyclopédique d'après son principe fondamental, des relations analogues à celles de ses degrés essentiels, et rendues plus intimes par la moindre hétérogénéité des domaines consécutifs. Telle est la source spéciale de confusion qui nous empêche d'ériger la science fondamentale en type décisif de la combinaison normale entre les images et les signes pour élaborer la pensée sous l'impulsion du sentiment. Rendue équivoque par ce mélange, l'aptitude logique des images sembla, malgré la rénovation cartésienne, étrangère au domaine mathématique, dont le dernier et principal coordinateur s'efforça de systématiser toutes les parties avec la seule assistance des signes. Après une telle tentative, on peut cependant contester la préférence ainsi donnée aux signes pour les raisonnements géométriques et mécaniques, où la réaction du concret sur l'abstrait empêche d'apprécier l'efficacité logique des formules.

Étudiés normalement, les deux moyens généraux spontanément destinés à seconder l'élaboration mentale ne peuvent assez manifester leur aptitude respective, et la puissance propre à leur ensemble, que d'après une suffisante homogénéité de source et de destination. Le domaine humain est le seul qui puisse pleinement satisfaire à cette condition permanente, de quelque manière qu'il soit cultivé, parce que les images et les signes y sont naturellement conformes aux pensées, sans différer d'origine ni de but. A la poésie sous l'aspect concret, à la morale dans l'ordre abstrait, doit donc appartenir la vraie manifestation, spontanée et systématique, de l'harmonie logique entre les signes et les images, mieux développée par la prière que d'après la méditation mathématique. Nous pouvons seule-

ment attribuer à la science fondamentale, en vertu de sa position encyclopédique, le privilège de fournir la première ébauche théorique d'une appréciation qui ne devient nette, précise, et décisive que dans le domaine humain. Sans la poésie et le culte, les savants auraient toujours contesté la valeur logique des images et l'efficacité mentale du sentiment, en accordant aux signes une empirique prépondérance.

Relativement à la marche de la rationalité, l'incompétence de la science fondamentale est assez caractérisée par son impuissance à susciter, et son insuffisance à représenter, le résumé général (*induire pour déduire, afin de construire*) exclusivement émané du suprême domaine encyclopédique. Elle est tellement impropre à manifester l'induction que de grands géomètres en ont spontanément méconnu l'existence et systématiquement nié la validité. La réorganisation finale des études mathématiques peut seule assez réparer, sous cet aspect, les vices propres à l'évolution préliminaire, sans que la logique inductive puisse jamais ressortir autant de la science fondamentale que de la science préparatoire. Il faut davantage écarter les prétentions du berceau de la positivité rationnelle à caractériser la construction, qu'il fait seulement apprécier dans les détails spéciaux, en négligeant ou compromettant la coordination générale, toujours impossible hors de la synthèse universelle. Généralement vouée, par la simplicité de son domaine, à constituer un simple apprentissage, la première phase encyclopédique ne peut pas plus initier aux grandes constructions intellectuelles que les châteaux de cartes n'enseignent à construire des édifices matériels. Il importe de dissiper, à cet égard, les prestiges théoriques, en reconnaissant la supériorité logique de la poésie sur la science ; jamais les compositions mathématiques n'offrirent une harmonie comparable à celle des meilleurs types de l'épopée ou même du drame. On peut seule-

ment trouver, dans le domaine humain, des constructions abstraites et systématiques aussi satisfaisantes inductivement, et plus efficaces déductivement, que ces constructions concrètes et spontanées.

Nous devons enfin considérer l'aptitude logique de la science fondamentale envers le type général de rationalité positive, dont l'élaboration constitue sa meilleure destination philosophique. On y peut successivement apprécier les trois attributs essentiels, clarté, précision, et consistance, spontanément communs à tous les modes réels, théoriques, esthétiques, et pratiques, de l'essor intellectuel. D'après les préjugés scientifiques, la clarté semble l'apanage privilégié du domaine mathématique, tandis que l'instinct vulgaire le juge radicalement mystérieux. Une appréciation vraiment philosophique explique et concilie ces deux opinions, en représentant la clarté mathématique comme essentiellement due à la simplicité des phénomènes, et purement relative aux détails spéciaux, dont la combinaison générale reste profondément obscure. Si l'on considère l'incapacité didactique de la plupart des géomètres avant l'installation de la synthèse universelle, on reconnaîtra que la clarté mentale, comme la clarté matérielle et la clarté morale, vient d'en haut et jamais d'en bas.

On a moins besoin d'expliquer l'inanité nécessaire des prétentions mathématiques envers la consistance, dont l'appréciation est naturellement liée à celle de la logique constructive. Relativement à ce privilège, il suffirait de rappeler l'incohérence ordinairement propre aux géomètres, surtout dans la dernière génération de leur existence distincte, depuis l'avénement jusqu'à l'installation du positivisme. Alors le fréquent concours du désordre des pensées avec celui des actions et des sentiments montra que l'initiation mathématique est naturellement impropre, d'après la restriction subjective de son domaine objec-

tif, à développer la consistance, sauf envers les détails spéciaux. Relativement au moins important des trois attributs rationnels, il faut aussi reconnaître que la précision reste dans la science fondamentale, comme la consistance et la clarté, bornée aux déterminations particulières, qui ne peuvent ailleurs devenir numériques. Examinée historiquement, la triple réputation du domaine mathématique fut uniquement due au contraste spontané que le public occidental put toujours saisir entre l'attitude théorique des géomètres et celle des métaphysiciens ou même des théologiens.

Sous les deux aspects dogmatiques, comme au point de vue historique, la science fondamentale est donc jugée seulement apte à constituer un apprentissage, nécessaire mais insuffisant, à la fois logique et scientifique, d'abord collectif, puis individuel. Elle offre, à tous égards, les qualités et les défauts naturellement propres à sa position encyclopédique, qui la consacre aux spéculations les plus simples et les plus générales, mais les moins synthétiques et les moins sympathiques. Nous y trouvons, sous chaque aspect, une ébauche spontanée, dont le développement doit toujours appartenir à la seule étude vraiment normale, vu la coïncidence finale entre l'objet et le sujet, graduellement rapprochés pendant l'ascension encyclopédique. Il faut maintenant compléter et condenser le jugement philosophique, d'abord historique, puis dogmatique, de l'initiation mathématique, en procédant à son jugement religieux, d'après la régénération accomplie dans ce volume. La science fondamentale, déjà caractérisée par sa position encyclopédique, doit ainsi tirer, du titre final de Logique, le résumé décisif de la combinaison que mon introduction avait normalement promise entre sa consécration et sa discipline.

Vue religieusement, l'initiation théorique est surtout destinée, dans son ensemble, à constituer une transition graduelle entre

le culte intime, essentiellement concret, et le culte public, nécessairement abstrait, qui peut seul systématiser la vie humaine. Établie ainsi, l'éducation encyclopédique, où la science élabore la philosophie, succède à la préparation esthétique que l'essor affectif avait spontanémnt suscitée, et conduit à l'apprentissage pratique qui doit activement lier l'existence individuelle à l'évolution collective. Nous avons dès lors institué la continuité qui caractérise l'état normal parce qu'elle développe l'unité, de manière à la consolider en conciliant l'ordre et le progrès. Étudiée synthétiquement, l'encyclopédie abstraite conduit l'individu, comme l'espèce, à la combinaison finale entre la raison pratique et la raison théorique, toujours divergentes tant que l'essor spéculatif n'a pas atteint le terme où la science confine à l'art. Rapportée à ce but, l'élaboration dogmatique, conforme à l'évolution historique, institue l'harmonie logique, d'après un rapprochement graduel entre les deux points de vue objectif et subjectif. Elle les fait finalement coïncider en constituant la prépondérance encyclopédique du domaine moral, où la systématisation abstraite se trouve irrévocablement combinée avec la spontanéité concrète. Ralliée à la synthèse subjective, l'analyse objective y puise sa consistance et sa dignité, parce qu'elle lui procure plus d'extension et de réalité, de manière à développer et consolider l'harmonie entre le dedans et le dehors.

Immédiatement conforme à cette destination, la progression encyclopédique consacre ses trois termes généraux, la Logique, la Physique, et la Morale, à l'étude respective des trois objets essentiels de l'adoration positive, l'Espace, la Terre, et l'Humanité. Dès lors, le dogme développe et consolide le culte, comme le régime doit ensuite développer et consolider le dogme, de manière à constituer l'unité religieuse, toujours accompagnée de la continuité normale. On ne peut assez affermir une telle harmonie qu'en y conformant la constitution intérieure

de chacun des trois termes encyclopédiques, afin de mieux instituer leur succession. La coordination normale des trois domaines propres à chaque terme consiste à faire toujours prévaloir celui qui se rapproche le plus du but total de l'initiation théorique, pour que les domaines particuliers se succèdent comme les termes généraux. Examinée comparativement, cette condition ne se trouve spontanément remplie qu'envers la science finale, où le domaine directement relatif à la destination pratique prévaut au point d'imposer son nom au groupe ternaire.

Nous devons donc conforner à ce modèle la constitution intérieure de la science fondamentale, en y faisant normalement prévaloir le domaine qui la lie à la science préparatoire. Alors la Logique, qui, pendant son élaboration historique, dut surtout consister dans la géométrie, au point d'y puiser son nom usuel, est dogmatiquemeut caractérisée par la mécanique. Tel fut le perfectionnement qu'apporta mon principal ouvrage à la constitution que mon traité fondamental avait spontanément ébauchée pour la science finale, où je fis d'abord prévaloir le domaine moyen, auquel je dus ensuite préférer l'extrême. Après avoir assez institué la prépondérance du domaine le plus concret dans chaque extrémité de la progression encyclopédique, il faudra nécessairement accomplir une équivalente transformation envers le terme intermédiaire, et dès lors changer son nom. La physique ne dut y prévaloir, comme la géométrie en Logique et la sociologie en Morale, que pendant l'évolution préliminaire : l'ascendant normal de la chimie y fut spontanément pressenti dès le moyen âge, où le titre de philosophe passa des astronomes aux chimistes.

Coordonnée envers la mécanique, au lieu d'y voir son complément, la science fondamentale acquiert, à tous égards, la consistance et la dignité propre à sa position encyclopédique.

On y conçoit alors la géométrie comme un préambule nécessaire, où l'état passif de l'existence universelle prépare l'étude directe de son état actif, puisque le mouvement suppose l'étendue. Relativement au calcul, son principal développement algébrique se trouve irrévocablement absorbé dans la constitution géométrique, dont il partage la subordination à la mécanique, en ne conservant que l'inaltérable indépendance de l'arithmétique, début spontané de la positivité rationnelle. D'après une telle institution, la distinction entre l'appréciation statique et l'étude dynamique devient philosophiquement la même pour la science fondamentale, que quant à la science finale, en dissipant l'anomalie qui la rendait confuse envers la source de sa formulation. Il faut ainsi combiner la géométrie avec la statique proprement dite, en destinant l'une aux résultats et l'autre aux conditions de l'état d'immobilité, qui ne laisse plus subsister, dans l'existence universelle, que les phénomènes de l'étendue. Alors on peut alternativement ériger la géométrie en préambule de la statique ou la statique en complément de la géométrie, selon que l'appréciation prépondérante est scientifique ou logique. Le domaine concret de la science fondamentale devient une progression normale entre la géométrie, la statique, et la dynamique; tandis que son domaine abstrait reste nettement réduit à l'arithmétique, en incorporant l'algèbre à la géométrie.

Une telle constitution rend le berceau positif autant homogène qu'il puisse l'être: elle en constate la régénération, ainsi résumée par la prépondérance du domaine qui suscita le principal matérialisme: elle y signale le caractère de préambule, en le rapportant à la science suivante. Mais la systématisation définitive de la science fondamentale ne doit pas conduire à tirer son nom, comme dans le science finale, du domaine normalement prépondérant: la qualification exceptionnelle de Logique

peut mieux manifester sa principale destination. A la fois caractéristique des avantages et des imperfections naturellement propres au premier terme encyclopédique, cette dénomination le fait surtout envisager comme une simple ébauche de la rationalité positive, dont le vrai type est à l'autre extrémité. Nous sommes encore soumis à la double obligation d'exposer la philosophie relative dans un langage construit sous la synthèse absolue, et de décrire l'état normal d'après l'existence préliminaire. Il faut peu s'étonner qu'une telle situation suscite des équivoques, et semble même offrir des contradictions, qui ne peuvent assez disparaître sans une étude très-approfondie de l'ensemble du positivisme.

La Logique est donc destinée à tirer du plus simple domaine l'ébauche d'une rationalité développable dans le plus éminent; ce qui caractérise autant sa nécessité que son insuffisance. Il faut finalement reconnaître, d'après l'ensemble de ce volume, que sa systématisation religieuse consacre, au delà de ce qu'on pouvait d'abord espérer, la plupart des acquisitions dues à sa culture indisciplinée, qui, même au moyen âge, échappa, par l'islamisme, au régime spirituel. Bien appréciée, l'épuration que j'ai graduellement accomplie est surtout relative au dernier siècle de l'élaboration mathématique, alors prolongée sous l'anarchie académique, depuis la révolte des géomètres contre les philosophes. Relativement à cette phase essentiellement superflue, il faut normalement distinguer trois générations, dont la première, commençant après la construction de la mécanique céleste, aboutit à la grande crise; la dernière sépare l'avénement et l'installation du positivisme. Examinées comparativement, la première excuse la dégénération algébrique des géomètres d'après le poids de la situation scientifique : leur indifférence sociale est pardonnable dans la seconde, faute de doctrine convenable : leur dégradation académique ne devient

coupable que sous la troisième, où la régénération surgit.

A la fois disciplinée et consacrée par la qualification de Logique, la science fondamentale, spécialement vouée à l'étude systématique de l'Espace, qui combine ses trois aspects, se trouve irrévocablement incorporée au culte positif, suivant la constitution normale du triumvirat religieux. D'après la nature purement subjective du Grand-Milieu, son étude ne peut consister qu'à développer sa double aptitude, comme siége sympathique des phénomènes abstraits et du destin objectif. Mais, sous l'un et l'autre aspect, cette étude est seulement ébauchée en Logique, envers les conditions les plus simples et les plus générales : elle se prolonge en Physique, et se complète en Morale, par l'introduction graduelle de nouvelles attributions. Il faut donc regarder une telle destination comme directement apte à caractériser la nature, essentiellement insuffisante et provisoire, des conceptions propres à la première phase encyclopédique, dont la constitution intérieure confirme cette appréciation. Respectivement voués, d'une manière plus spéciale, à l'Espace, à la Terre, à l'Humanité, ses trois domaines, numérique, géométrique, mécanique, forment une progression qui fait toujours sentir combien leur ensemble reste nécessairement éloigné du but général de l'évolution abstraite. Expliquée ainsi, la synthèse provisoire du groupe mathématique représente et prépare la systématisation universelle, non seulement philosophique, mais religieuse, dont elle fait graduellement désirer l'établissement définitif, pour dissiper les doutes et les incohérences propres aux études préliminaires. Reproduisant, dans l'initiation individuelle, les principales impressions résultées de l'évolution collective, la Logique, condensée par la mécanique, doit dogmatiquement pousser à développer l'essor qu'elle ébauche, comme elle le fit historiquement tant que l'esprit mathématique ne fut pas dégradé.

La science fondamentale ayant d'abord été spécialement résumée, puis synthétiquement jugée, le dernier tiers de cette conclusion doit directement caractériser le résultat général de sa systématisation finale. Une telle appréciation est naturellement composée de deux parties, respectivement relatives, la première à l'état normal de l'humanité, la seconde à la transition organique qu'il exige. Il faut spécialement lier ces deux examens d'après un point de vue qui concerne à la fois l'avenir et le présent. Résultat.

Afin que le résultat normal de la régénération mathématique soit pleinement appréciable, elle doit toujours être directement rattachée à l'ensemble de la réorganisation occidentale. La religion universelle est nécessairement destinée à régler la vie humaine, à la fois personnelle, domestique, et civique, en rapportant tout à l'Humanité. Tous les aspects de notre existence, affective, spéculative, active, y concernent simultanément notre nature et notre situation, de manière à demander deux disciplines connexes, l'une pour le dedans, l'autre quant au dehors. Une telle connexité doit spontanément appartenir au principe de l'Humanité, non moins extérieur qu'intérieur, soit comme sentiment, soit comme conception, soit comme destination. Sous son impulsion, l'amour coordonne le dedans, que la foi lie au dehors, de manière à constituer le double régime qu'exige l'existence réelle.

Graduellement rapportée au Grand-Être, elle s'y subordonne d'abord par le sentiment, puis par l'intelligence, enfin par l'activité. Reproduisant l'ensemble de cette progression, l'éducation positive est successivement affective, spéculative, et pratique, depuis le sacrement de la présentation jusqu'à celui de la destination. Également répartie entre l'art et la science, l'initiation intellectuelle s'accomplit par la culture esthétique, essentiellement spontanée, de la seconde enfance, et l'essor

théorique, nécessairement systématique, de l'adolescence.

Religieusement comparées, les deux moitiés de l'éducation spéculative, que le sacrement de l'initiation sépare, doivent respectivement développer le culte intime et préparer le culte public. Elles sont également nécessaires à l'initiation humaine, où l'une installe la raison concrète, en assistant le sentiment par l'art, et l'autre institue la raison abstraite en donnant la science pour guide à l'activité. Faute de la première, l'existence réelle serait à la fois dépourvue de charme et d'impulsion ; sans la seconde, elle manquerait de direction et de consistance. On doit toujours rattacher l'une à l'essor affectif de la première enfance, et l'autre à l'essai pratique qui sépare le sacrement de l'admission de celui de la destination. Normalement liées aux deux âges extrêmes de l'éducation positive, les deux moitiés de son âge moyen sont mutuellement solidaires, d'après la connexité nécessaire entre la raison concrète et la raison abstraite. Telle est la préparation qu'exige l'existence réelle pour que la systématisation finale consolide et développe la spontanéité primitive. Elles sont pleinement conciliables si l'initiation théorique fait toujours tendre l'analyse objective vers la synthèse subjective, en subordonnant l'abstrait au concret.

Afin de constituer cette subordination, il faut d'abord instituer l'éducation encyclopédique en descendant graduellement de l'homme au monde, par l'entremise de l'Humanité. Si la vie individuelle dépend de l'existence collective, celle-ci n'est pas moins liée à la vie générale, qui repose, à son tour, sur l'existence matérielle, seule commune à l'ensemble des êtres réels. Tous les modes ou degrés de cette existence fondamentale sont nécessairement subordonnés au plus général, première base de l'économie universelle, même envers les plus éminents phénomènes. Réduite à sa plus grande simplicité, cette base nécessaire concerne à la fois le nombre, l'étendue, et le mouvement,

qui constituent les trois attributs inséparables de toute substance. Ils composent l'existence mathématique, sur laquelle reposent tous les phénomènes plus élevés: abstraite chez les êtres terrestres, elle est concrète pour les corps célestes, où nous ne pouvons jamais apprécier que les conditions numériques, géométriques, et mécaniques.

Nous devons ainsi regarder l'ordre mathématique comme le premier fondement de l'ordre universel, dont l'appréciation normale ne pourrait graduellement surgir sans une suffisante connaissance de ce préambule général. Examiné logiquement, un tel début est autant nécessaire que sous l'aspect scientifique, afin de constituer, d'après le plus simple domaine, le type et les habitudes de la rationalité positive, finalement destinée aux plus nobles phénomènes. Tous les motifs intellectuels prescrivent donc d'ériger l'étude abstraite de l'existence fondamentale en première condition de l'essor théorique, tant individuel que collectif.

Généralement envisagée, cette étude concerne le seul domaine provisoirement séparable de la systématisation universelle, parce qu'il aboutit à l'ordre céleste objectivement indépendant de l'ordre terrestre. Élaboré dans son ensemble, le champ initial de la raison abstraite fournit à la positivité rationnelle un exercice décisif, d'après lequel elle doit graduellement s'étendre à tous les phénomènes. Nous devons toujours regarder l'efficacité générale de l'éducation encyclopédique comme essentiellement subordonnée à l'accomplissement spécial de cette première phase. Il suffit de considérer l'ensemble de l'histoire scientifique pour reconnaître que, dans l'évolution collective, l'ascendant universel de l'esprit positif a bientôt suivi son plein développement mathématique. On doit, à plus forte raison, regarder une telle étude, systématiquement régénérée; comme la principale garantie du succès théorique de l'ini-

tiation individuelle, où son ensemble embrasse le tiers des leçons normalement consacrées à l'éducation encyclopédique.

Mais les motifs moraux doivent naturellement compléter cette appréciation intellectuelle, quand l'esprit mathématique, toujours indiscipliné pendant la préparation occidentale, a convenablement reçu l'investiture religieuse graduellement instituée par ce volume. Alors purgé du matérialisme théorique que son essor spontané fit de plus en plus surgir, il fournit la meilleure base pour l'élaboration directe de la synthèse universelle. Guidées par la religion positive, les études mathématiques ébauchent la systématisation abstraite qui doit finalement consolider et développer la spontanéité concrète, en subordonnant les impulsions particulières aux lois générales. Naturellement bornées, sous l'aspect scientifique, à l'ordre le plus grossier, ces études ne font logiquememt apprécier que la plus vulgaire rationalité, par la prépondérance simultanée des signes de la déduction, et de la précision. On doit pourtant reconnaître leur aptitude privilégiée à former des types et des habitudes qui, malgré leur insuffisance sont normalement indispensables aux spéculations supérieures.

On ne peut convenablement élaborer la raison abstraite sans avoir dignement subi l'initiation mathématique, faute de laquelle toutes les convictions théoriques manquent de stabilité. Bien appréciée, la progression encyclopédique constitue un système normalement indivisible, où les deux extrémités sont mutuellement solidaires, l'une comme base, l'autre comme but. Restreinte à sa première phase, elle conduirait l'initiation systématique, comme l'évolution spontanée, à des tendances anarchiques et rétrogrades, en développant le matérialisme et la sécheresse théoriques, de manière à perpétuer l'enfance de la raison abstraite. A son tour, l'étude immédiate du domaine humain, sans préparation mathématique, susciterait des dispo-

sitions incohérentes et vagues, entièrement impropres à fonder des convictions solides, et directement susceptibles de déviations quelconques, autant morales qu'intellectuelles. Rien de fixe et commun ne peut surgir et durer sans une systématisation qui suppose des doctrines générales, toujours fondées sur l'abstraction théorique, de plus en plus nécessaire à l'ordre personnel, et surtout social, à mesure que l'existence se complique en se développant.

Le cours journalier de la vie réelle fait directement sentir combien les meilleures impulsions sont habituellement insuffisantes pour diriger la conduite, privée ou publique, quand elle reste toujours dépourvue des convictions destinées à prévenir ou corriger ses déviations. Il faut donc regarder l'éducation systématique, d'abord fondée sur l'initiation mathématique, comme nécessaire aux natures et conditions quelconques : le génie poétique, l'esprit féminin, et l'instinct populaire, en ont autant besoin que la sagesse sacerdotale. Alternativement livrées aux impulsions les plus contradictoires, les âmes mal pourvues d'un tel régulateur flottent au gré des émotions intérieures ou des influences extérieures, et comportent des aberrations quelconques si la situation devient assez dangereuse. Nous ne pouvons vraiment régler ou rallier qu'en assistant l'amour par la foi ; ce qui, dans l'état positif, exige que l'éducation encyclopédique soit entièrement universelle, afin de faire normalement apprécier l'Humanité comme le résumé nécessaire de l'ordre fondamental. Tels sont les motifs généraux qui rattachent la régénération systématique de l'esprit mathématique à l'ensemble du régime final, tant moral qu'intellectuel.

Il est autant impossible d'apprécier que d'instituer la méthode universelle indépendamment de toute doctrine déterminée. Nécessairement communs à tous les domaines réels, ses caractères abstraits doivent naturellement devenir mieux saisis-

sables dans le plus simple et le plus général des départements encyclopédiques. Telle est la base immuable de l'efficacité logique toujours propre aux études mathématiques, indépendamment de leur importance scientifique. Elles doivent éternellement préparer l'individu, comme elles ont d'abord initié l'espèce, à développer la positivité rationnelle dans le principal domaine du véritable esprit théorique. Garanties, par l'institution religieuse, des dégénérations propres à leur évolution indisciplinée, elles doivent autant détourner de la rétrogradation ou de la stagnation que de l'anarchie, en poussant l'essor abstrait vers son but au lieu de le fixer à sa source. Rapportées à l'Espace, elles le lient à la Terre à l'aide du ciel, et font toujours sentir l'Humanité, d'où procède le milieu subjectif, et de laquelle émanent toutes les institutions mathématiques, graduellement surgies depuis le fétichisme initial jusqu'au positivisme final. On doit donc reconnaître que la principale efficacité philosophique de la science fondamentale était nécessairement réservée à sa systématisation religieuse, parce qu'elle ne pouvait se manifester que quand la Logique serait complètement élaborée.

Examinés dans leur ensemble, les reproches, intellectuels et moraux, habituellement adressés à l'esprit mathématique, ne sont vraiment applicables qu'à sa dégénération académique, pleinement développée au dix-neuvième siècle. Tous les temps antérieurs indiquent une tendance croissante à concilier la culture du plus simple domaine encyclopédique avec celle du plus éminent. Il suffirait, pour caractériser cette disposition spontanée, de rappeler les spéculations morales du géomètre janséniste, quoique sa direction personnelle fût essentiellement rétrograde, même en Mathématique. Confirmée au siècle suivant, cette tendance y surmonta les habitudes académiques, sous l'impulsion encyclopédique qui lia tous les géomètres au mou-

vement philosophique, malgré sa négativité provisoire, spontanément contraire à l'esprit positif. A leurs prétendus successeurs, poussés, par l'empirisme et l'égoïsme, à perpétuer une élaboration épuisée, fut exclusivement réservé le coupable dédain des spéculatious morales et sociales, quand la situation occidentale en eut irrévocablement suscité la systématisation.

Relativement à cette culture simultanée des deux extrémités de la hiérarchie encyclopédique, il importe de remarquer qu'elle témoigne d'autant mieux les dispositions spontanées de l'esprit humain que, jusqu'à la fin de l'évolution préliminaire, la coexistence resta sans combinaison, faute de liens. Examinée dans ses degrés intermédiaires, astronomique, physique, chimique, et même biologique, cette hiérarchie offre une continuité naturelle, qui dut toujours être plus ou moins sentie. Toute la difficulté de sa constitution concernait les deux termes extrêmes, spontanément séparés des moyens, et, par suite, l'un de l'autre. Tant que la mécanique n'eut pas surgi, le domaine mathématique resta radicalement isolé du tronc encyclopédique, vu l'insuffisance du lien résulté de la géométrie. On voit pareillement la morale demeurer essentiellement extérieure au système théorique, jusqu'à la création de la sociologie, qui l'unit à la biologie.

Examinée quant au sentiment, la réaction cérébrale des études mathématiques fut aussi satisfaisante qu'envers l'intelligence, jusqu'à la dernière période du régime académique. Pendant les trois grandes phases de la transition occidentale, cette culture resta toujours liée, chez ses dignes organes, à de nobles émotions, instinctivement suscitées par l'élaboration du premier degré de la loi finale et de la seule méthode apte à fonder de véritables convictions. On voit ces sentiments devenir plus nets et plus vifs, à mesure que l'évolution sociale fait mieux apprécier la décadence continue du régime préliminaire et l'a-

vénement graduel de l'état normal. Convenablement jugés, les principaux progrès théoriques furent toujours subordonnées aux fortes impulsions pratiques, spontanément émanées de la situation occidentale. A l'explosion protestante appartint l'avénement décisif du complément mécanique de la science fondamentale ; et la grande crise fit ensuite surgir le préambule sociologique de la science finale.

Pour constater la pleine compatibilité des habitudes mathématiques avec l'enthousiasme politique, il suffirait de rappeler mon père spirituel, combinant, sous la proscription, un humble traité d'arithmétique avec une éminente tentative sociologique. Relativement à cette conciliation, je puis maintenant compléter ce noble type par l'exemple irrévocablement résulté de ma propre carrière, où la science fondamentale a toujours fourni la source et l'appui des travaux destinés à la science finale. On voit, dans l'un et l'autre cas, si les habitudes de clarté, de précision, et de consistance, contractées envers le domaine mathémique ont jamais entravé les dispositions normales qu'exigeait la systématisation universelle. Bien que ce double exemple semble exceptionnel, il indique l'état normal à travers l'anarchie moderne, dont la terminaison rendra la même conciliation spontanément familière à toutes les âmes qui pourront dignement recevoir l'éducation religieuse. Immédiatement placées au point de vue qui d'abord nécessita beaucoup d'efforts, elles sauront sans difficulté développer et consolider les dispositions synthétiques et sympathiques qu'exige le succès de l'initiation mathématique convenablement régénérée.

On doit directement reconnaître que, vu son éloignement du centre de l'unité, le premier domaine encyclopédique suscite des tendances contraires à sa systématisation religieuse. Nous pouvons cependant les surmonter d'après les antécédents, d'abord affectifs, puis esthétiques, de l'initiation mathématique, et

la sollicitude continue du sacerdoce qui la dirige, suivant le type institué par ce volume. On doit spécialement compter sur la destination logique de ces études, ouvertement prépondérante dans tout leur cours, où le plus simple domaine théorique prépare le type et les habitudes de rationalité qu'exige le plus éminent. Rapportées à ce but, les études mathématiques se trouvent autant disciplinées que consacrées, parce qu'on y peut toujours sentir combien elles restent nécessairement inférieures à cet office, qui ne put assez surgir que depuis l'accomplissement de l'évolution préliminaire. Elles sont désormais vouées, non à développer un domaine irrévocablement cultivé, mais à régler son application encyclopédique, en systématisant la reproduction individuelle de la préparation spontanément collective.

Sous l'impulsion sacerdotale, une telle destination sera toujours sentie, suivant la régénération maintenant accomplie, en utilisant la simplicité par laquelle le premier domaine théorique compense sa froideur naturelle. Après avoir normalement reconnu que la méthode n'est jamais séparable de la doctrine, ce qui motive la mission fondamentale de l'esprit mathématique, on doit bientôt comprendre que la plénitude logique exige la plénitude scientifique. Gênée par la restriction de son domaine, la première phase encyclopédique ne saurait assez caractériser l'efficacité mentale du sentiment, la combinaison entre les signes et les images, le concours de la déduction avec l'induction pour la construction. Elle ne développe la précision que quant aux détails, en laissant l'ensemble dans le vague, et présente une équivalente insuffisance envers la consistance ou même la clarté. Sa simplicité, qui rend l'appréciation subjective plus indépendante des préoccupations objectives, fait mieux ressortir son irrationalité radicale, nécessairement résultée de l'obligation d'exposer des conceptions dont on n'y peut assez expliquer la génération.

Telles sont les ressources propres à la nature de la science fondamentale pour que son étude, systématiquement régénérée, soit toujours jugée comme une simple introduction, autant insuffisante qu'indispensable, à la science finale. Elle ne peut aucunement lutter, ni de dignité, ni même de réalité, soit avec la préparation affective, soit avec la culture esthétique, qui l'ont normalement précédée, et sans lesquelles on n'y pourrait assez surmonter les diverses dégénérations théoriques. Rien ne saurait jamais être aussi synthétique et sympathique que l'essor spontané de la raison concrète, dont la seule insuffisance consiste dans son défaut radical de généralité normale et de consistance mentale. Même en morale, l'abstraction offre, au cœur comme à l'esprit, des dangers que sa moindre intensité n'y diminue pas, parce qu'elle s'y trouve toujours compensée d'après la complication d'un tel domaine, où les aberrations deviennent moins appréciables et plus tenaces. Il faut donc regarder la raison concrète comme un type spontané vers lequel doit de plus en plus tendre la raison abstraite, afin d'instituer l'état normal de l'entendement humain, en y combinant la généralité théorique avec la réalité pratique. Nous ne pouvons assez accomplir un tel concours qu'après avoir entièrement achevé l'ascension encyclopédique, aboutissant au seul domaine où la synthèse absorbe l'analyse d'après la coïncidence finale entre l'objet et le sujet. On ne peut plus craindre, dans une initiation ainsi conçue et dirigée, que son début cesse d'être habituellement apprécié comme une simple ébauche, dont l'insuffisance, à tous égards sentie, fait de plus en plus désirer l'avénement des études normales.

Examinée quant à sa constitution intérieure, la science fondamentale confirme les espérances de réaction synthétique, et même sympathique, naturellement propres à l'ensemble de sa position encyclopédique. Toutes les indications graduellement

surgies dans ce volume peuvent seulement caractériser une aptitude dont le développement exige la pleine installation de l'éducation universelle sous l'ascendant décisif de la religion positive. A cet égard, il suffit ici de spécifier deux types respectivement émanés du début rudimentaire et de l'essor transcendant du domaine mathématique. Dans tout le cours de la transition occidentale entre la théocratie et la sociocratie, l'arithmétique a peu développé son privilége d'instituer le suprême degré de généralité, d'abstraction, et de simplicité, parce que les nombres furent plus employés à mesurer qu'à classer. Il appartient au positivisme systématique de poursuivre, envers la théorie subjective des nombres, des spéculations et des applications essentiellement suspendues depuis l'extinction du fétichisme spontané.

Rattachée à l'ensemble de l'existence humaine, l'arithmétique, en vertu de sa suprême universalité, peut y fournir une assistance, théorique et pratique, d'autant plus précieuse, qu'elle sera toujours exempte des usurpations propres à l'intervention algébrique. Elle y doit servir, dès son début, à caractériser, avec une précision décisive, le problème général de l'économie artificielle, en fondant, sur la loi des permutations, l'appréciation numérique de l'ordre systématique. Nous pouvons toujours le réduire à choisir, dans la multitude des arrangements que comportent des objets quelconques, la disposition, nécessairement unique, qui représente l'ensemble de leurs vrais rapports. On doit alors concevoir toutes les relations partielles, graduellement manifestées par les études analytiques, comme essentiellement destinées à faciliter la découverte de la combinaison synthétique. Mais l'immensité des nombres indiqués par la loi des permutations ne permet aucunement de réaliser une telle aspiration, même en renonçant au classement universel, pour se

borner aux ordres secondaires, nécessairement liés au principal.

Il faut, en second lieu, rappeler les indications de mes cinquième et sixième chapitres sur l'universalité normale de la logique infinitésimale, que les géomètres regardaient comme exclusivement propre au domaine mathématique. Déjà j'ai suffisamment prouvé que sa meilleure destination et son principal essor appartiennent au domaine moral, où cesse l'anomalie philosophique entre la généralité subjective de la différentiation et l'objectivité spéciale de l'intégration. Examinée sous l'aspect le plus systématique, la logique infinitésimale devient, dans toute son extension, une simple branche de la méthode subjective, directement fondée sur l'ensemble des relations encyclopédiques. A cette suprême méthode, seule pleinement rationelle, se rattachent les ressources partout résultées de l'harmonie normale de l'état dynamique avec l'état statique, et celles, plus puissantes, que procure la comparaison des divers domaines théoriques. Sous cet aspect, la logique infinitésimale, consistant à subordonner les cas les plus complexes au plus simple dans un même ordre de spéculations quelconques, constitue le moindre degré de l'artifice fondamental dont les deux modes principaux appartiennent à la science finale.

Réagissant sur l'ensemble de la philosophie seconde, l'esprit mathématique doit donc ébaucher l'appréciation numérique de l'existence humaine et la construction de la méthode transcendante, quoique la dernière phase encyclopédique puisse seule accomplir ces deux œuvres. Il n'appartient qu'à l'avenir de développer de telles réactions, quand la science fondamentale, religieusement combinée avec tous les autres, sera suffisamment vouée à sa meilleure destination dans sa culture sacerdotale. Toutefois, je puis déjà caractériser cette influence indirecte de la régénération mathématique en y rattachant un perfectionnement logique que j'ai maintenant éprouvé de ma-

nière à réaliser ici l'annonce insérée au troisième chapitre du tome final de mon principal ouvrage. Examiné synthétiquement, il consiste en une sorte de calcul universel, à la fois algébrique et numérique, propre à seconder l'ensemble de l'élaboration mentale en facilitant simultanément la conception et l'expression. Son explication m'oblige à faire d'abord connaître le plan que j'ai finalement institué pour toutes les compositions importantes, et pleinement pratiqué dans tout le cours du volume que j'achève.

On doit regarder ce plan comme essentiellement inspiré par la théorie subjective des nombres, que mon premier chapitre a suffisamment caractérisée, surtout envers les nombres premiers, sur lesquels elle est principalement fondée. Relativement à chaque volume vraiment susceptible de former un traité distinct, il faut normalement instituer sept chapitres, outre l'introduction et la conclusion, et composer chacun de trois parties. Dans cette distribution fondamentale, qui se borne à préciser et systématiser des usages spontanément surgis, les deux divisions comportent des titres caractéristiques, quelquefois condensés en un seul mot. Examinée envers chaque tiers d'un chapitre quelconque, la règle consiste à le partager en sept sections, composées chacune de sept groupes de phrases, séparés par les alinéas usités. Normalement formée, la section offre un groupe central de sept phrases, que précèdent et suivent trois groupes de cinq : la section initiale de chaque partie réduit à trois phrases trois de ses groupes symétriquement placés : la section finale donne sept phrases à chacun des groupes extrêmes.

Sous cet aspect, ma règle de composition rapproche la prose de la régularité poétique, vu ma réduction antérieure du maximum de toute phrase à deux lignes manuscrites ou cinq imprimées, c'est-à-dire deux cent cinquante lettres. A mesure que la préparation humaine s'accomplit, le perfectionnement

de l'expression suscita des prescriptions plus précises, surtout caractérisées par le partage des chants en stances chez la population la plus esthétique. Normalement construits, les grands poëmes forment treize chants, décomposés en parties, sections et groupes comme mes chapitres, sauf l'entière égalité des groupes et des sections : en substituant le vers à la phrase, cette extension équivaut à celle de la principale épopée. Toutefois, la différence de structure ainsi réglée entre les volumes poétiques et les tomes philosophiques est plus apparente que réelle ; car l'introduction et la conclusion d'un poëme doivent chacune comprendre trois de ses treize chants. A jamais confondues dans l'office sacerdotal, les deux sortes de compositions tendent vers le même plan, quoique la seconde, moins parfaite et plus fréquente, comporte une exécution moins sévère et plus développée.

Après avoir assez caractérisé la constitution numérique du volume normal, il y faut directement expliquer la coordination algébrique des sections, des groupes ou stances, et des phrases Réduisant chaque phrase à l'initiale de son premier mot, et chaque groupe à celle de sa première phrase, je représente chaque section par un mot de sept lettres, dont chacune devient l'initiale du mot qui détermine un des groupes correspondants. Dans le choix de ces mots, j'admets également les verbes et les noms, tant adjectifs que substantifs : ceux-ci sont, suivant les cas, abstraits ou concrets, individuels ou collectifs : tous peuvent indifféremment émaner des cinq langues occidentales que je possède. Examinés quant à leur structure, les mots propres aux sections doivent toujours offrir des lettres distinctes et nécessaires, à moins qu'ils ne soient concrets, et surtout personnels ; envers les groupes, cette double condition n'est pas indispensable, quoique je l'aie toujours remplie autant que possible. Normalement destinée à faire mieux surgir et retenir l'enchal-

nement de la pensée et du discours, elle doit surtout convenir au premier cas ; dans le second, un tel résultat devient aussi superflu qu'impraticable. Toute l'efficacité de la méthode repose sur le choix des deux sortes de mots, qui doivent toujours offrir une signification synthétique ou sympathique, et se rapporter, le plus possible, à la section ou partie correspondante. Elle exige que ces titres soient autant prononcés qu'écrits; en appliquant l'Espace à cette double représentation, où l'impression phonique complète l'effet graphique, suivant l'exemple spontanément offert par les poëtes aux philosophes.

L'efficacité de ce régime, suggéré par le type mathémathique, résulte du concours normal de deux influences continues, l'une morale, l'autre mentale. Il tend, d'après un noble choix des mots systématiques, à ranimer, dans la moitié communicable de l'élaboration intellectuelle, les grands sentiments qui doivent seuls diriger sa période purement intérieure, aboutissant aux titres généraux des chapitres et de leurs parties. Examinés sous cet aspect, les noms concrets, tant collectifs qu'individuels, sont ordinairement préférables, comme étant plus synthétiques et sympathiques : on doit pourtant ménager leur emploi, que j'ai communément réduit à trois par partie, afin de concentrer les effets. Toute la coordination des sections consiste à les faire succéder suivant des initiales fixes, alphabétiquement consécutives, sauf les lettres peu favorables : j'ai pris A, B, C, D, F, G, H, pour l'intérieur d'un volume quelconque ; L, M, P, R, S, T, V, envers l'introduction et la conclusion. Avec ces quatorze lettres, je puis suffisamment honorer tous les grands noms du calendrier occidental, dans l'ensemble des quatre tomes propres à la construction dont j'achève le premier volume.

Il faut mentalement expliquer l'efficacité d'un tel régime d'après deux phénomènes cérébraux, dont le premier fut assez caractérisé par mon principal ouvrage et le second n'est pas

contestable. D'un côté, l'organe du langage fonctionne plus rapidement que l'appareil méditatif ; de l'autre, il tend à condenser chaque mot dans l'initiale, qui souvent le reproduit involontairement. Elaborée convenablement, la combinaison de ces deux lois mentales avec la loi morale qui subordonne la pensée et le discours au sentiment, peut assez expliquer tous les effets du régime que j'expose. Afin de le mieux juger, on doit aussi noter qu'une phrase n'est pas d'abord caractérisée par son premier mot, dont le changement fait aisément éviter les embarras qui semblent inhérents à de telles pratiques. L'habitude aura bientôt surmonté ces entraves apparentes, qui poussent, comme les prescriptions poétiques, à perfectionner simultanément l'expression et la conception ; je l'ai déjà senti dès le second chapitre du volume où j'introduis ce système de composition.

Etudiée historiquement, cette institution logique n'est pas autant dépourvue d'antécédents qu'elle le semble d'abord. Le père de l'histoire grecque en fournit la première ébauche spontanée, en consacrant aux différentes muses les diverses parties de sa grande composition. A toute digne dédicace appartient un office équivalent envers l'ensemble de l'ouvrage qu'elle inaugure ; mon régime systématise et développe cet usage, en l'appliquant à chaque degré d'élaboration, après avoir complété le concret par l'abstrait. Nous devons enfin noter la pratique spontanément commune à toutes les littératures, surtout modernes, où, dans les petites compositions, les poëtes ont souvent subordonné la succession des initiales de leurs vers à celle des lettres d'un nom honoré. Si ce triple antécédent ne pouvait aucunement suffire pour inspirer le régime que j'ai décrit, il y dut naturellement concourir avec l'impulsion mathématique, et facilitera l'appréciation du type suivant, qui convient au dernier tiers du sixième chapitre :

ABUELOS (ama, bénis, use, esprits, lucem, orb, senil).
BATAVES (baser, ancre, tarea, aboutir, ville, erial, socii).
CROMVEL (chefs, régir, osare, madurar, vigor, éveil, ligar).
DILECTA (divin, idoli, lieta, educare, casta, terre, acque).
FULGIDA (fuego, udita, lauri, général, imagi, déité, almas).
GERMIMA (gemma, essor, roots, materna, inani, nurse, asido).
HOMINES (humiles, orare, morti, italien, naïfs, épuré, stabili).

Subordonnées à la religion de l'Humanité, cette méthode n'aurait pu surgir avant le positivisme, et ne comporte une pleine efficacité que chez les âmes vraiment régénérées. Une telle institution est directement liée aux deux bases essentielles de la foi finale, l'indivisibilité d'une véritable systématisation et l'influence de la sympathie sur la synthèse. Je serais donc surpris qu'elle fût immédiatement sentie ailleurs que parmi les positivistes complets, c'est-à-dire religieux, auxquels elle offre une application universelle et permanente de leur formule sacrée, en combinant l'amour avec l'ordre pour le progrès. Elle y développe l'unité réelle et la continuité normale en faisant toujours concourir les trois éléments de la nature humaine à l'élaboration simultanée de la pensée et du discours. Toutes les dignes émotions de la vie privée peuvent ainsi seconder les impulsions propres à la vie publique pour dissiper la funeste sécheresse du travail théorique sans altérer la contention qu'il exige.

Une telle institution doit finalement compléter la constitution du langage humain en systématisant la combinaison spontanée de ses deux offices généraux envers la communication et l'élaboration des pensées. Nous faisons ainsi concourir la construction la plus populaire aux plus éminentes compositions ; car l'efficacité de ce régime repose sur le sens des mots qu'il emploie, tandis que les notations algébriques sont purement arbitraires. Il développe l'aptitude logique des signes, à la fois phoniques et graphiques, combinés avec les images, sous la

présidence continue des trois instincts sympathiques, alors appliqués aux détails de la synthèse dont ils ont d'abord inspiré l'ensemble. Toutes les habitudes ainsi contractées subordonnent le travail théorique au principe, moral, mental, et pratique, de l'Humanité, d'où procèdent les divers moyens de composition, et dont l'invocation spéciale vient toujours renouveler la source affective des efforts spéculatifs. Étendue aux sept idiomes occidentaux, anciens et modernes, par l'obligation d'éviter les répétitions, d'abord entre les groupes d'un même chapitre, et surtout entre les sections d'un même volume, cette méthode développe les sympathies occidentales et prépare la langue universelle.

Bien qu'ayant d'abord surgi pour l'élaboration philosophique, une telle institution convient davantage à la composition poétique, mieux apte à développer l'efficacité mentale du sentiment, et naturellement disposée à se régulariser. Examiné sous cet aspect, ce régime doit alors absorber la loi de la rime, principal caractère de la versification moderne, et première source de ses divers perfectionnements généraux. Les stances ou groupes ayant désormais sept vers, leur structure et leur succession combineront les deux modes propres à l'épopée italienne, en alliant l'unité de l'octave à la continuité du tercet, par le croisement des rimes et l'enchaînement des strophes. Toujours le premier vers d'une stance rime avec le dernier de la précédente, dont la consonnance finale est ainsi triplée comme les deux autres, sa consécutivité compensant leur alternance : l'enchaînement embrasse toutes les sections d'un même chant. Alors le travail poétique complète la régularisation dont il fournit le premier type ; il accepte dignement un surcroît de sévérité qui caractérise et développe sa supériorité normale sur le travail philosophique, que la systématisation universelle pouvait seule régler.

L'ensemble de ce régime tend à concentrer la composition, esthétique ou théorique, chez les âmes capables d'en apprécier l'efficacité sans en redouter la rigueur. Il serait ailleurs inacceptable et pourrait même devenir nuisible en suscitant la diffusion et la divagation pour remplir ses cadres immuables, qui ne conviennent qu'aux grandes intelligences fortement préparées, où ces formes secondent la convergence et la concision. Mais une telle concentration du travail spéculatif est directement conforme à l'état normal de l'Humanité, qui réduit la classe contemplative au sacerdoce digne de représenter les deux populations subjectives auprès de la population objective. Il importe à l'harmonie sociale que les meilleures formes de la composition, philosophique ou poétique, l'interdise aux médiocrités, et la rende même exceptionnelle chez les âmes d'élite, afin de mieux appliquer tous les efforts à la vie active, tant spirituelle que temporelle. Telle est la réflexion propre à lier l'ensemble de l'appréciation spéciale que je viens d'accomplir à celui des indications par lesquelles je dois maintenant compléter le conclusion de ce volume, en caractérisant sa réaction générale sur l'état présent. Elle doit naturellement résulter de l'aptitude d'un pareil travail à seconder la transition organique, d'abord chez les esprits vraiment théoriques, puis dans l'élite du public occidental. Régénérées systématiquement, les études mathématiques peuvent désormais accomplir leur principale mission historique, en faisant irrévocablement surgir le sacerdoce positif et cesser l'usurpation métaphysique.

Il faut aujourd'hui perdre tout espoir de faire ainsi participer les géomètres officiels à l'élaboration directe de la réorganisation spirituelle. D'après leur médiocrité personnelle ou leur dégradation collective, ils sont radicalement incapables d'y concourir. Elle doit même leur inspirer des répugnances croissantes, à mesure qu'elle dévoilera leur impuissance mentale et

dissoudra leur domination théorique, sur laquelle repose leur existence pratique. A peine senti chez leurs meilleurs types, ce volume y pourra seulement développer des sympathies passives, qui leur feront secrétement regretter leur inaptitude, acquise ou native. Rarement poussée jusqu'à la manifestation directe, cette disposition restera le plus souvent insuffisante pour encourager les jeunes théoriciens qui peuvent seuls concourir à l'installation du positivisme.

Mais, parmi ceux-ci, la régénération de la science fondamentale doit bientôt être profondément accueillie, en conciliant leurs tendances intellectuelles avec leurs aspirations sociales. On peut désormais regarder la dégradation académique comme caractérisée par l'opposition qu'elle suscite et développe entre deux besoins qui devinrent de plus en plus convergents à mesure que la transition occidentale s'accomplit. Remis au philosophes par les poëtes, le soin de poser les bases théoriques de l'ordre normal dut enfin échoir aux savants, c'est-à-dire aux géomètres, seuls placés à la source nécessaire de la positivité rationnelle. Animés d'une telle mission, ceux-ci la développérent dignement, jusqu'à la dernière phase de l'évolution préliminaire, où la spécialité dispersive les rendit incapables de sentir la principale destination d'une élaboration alors épuisée. L'avénement de la science finale changea leur impuissance en antipathie, tandis que les études mathématique se dégradèrent au point que leur ensemble devint habituellement insaisissable.

Exposés dès lors à flotter entre l'indifférence et la divagation, les jeunes esprits théoriques ne peuvent aujourd'hui combiner le calme et l'activité que d'après une régénération qui fasse systématiquement prévaloir les relations normales des deux extrémités encyclopédiques. Sous l'impression de ce volume, ils vont bientôt sentir la destination sociale de l'essor mathématique et l'efficacité mathématique de l'impulsion sociale. Tel

sera le principal résultat prochain d'une systématisation dont j'ai suffisamment caractérisé le résultat normal, ainsi préparé par l'influence transitoire, émanée de la même source, et soumise à des conditions semblables. Reconnue finalement indispensable à l'éducation universelle, l'initiation mathématique devient, à plus forte raison, nécessaire aux esprits capables de seconder la réorganisation occidentale. On ne pouvait, depuis la grande crise, éprouver, à cet égard, d'autre hésitation que celle qui devait spontanément résulter du conflit que ce volume dissipe, à sa source, entre l'esprit scientifique et l'enthousiasme politique, irrévocablement devenu religieux.

Telle fut la lutte que je dus moi-même subir, plus que personne, jusqu'à ce que, au sortir de l'adolescence, ma découverte fondamentale des lois sociologiques eut pleinement combiné les deux besoins, théorique et pratique, qui me semblaient d'abord inconciliables, quoique sentis également. Expliquée ainsi, la fluctuation actuelle des jeunes esprits scientifiques, doit prochainement cesser, d'après un travail qui leur offre à la fois la meilleure carrière sociale et la principale préparation intellectuelle. Réagissant sur son berceau, la synthèse positive régénère sa première base théorique, et lui confie, envers l'avenir ou même le présent, une mission équivalente à son office antérieur. Sa destination actuelle devient de plus en plus urgente, à mesure que la situation occidentale fait mieux sentir l'impossibilité de terminer la révolution moderne autrement que par l'ascendant de la religion universelle, qui, déjà construite, attend le sacerdoce correspondant. Alors un volume qui, d'abord semblait uniquement propre à l'état normal, paraît essentiellement convenir à la transition finale, ainsi pourvue de la systématisation spéciale qu'exigeait l'avénement graduel des vrais philosophes, bientôt suivis des dignes poëtes.

On ne doit jamais incorporer au sacerdoce de l'Humanité que

des âmes systématiquement préparées par l'éducation encyclopédique qu'il fera partout prévaloir sur la culture métaphysique et théologique. Rien ne peut les dispenser de l'initiation mathématique d'où leur mission tirera la régénération graduelle de la raison occidentale, en surmontant les doctrines et les méthodes anarchiques et rétrogrades. Nous ne pourrions autrement éliminer le mauvais esprit scientifique, qui désormais constitue, surtout chez la population centrale, le principal obstacle à la vraie reconstruction de l'ordre intellectuel et moral. Afin de surmonter les antipathies académiques, il faut que le clergé positif se montre seul capable de concevoir et d'expliquer toutes les grandes notions théoriques, comme de les appliquer à leur meilleure destination pratique. Repoussant les prétendus successeurs des vrais géomètres, les prêtres de l'Humanité doivent ainsi devenir les uniques héritiers d'une classe transitoire dont ils réalisent les aspirations finales, comme celles des poëtes et des philosophes qui la précédèrent.

Si les esprits véritablement théoriques restent maintenant étrangers aux études mathématiques, qui peuvent seules utiliser et développer leur aptitude, cela tient, d'ordinaire, à l'institution radicalement vicieuse d'une telle préparation. Après l'avoir irrévocablement régénérée en la systématisant, je compte que ce volume fera bientôt cesser une anomalie aussi nuisible à l'essor personnel qu'à la destination sociale, dans une situation partout favorable aux médiocrités intrigantes. Bien qu'il ne puisse immédiatement atteindre que des esprits encyclopédiquement cultivés, il doit, sous leur entremise, réagir sur ceux qui n'ont pas rempli les conditions convenables, non par dédain, mais faute de base et de guide. Exposée normalement, la science ne doit jamais pénétrer chez les élèves qu'à travers les maîtres, dont une telle interposition consolide et développe l'autorité nécessaire, sans laquelle l'instruction avorte, surtout

moralement. Rédigé pour servir à la fois de base mathématique et de type encyclopédique, ce volume devait seulement instituer l'explication orale où, comme dans l'état final, les esprits déjà régénérés feront ainsi surgir de nouvelles vocations au sacerdoce universel.

Convaincu que l'avénement du clergé positif est maintenant devenu le principal besoin de la réorganisation occidentale, dont j'ai pleinement posé le fondement religieux, je me suis directement occupé de régler ses conditions théoriques, pendant que j'élaborais leur accomplissement systématique. On voit, dans ma septième circulaire, l'annonce des thèses encyclopédiques, toujours choisies librement, d'après lesquelles je jugerai l'aptitude et l'instruction des vrais aspirants au sacerdoce de l'Humanité, quand leur moralité sera suffisamment constatée. Mais la condensation définitive de la hiérarchie théorique en trois degrés scientifiques, fondamental, préparatoire, et final, permet de réduire ce jugement à trois thèses imprimées, Logique, Physique, et Morale, à trois mois d'intervalles, publiquement suivies chacune d'un examen oral. Par là se trouvent à la fois simplifiées et perfectionnées la préparation et l'appréciation, simultanément devenues plus synthétiques sans susciter aucune lacune, que la semaine comprise entre la thèse et l'examen ne pourrait jamais dissimuler. La concentration des épreuves est tellement liée à la condensation encyclopédique que l'un de mes meilleurs disciples théoriques fut spontanément conduit à l'une quand je lui fis d'avance connaître l'autre. Elles permettent à l'élite du public occidental de seconder la difficile fonction qui m'est désormais échue pour composer un clergé vraiment digne d'appliquer la religion universelle à la terminaison nécessaire de la révolution moderne. Toutefois, les entraves que doit maintenant éprouver l'accomplissement des trois épreuves, dont rien ne peut jamais dispenser, fait mieux sentir

le prix de la réaction indirecte que la régénération mathématique exercera sur les âmes incapables du sacerdoce mais susceptibles de l'apostat régulier.

A mes deux ordres d'auxiliaires, plus différents de situation que de nature, je recommande l'essai du système de composition ci-dessus institué d'après une application décisive. Naturellement destinés à seconder l'installation du positivisme par des publications quelquefois étendues, les prêtres et les apôtres sentiront le prix d'un régime qui facilite et perfectionne l'élaboration simultanée du discours et de la pensée. Ils y devront, avant de commencer un chapitre, choisir ses vingt et un noms de sections, d'où surgiront, au début de chaque partie, ceux de tous les groupes correspondants, en posant d'abord les deux extrêmes et le moyen de chaque section. Mais après avoir mûrement accompli ces choix, leur fixité devient indispensable à l'efficacité d'une méthode surtout destinée, sous l'aspect théorique, à dissiper l'hésitation en prévenant l'arbitraire. Afin d'assurer la prépondérance normale des sons sur les formes, il importe, envers les lettres équivoques, de les appliquer aux groupes suivant la même prononciation que dans les sections correspondantes.

Nous devons maintenant caractériser l'influence de la régénération mathématique sur ceux qui, sans refaire leur éducation théorique, ni demander le sacerdoce ou l'apostolat, apprécient la philosophie et la religion positives dont ils peuvent beaucoup seconder l'installation. A cette élite du public occidental président les esprits, surtout nombreux chez le peuple central, qui, fortement imbus de la science fondamentale, déplorent sa dégradation académique, et sont continuellement poussés, par la vie pratique, à développer son efficacité sociale. Sous eux figurent les médecins qui regrettent d'avoir irrationnellement dirigé leur initiation théorique et sentent la régénération que

le positivisme procure à leur classe en l'affiliant au sacerdoce universel, d'après une irrévocable prépondérance de la synthèse sympatique. Ces deux éléments actuels du vrai public positiviste seront bientôt liés à l'aide des esprits, de plus en plus multipliés dont la carrière médicale est, spontanément ou systématiquement, précédée de dignes études mathématiques. Il faut immédiatement regarder l'action, intellectuelle et sociale, de ce volume comme devant surtout concerner cette double classe, graduellement résultée de la propagation universelle de l'instruction scientifique pendant la dernière phase de la révolution occidentale.

Également exempt des préjugés académiques et de la corruption morale actuellement liée aux positions théoriques, ce public normal, étant ainsi pourvu d'un guide systématique, secondera le positivisme pour délivrer l'Occident du joug métaphysique et littéraire. Convenablement jugés, les algébristes du dix-neuvième siècle sont aux géomètres du dix-septième, et même du dix-huitième, ce que les versificateurs sont aux poëtes et les lettrés aux philosophes. On doit pourtant reconnaître que jusque chez les plus dégradés, la science exerce une réaction, mentale et morale, qui les place au-dessus des types équivalents du milieu métaphysique, où nulle conviction fixe ne tempère l'égoïsme et la divagation. La coexistence officielle de ces deux classes dans la corporation légalement investie du pouvoir spirituel envers le peuple central, rend habituellement appréciable leur distinction intellectuelle et sociale. Elles sont diversement hostiles au positivisme, que les faux savants repoussent sans le connaître, d'après la révolte de l'analyse contre la synthèse; tandis que les prétendus philosophes ont suffisamment senti son aptitude à terminer l'interrègne religieux qu'ils veulent perpétuer.

Voilà le double antagonisme que la régénération mathéma-

tique doit bientôt surmonter, sous l'impulsion sociale, avec l'assistance spontanée du public normal, disposé partout à seconder la seule issue propre à la révolution occidentale. On peut naturellement compter sur lui pour faire irrévocablement prévaloir l'initiation encyclopédique comme la condition fondamentale de toute saine élaboration des théories politiques et morales, d'où seront radicalement exclus les métaphysiciens quelconques. Convenablement développée, cette conviction disposera les gouvernés et les gouvernants à retirer leur confiance aux rhéteurs et sophistes qui tendent à perpétuer l'oscillation entre l'anarchie et la rétrogradation, en entravant la vraie réorganisation spirituelle. Après avoir consacré le domaine mathématique à l'ébauche systématique de la rationalité positive, on ne peut longtemps conserver aucun office théorique, et surtout le plus important, à ceux qui n'ont jamais fait ainsi l'apprentissage de la clarté, de la précision, et de la consistance. Tel sera le principal résultat immédiat de la régénération qu'exigeait la science fondamentale pour être irrévocablement liée a la terminaison directe de la révolution occidentale, comme à l'état normal que la prochaine génération doit graduellement installer. Une réaction simultanée surmontera les résistances académiques qui tendent à perpétuer la situation révolutionnaire en détournant l'esprit scientifique de sa meilleure destination, d'après sa vicieuse consécration au domaine initial dont l'élaboration est désormais systématisée. Si la positivité rationnelle doit nécessairement surgir en mathématique, ce volume prouve qu'un tel début peut seulement instituer une ébauche radicalement insuffisante, tant pour la méthode qu'envers la doctrine.

On voit ce double jugement caractérisé par la consécration normale de la Logique à l'étude systématique de l'Espace, qu'elle n'apprécie que sous les aspects les plus simples et les

plus généraux. Bornée au Grand-Milieu, la science fondamentale aspire au Grand-Fétiche, par l'entremise du ciel et de la double enveloppe terrestre, pour aboutir au Grand-Être, quand la végétalité suivie de l'animalité le rend théoriquement accessible. Étudié normalement, le domaine mathématique ébauche la connaissance de l'ordre universel, en dévoilant ses lois les plus abstraites, à la fois objectives et subjectives. Il commence à caractériser la véritable unité, d'après la combinaison qu'il institue entre la solidarité géométrique et la continuité mécanique. Réunissant le temps à l'espace, sa dernière branche lie le berceau positif à l'ensemble de la philosophie seconde, en ébauchant une doctrine partout applicable, quoique toujours insuffisante.

La constitution intérieure de la Logique développe et consolide son caractère général, d'après la consécration spéciale de ses trois éléments, numérique, géométrique, mécanique, à l'Espace, à la Terre, à l'Humanité ; ce qui complète son investiture religieuse. Il en résulte l'ébauche philosophique de la hiérarchie encyclopédique, dont les trois groupes sont ainsi représentés par les trois parties de la science fondamentale. Guidée convenablement, cette ascension partielle prépare et provoque l'ascension générale, qui peut seule réaliser ses principales aspirations en poussant jusqu'au but normal l'accroissement continu de la dignité théorique. Appréciées par un public naturellement étranger aux habitudes académiques, ces diverses aptitudes philosophiques du domaine mathématique ne pourront jamais dissimuler leur source nécessaire. Rien n'empêche de tels juges, ni de sentir ces avantages, ni de les regarder comme uniquement dus à la réaction synthétique de la science finale sur la science fondamentale, où de pareils aperçus ne pouvaient spontanément surgir.

Une équivalente appréciation devient plus prononcée envers

la méthode transcendante, dont l'inauguration abstraite constitue le meilleur titre logique de la première phase encyclopédique. Mieux jugé par les vrais philosophes que par les purs géomètres, le calcul infinitésimal fournit l'ébauche mathématique d'une institution essentiellement destinée au domaine humain, d'après une évolution graduelle dans les diverses régions préliminaires. A la science fondamentale, on doit seulement attribuer la différentiation, suivant la nature universelle et simple de ses phénomènes : elle n'offre qu'une insuffisante ébauche de l'intégration, qui s'y trouve philosophiquement contradictoire. Non-seulement la géométrie est principalement différentielle ; mais la mécanique le devient, au fond, davantage, puisque les notions générales y sont plus importantes et les solutions spéciales plus difficiles. Il faut pourtant reconnaître que l'ébauche mathématique de la logique infinitésimale peut immédiatement réagir sur l'ensemble de la science finale, en améliorant le discours, et même la pensée, dans l'appréciation systématique de l'existence sociale. Toute la vie active est empiriquement guidée par des intégrations spéciales, où concourent tous les aspects humains, entre des limites déterminées de temps et de lieu, comme les divers attributs mathématiques participent à l'intégration définie des géomètres. A la classe contemplative appartient la coordination générale de ces intégrales particulières, d'après leur subordination croissante à l'intégrale universelle systématiquement déduite de l'ensemble des relations sociales.

Normalement complétée par l'appréciation dynamique, cette vue statique conduit à regarder le fétichisme comme ayant sympathiquement ébauché l'intégration universelle, que la théocratie maintint en l'appliquant, mais dont l'accomplissement échoit au positivisme. On voit la transition occidentale préparer une telle issue d'après une différentiation successive

de l'existence humaine envers la spéculation, l'action, et l'affection, que le régime initial avait simultanément embrassées. Bien que le catholicisme dût tenter l'intégration, en faisant directement prévaloir la sympathie synthétique, la précocité d'un tel effort put seulement compléter, par le sentiment, la différentiation, d'abord théorique puis pratique, propre au polythéisme. Le conflit de la dernière différentiation avec les deux autres poussa la révolution occidentale à développer celles-ci suivant le nouveau caractère de l'existence humaine, où la science et l'industrie remplaçaient la théologie et la guerre. Elle fit ainsi surgir une anarchie croissante, en ameutant l'analyse contre la synthèse, dont la prépondérance est normalement instituée par le positivisme, qui seul accomplit l'intégration universelle, en régénérant les dispositions fétichiques.

Tels sont les fruits que l'élite du public occidental doit bientôt tirer de la systématisation finale des études mathématiques. Elles ne peuvent ainsi féconder que des esprits que la vie pratique dispose à saisir l'ensemble des rapports humains, et délivre des préjugés théoriques, sans faire jamais oublier l'aptitude régénératrice de la science où surgit la positivité rationnelle. Réagissant sur le sacerdoce naissant, ces praticiens spontanément normaux, tant prolétaires que praticiens, seconderont son chef pour y développer une active convergence, dont leur influence consolidera l'efficacité sociale. Mais le résultat de la régénération finale de l'esprit mathématique doit ensuite consister à lui faire graduellement obtenir la sanction la plus décisive, en lui conciliant les natures poétiques et féminines que sa sécheresse repoussait. Elles peuvent déjà sentir, chez le fondateur du positivisme, combien la plus profonde influence du début mathématique devient normalement compatible avec le plus actif essor des dispositions synthétiques et sympathiques qui subordonnent le dogme au culte.

Après avoir irrévocablement régénéré, dans ce volume, la science fondamentale, je dois directement consacrer le tome suivant à la systématisation de la science finale, instituée, mais non constituée, par mon principal ouvrage. Sous l'impulsion combinée des deux extrémités encyclopédiques, mes successeurs organiseront le milieu, qui ne leur offrira de graves difficultés qu'envers les études physico-chimiques, le préambule astronomique étant bientôt réglé d'après la régénération mathématique. Pendant sa dernière phase, l'évolution préliminaire s'élança vers la science finale aussitôt que la science fondamentale fut assez élaborée, sans s'arrêter à la science préparatoire autrement que pour l'ébauche nécessaire de ses liens normaux avec le domaine supérieur. Il faut pareillement procéder dans l'installation directe de la synthèse universelle, d'après la quinzième loi de la philosophie première, qui partout subordonne le moyen aux extrêmes. Retardée ainsi d'une génération, la systématisation physique, ou plutôt chimique, n'est pas plus indispensable à la systématisation morale qu'à la systématisation logique. Elle doit pourtant séparer et combiner leurs études respectives dans l'ensemble de l'éducation universelle, qui ne sera pleinement développable qu'après une telle installation. Replacés au point de vue historique, nous jugeons la science préparatoire assez ébauchée pour que nous puissions, ayant ici constitué la science fondamentale, systématiser la science finale, qui, surgie sous l'impulsion sociale, régénérera l'entendement humain.

FIN DU PREMIER VOLUME.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LE TOME PREMIER DE LA SYNTHÈSE SUBJECTIVE.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Calcul algébrique (16 *leçons*)

CHAPITRE TROISIÈME.

Géométrie préliminaire. (16 *leçons*).

CHAPITRE QUATRIÈME.

Géométrie algébrique (16 *leçons*).

CHAPITRE CINQUIÈME.

Géométrie différentielle (16 *leçons*).

CHAPITRE SIXIÈME.

Géométrie intégrale (20 *leçons*).

CHAPITRE SEPTIÈME.

Mécanique générale (20 *leçons*).

CONCLUSION.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU PREMIER VOLUME.

Paris.— Imprimerie E. Thunot et Ce, 26, rue Racine.




185287

